ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME CINQUANTADUESIMO

1916-1917

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1916.

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale, Uff. ✠, Comm. ♛. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

VICE-PRESIDENTE

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio della R. Accademia delle Scienze di Napoli, della R. Accademia Peloritana di Messina, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio

del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche di Filadelfia, della Società di studi legislativi di Parigi, Membro della Commissione Reale per l'ordinamento dell' istruzione superiore, Comm. ✻, Grand'Uff. ✠. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1913 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Tesoriere

Einaudi (Luigi), Dottore in Giurisprudenza, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di Economia e Legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili, Socio onorario del *Cobden Club* di Londra, Membro del Comitato centrale e della Commissione esecutiva del Consorzio nazionale. — *Torino, Piazza Statuto, 16.*

Eletto alla carica il 19 novembre 1916 per il triennio dal 1° luglio 1916 al 30 giugno 1919.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Ateneo di Brescia, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✠, e ♔. — *Torino, Via Sebastiano Valfrè, 14.*

Eletto alla carica l'8 febbraio 1914 per il triennio dal 9 febbraio 1914 all'8 febbraio 1917.

Segretario

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia degli Agiati in Rovereto, Socio onorario dell'Accademia di Verona, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Comm. ✠, ♔. — *Torino, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica il 19 novembre 1916 per il triennio dal 16 novembre 1916 al 15 novembre 1919.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio straniero dell'*American Ornithologists' Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Comm. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Comm. ✠ e ✠. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

5 dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge e delle Società Matematiche di Londra e di Calcutta, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Comm. ✠, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*

10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della *Sociedad Cientifica* del Messico, Socio del Circolo matematico di Palermo, della Società ma-

tematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✻ e ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo). Dottore in Matematica. Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Comm. ♔. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Presidente della Giunta di Vigilanza dell'Istituto di Magistero per l'educazione fisica, Assessore per l'Igiene al Municipio di Torino, ecc., ecc., Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e Vice-Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino onorario di Crespellano (Bologna), Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Membro onorario della Società chimica portoghese; Socio onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ♔, ✠. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e Scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Corrispondente della Reale Accademia dei Lincei, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, della Società Antonio Alzate di Mexico, ecc., Comm. ♔, *Officier du mérite agricole. — Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro della Commissione superiore metrica al Ministero di Agricoltura, Industr. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Consigliere comunale, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Comm. ♔. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✠ e Comm. ♔. — *Via Baretti, 45.*

5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 17 gennaio 1915.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica, Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Comm. ✠. — *Via dei Mille, 7.*

15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Panetti (Modesto), Dottore in Matematica, Ingegnere, Professore di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Comm. ♔. — *Via S. Francesco da Paola, 36.*

24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Capitano del Genio, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in Scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della *Clark University* di Worcester (Mass.), Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica superiore, Direttore del Seminario Matematico e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Professore d'un Corso d'analisi all'Università di Stockholm (1906), *Professeur agréé à la Sorbonne* (1912), *Louis Clark Vanuxem lecturer* (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella Classe di Matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro onorario straniero della Società Reale di Edimburgo, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America, Washington), Membro straniero della *American Philosophical Society for Promoting Useful Knowledge* di Philadelphia (Pa), Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietrogrado, Membro onorario dell'Accademia Rumena di Bucarest, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, *Membre du Bureau* della Società fisica di Francia, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Membro onorario dell'*Harvard Mathematical Club* in Cambridge (Mass.), Vice-Presidente del R. Comitato Talassografico italiano, Presidente della R. Commissione tecnica per gl'Istituti di Previdenza, ecc., ✠, ✱, ⚭. — *Roma, Via in Lucina, 17.*

3 febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ⚭, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*

13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle Scienze (Roma), della R. Società delle Scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ✻, Gr. Uff. ✠, ✠. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*

13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società Freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Uni-

versità di Dublino, Socio corrispondente della Società Medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia Medico-Chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Comm. ✻ ⚭, Cav. ✠.

13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Righi (Augusto), Dottore, Senatore del Regno, Professore ordinario di Fisica, Incaricato dell'insegnamento della Fisica per i Medici, Farmacisti e Veterinari nella R. Università di Bologna, Membro (Benedettino) della Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia di Padova, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia di Scienze naturali ed economiche di Palermo, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro della Società degli Spettroscopisti Italiani, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Dottore in Filosofia *honoris causa* dell'Università di Gottinga, di Erlangen, Membro corrispondente della I. Accademia delle Scienze di Petrogrado, di Lund e della Società Reale delle Scienze di Upsala, Membro onorario della *Philosophical Society* di Cambridge, della Società Reale di Edinburgo, della *Royal Institution* della Gran Bretagna, della Società Antonio Alzate del Messico, della Società di Scienze naturali di Mosca, della Società di Fisica di Ginevra, Uno dei 12 Soci onorari della Società Fisica di Londra, Membro straniero della R. Società delle Scienze di Gottinga, Comm. ✻, Gr. Uff. ⚭, ✠. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*

24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Taramelli (Torquato), Dottore, Professore ordinario di Geologia e Incaricato di Paleontologia nella R. Università di Pavia, Membro del R. Comitato Geologico e del R. Consiglio di Meteorologia e Geodinamica, Socio ordinario del Comizio Agrario di Pavia, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio degli Atenei di Brescia e Bergamo, delle Accademie di Udine, di Verona e di Spoleto, della Società Agraria Istriana, della Società dei Naturalisti di Modena, della R. Accademia dei Georgofili di Firenze, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia delle Scienze della Società Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, dell'I. R. Accademia delle Scienze di Rovereto, Socio onorario delle Società Alpine di Udine e di Trento, dell'I. R. Istituto geologico di Vienna, della Società Reale delle Scienze del Belgio, della Società Elvetica di Scienze naturali, della Società di Scienze naturali di Filadelfia, Gr. Uff. ⚭, ✻, Cav. ✠. — *Pavia, Via Volta, 24.*

24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Bertini (Eugenio), Dottore, Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, Professore onorario dell'Università di Pavia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro effettivo del R. Ististuto Lombardo di Scienze e Lettere, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Lucca, ✱, ♛. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Schiff.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Romualdo), Dottore, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere e dell'Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, Professore ordinario di Botanica e Direttore del R. Istituto e Orto Botanico dell'Università di Roma, Comm. ♛. — *Roma, Via Panisperna, 89.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Ròiti (Antonio), Dottore, Professore emerito del R. Istituto di Studi superiori in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Roma, Lungotevere Farnesina, 2.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Noether (Massimiliano), Prof. nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 dicembre 1880.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 12 gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 10 gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.

Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Cambridge. — 27 maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Direttore dell'Osservatorio di Milano. — 12 gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 giugno 1903.

Cerulli (Vincenzo), Direttore dell'Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.

Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.

Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 novembre 1873.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 febbraio 1895.
Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 giugno 1903.
Lorentz (Enrico), Professore dell'Università e Curatore del Laboratorio Teyler di Haarlem. — 14 giugno 1903.
Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — Id. id.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 gennaio 1881.
Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 gennaio 1897.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 giugno 1903.
Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 marzo 1905.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 marzo 1905.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore, Kaiser Wilhelm Institut, Berlin. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.
Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella " Deutsche Technische Hochschule " di Praga. — 5 marzo 1905.

Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 febbraio 1885.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore, Torino. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 febbraio 1898.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia naturale di Londra. — Id. id.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.
Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 marzo 1905.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — Id. id.
Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 maggio 1910.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Boselli (S. E. Paolo), Presidente del Consiglio dei Ministri, P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Presidente del Consiglio degli Archivi, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Presidente del Consiglio Centrale della Società *Dante Alighieri*, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio Provinciale di Torino, Presidente del Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento, Cav. O. S. SS. A., Gr. Cord. ✠ e ♔, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Segretario.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina, Direttore della Biblioteca e già Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, già Membro del Consiglio e della Giunta Superiore dell'Istruz. Pubblica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

Eletto alla carica il 28 maggio 1916 per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ♛, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*
17 giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, ☼, Comm. ✻, ♛. — *Torino, Via Principi d'Acaia, 5.*
7 dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, dell'Accademia Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✻, ♛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro, *predetto*).
20 maggio 1900 - 31 maggio 1900. — Pensionato 20 maggio 1897.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ♛. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Dottore in Giurisprudenza, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico, Uff. ✻, Comm. ♛. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), *predetto.*
20 maggio 1906 - 9 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✻, Gr. Uff. ♕. — *Corso Siccardi, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato . . . . .

Brondi (Vittorio), Dottore in Giurisprudenza, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Membro della Società internazionale per lo studio delle questioni di Assistenza (Parigi), Uff. ✻, Comm. ♕. — *Torino, Via Montebello, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Accademico corrispondente della Crusca, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione Senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia, della Colombaria di Firenze, e del Comitato nazionale per la Storia del Risorgimento italiano, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Comm. ✻ e Comm. ♕. — *Via S. Dalmazzo, 24.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907.

Einaudi (Luigi), *predetto.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Giurisprudenza, Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in Lettere, Professore incaricato di Egittologia nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, Soprintendente dei Musei e scavi di antichità per il Piemonte e la Liguria, Uff. ✱, Comm. ♔.
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Patetta (Federico), Dottore in Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, Socio effettivo della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria e della R. Deputazione di Storia patria per le provincie modenesi, Socio fondatore della Commissione Senese di Storia patria, Socio effettivo della Società piemontese di Archeologia e Belle Arti, Comm. ♔. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 - 11 giugno 1914.

Vidari (Giovanni), Dottore in Lettere e Filosofia, Professore ordinario di Pedagogia e già Preside della Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e dell'Ateneo di Brescia, Presidente della Società Filosofica italiana, Direttore del Corso di Perfezionamento per i licenziati delle Scuole normali, ✱, Comm. ♔. — *Via Valeggio, 15.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Prato (Giuseppe), Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Economia politica e Scienza delle finanze nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, Professore incaricato di Diritto industriale nella R. Università di Torino, Membro effettivo della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio ordinario della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili in Firenze, ♔. — *Via Bertola, 37.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente onorario del Consiglio degli Archivi, Professore emerito e Presidente onorario della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, delle R. Accademie di Baviera, di Vienna e di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. della Università di Edimburgo, di Halle, Membro della *Royal Society of Literature* di Londra, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Socio dell'*American Academy of Arts and Sciences* di Boston, Professore emerito della R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ✠, Cav. ✠, Cav. dell'Ordine pour le mérite di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ord. Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.
16 marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford, di Cracovia e di Atene, Uff. ✠, Comm. ✠, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✠, Gr. Cr. ✠. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore *honoris causa* dell'Università di Giessen, Professore ordinario di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario non residente della Società Reale di Napoli, Socio ordinario della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della *New Language Association of America,* della *Société néophilologique* dell'Università di Pietrogrado, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Lettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ✠, Uff. ✻, Gr. Uff. ♔. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Dottore, Senatore del Regno, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✻, ♔, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Etnografico, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei ✠, Comm. ✻, ♔. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della Società Reale di Napoli, Socio nazionale e Vice-Presidente della R. Accademia dei Lincei, Accademico della Crusca, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Ateneo di Brescia, Socio straniero della *Dante Society* d'America, ✠, Comm. ✻, Comm. ♔. — *Napoli, Largo Latilla, 6.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Fraccaroli (Giuseppe), Professore di Letteratura greca nella R. Università di Pavia, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova e dell'Accademia di Agricoltura, Scienze, ecc. di Verona, ♔. — *Milano, Via Lazzaretto, 16.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.
Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.
Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 marzo 1903 – 9 aprile 1903.
Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — 15 marzo 1896.
Masci (Filippo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — 14 giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Pisa. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 marzo 1889.

Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 marzo 1890.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Iannaccone (Pasquale), Prof. nella R. Univ. di Padova. — 17 maggio 1914.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — Id. id.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 marzo 1886.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 aprile 1895.
Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 28 aprile 1895.
Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° febbraio 1885.
Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — Id. id.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Biblioteca Civica di Verona. — Id. id.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Torino. — Id. id.
Vitelli (Gerolamo), Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.
Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Torino. — Id. id.
Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. — Id. id.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1915
al 31 Dicembre 1916.

ELEZIONI

SOCI

Salvadori (Tommaso)
Jadanza (Nicodemo) . — Riconfermati nell'adunanza del 28 novembre 1915 per un triennio come Delegati della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia.

De Sanctis (Gaetano)
Boselli (Paolo) . . .
Patetta (Federico) . — Eletti nell' adunanza del 13 febbraio 1916 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche per comporre la Commissione per il premio Gautieri per la Storia (triennio 1913-1915).

Camerano (Lorenzo), eletto alla carica triennale di Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi unite del 28 maggio 1916 e approvata la elezione con D. L. del 27 agosto 1916.

Chironi (Giampietro), eletto alla carica triennale di Vice-Presidente dell'Accademia nell'adunanza a Classi unite del 28 maggio 1916 e approvata la elezione con D. L. del 27 agosto 1916.

Naccari (Andrea) . .
Parona (Carlo Fabr.)
D'Ovidio (Enrico) . .
De Sanctis (Gaetano)
Stampini (Ettore) . .
Ruffini (Francesco) . — Eletti nell'adunanza delle Classi unite del giorno 28 maggio 1916 per comporre la Commissione del premio Bressa pel quadriennio 1913-1916.

Boselli (Paolo), eletto alla carica triennale di Direttore della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza della Classe stessa del 28 maggio 1916 e approvata l'elezione con D. L. del 27 agosto 1916.

Stampini (Ettore), eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 28 maggio 1916 della Classe stessa ed approvata la elezione con D. L. del 27 agosto 1916.

Baudi di Vesme (Alessandro), eletto a membro della Commissione del premio Gautieri per la Storia, per completare la Giunta che, a termine del nuovo Regolamento interno, deve essere composta di quattro Soci.

Einaudi (Luigi), rieletto alla carica triennale di Tesoriere dell'Accademia nell'adunanza a Classi unite del 19 novembre 1916 e approvata l'elezione con D. L. del 7 dicembre 1916.

Parona (Carlo Fabrizio), eletto alla carica triennale di Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza della stessa Classe del 19 novembre 1916 e approvata l'elezione con D. L. del 7 dicembre 1916.

Naccari (Andrea) . .
Somigliana (Carlo) .
Grassi (Guido) . . .
Balbiano (Luigi) . .
Eletti nell'adunanza della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali del 19 novembre 1916 per comporre la Commissione del premio Vallauri per le scienze fisiche, quadriennio 1915-1918.

Davidsohn (Roberto). La Classe di scienze morali, storiche e filologiche in seduta privata del 24 novembre 1916 deliberava di cancellarlo dal novero dei Soci corrispondenti della Classe stessa.

MORTI

19 Novembre 1914.

Minot (Carlo Sedgwick), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

18 Febbraio 1916.

Savio (Fedele), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

26 Aprile 1916.

Bassani (Francesco), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia).

30 Giugno 1916.

Maspero (Gastone), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

15 Luglio 1916.

Metchnikoff (Elia), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

24 Luglio 1916.

Ramsay (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di chimica generale ed applicata).

23 Novembre 1916.

Cipolla (Carlo), Socio nazionale residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

11 Dicembre 1916.

Battelli (Angelo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di fisica generale e sperimentale).

. . . . . 1916.

Geikie (Sir Arcibaldo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1916.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano: e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie. — Memorie della Classe di scienze, ser. 3ª, vol. VII e VIII, 1912-1915.

America. American Urological Association. Transactions, vol. IX.

* **Amsterdam**. Académie Royale des sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 2e Sect., Dl. XVII, 4-5; Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R., Dl. XIV, 6.; XV (T. 1); XVI, 1 e 2. — Verslag Natuurkundige, 1914-15, Dl. XXIII, 1-2. — Proceedings (Section of Science), vol. XVII, 1-2. — Verslagen en Mededeelingen Afd. Letterkunde, 4e Reecks, Dl. I. — Jaarboeck, 1914. — Prijsvers 1915.,

* **Baltimore**. Johns Hopkins University. University Circular, 1913, 6-10. — American Journal of Mathem., vol. XXXVII, 3-4; XXXVIII, 1-3. — American Journal of Philology, vol. XXXVI, 2-4. — Studies historical and political Science, Ser. XXXIII, 4; XXXIV, 1.

* — Johns Hopkins Hospital. Reports, vol. XVII.

— Peabody Institute of the City of Baltimore. Forty Ninth Annual Report, May, 31, 1916.

* **Barcelona**. Real Academia de Ciencias y Artes. Memorias, 3ª época, vol. XI, 24-30,; XII, 1-47; Boletin, 3ª época, vol. III, 7. — Nómina del Personal Académico. 1915-1916.

* **Basel**. Naturforschenden Gesellschaft Verhandlungen. Bd. XXVI.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Notulen, Dl. LIII, Aflev. 3. — Oudheidkundig Verslag, 1915. Derde-Vierde Kwartaal. — Tijdschrift voor indische Taal; Land-en Volkenkunde, Dl. LVII, 3-4.

— K. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium: Observations, volume XXXV. — Observations, secundary Stations, vol. II, 1912. — Verhandelingen, N. III. — Regenwaarnemingen, Dl. II, 1913. — Regenatlas: Java. — Uitkomsten der Regenwaarnemingen op Java met atlas.

— Observatorio, Java. Seismological Bulletin, 1910-1915.

Bilt. K. Nederlandisch Meteorologisch Institut. N. 102, 106, Mededeelingen en Verhandelingen, 18, 19, 20 (102). — Ergebnisse aerologischer Beobachtungen, 2, 1913 and Erganzung 1911-1912 (106).

* **Berkeley**. University of California. Chronicle and Official record, vol. XVII, 3-4. — Botany, vol. V, 78; VI, 6-8, — Geology, vol. VIII, 22; IX, 1-4. — Modern Philology, vol. III, 3; IV, 2. — Pathology, vol. II, 17. — Physiology, vol. V, 1. — Zoology, vol. XV, 1; XVI, 1-6.

* **Bern**. Naturforschenden Gesellschaft. Mitteilungen: Jahre 1914-1915.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Memorie: Classe di Scienze morali, ser. 1ª; T. IX, 1914-1915. Sezione di scienze storico-filologiche, fasc. unico. Sezione di scienze giuridiche, fasc. unico. — Rendiconto Classe di scienze morali, Ser. I, vol. VIII, IX, fasc. 1.

* — Società Medico-Chirurgica. Bollettino delle scienze mediche, 1916, vol. IV, 1-10.

* — Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche dell'annata 1913; idem 1914. Bologna, 1914-15.

* — Biblioteca Comunale. Bullettino, L'Archiginnasio. 1916. An. IX, 1-4.

* **Bordeaux**. Annales de la Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Revue des études anciennes, t. XVIII, 1-4. — Bulletin hispanique, t. XVIII, 1-3. — Bulletin italien, t. XVI, 1-2.

* **Boston**. American Philological Association. Transactions and Proceedings, 1914, vol. LXV.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1915.

* **Brooklyn**. Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. II, N. 5; vol. 3, N. 1.

* **Bucarest**. Academia Românâ. Bulletin de la Section scientifique, IVme an. N. 5-10; Ve an. 1. — Bulletin de la Section historique, IIe an. N. 2.

* **Bucuresti**. Societății Române de Ştiinte. Buletinul, An. XXIV, N. 5-6.

* **Buenos Aires**. Ministerio de Agricultura de la Naciòn. Officina Metorologica Nacional: Boletin Mensual, Año I, N. 1, Enero de 1916. Sociedad Quimíca Argentina. Anales, t. III, 12; IV, 13-14.

— Statistique municipale. Bulletin mensuel de la ville de Buenos Aires, an. XXIX, N. 9-12; XXX, 1-8.

* **Cagliari**. R. Università. Istituto Economico giuridico. Studi economico-giuridici pubblicati per cura della Facoltà di Giur., an. VII, 1915, P. I.

* **Calcutta**. Geological Survey of India. Records, vol. XLV, p. 4; XLVII, 1-2, — Memoirs, Index, vol. XXI-XXXV, 1884-1911.

* — Geological Survey of India. Palaeontologia Indica. Memoirs, New Ser. vol. VI, Memoir No. 1; vol. V, No. 2, 3.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XVIII, Parts 4-6. — Transactions, vol. XXII, No. 8-9.

* **Cape-Town**. Royal Society of South-Africa. Transactions, vol. V, P. 2-5.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. — Bollettino delle Sedute, fasc. 38-39.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, Ser. 2ª, vol. IV, dispense 11-12; vol. V, 1-11.

* **Chambéry**. Académie des Sciences, Belles-lettres et Arts de Savoie. Mémoires, 5[e] Série, II-III.

* — SociétéS avoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et Documents, t. LV.

Chicago. John Crerar Library. Twenty-First Annual Report for the Year 1915.

* **Cincinnati**. Lloyd Library. Bibliographical Contribution, vol. II, N. 7-9, 1915-1916. — Synopsis of the Section Apus of the genus Polyporus.

* **Coimbra**. Academia de Sciencias de Portugal. 1[a] Ser., t. III, IV.

Columbus. Ohio. Ohio State University Bulletin, vol. XX, N. 34-35.

* **Copenhague**. Académie R. des Sciences et des Lettres: Mémoires; Section des Sciences, 7[ème] Sér., t. XII, N. 7; 8[ème] Sér., t. I, N. 2-3; t. II, N. 1-3; Section des Lettres, 7[ème] Sér., t. II, N. 5. — Bulletin, 1915, N. 5-6; 1916, 1-2.

Copenhagen. Dansk naturhistorisk Forening. Contributions from the University Laboratory for Medical Bacteriology to celebrate the inauguration of the State Serum Institute. Edited by C. Iul. Salomonsen. Copenhagen, 1912. — Videnskabelige Meddelelser, Bd. 66, 1915.

Cortona. Nobile Accademia Etrusca. Saggi di dissertazioni accademiche, t. IX, Firenze, 1791.

* **Edinburgh**. Royal Society. Proceedings, vol. XXXV, P. III, XXXVI, I and II. — Transactions, vol. XLIX, Part. 3-4; L, 1-4.

* **Firenze**. R. Accademia della Crusca. Atti, an. 1914-1915.

* R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, 5[a] Ser., vol. XIII, disp. 1-4.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Pubblicazioni: Fasc. 34, Osservazioni astronomiche fatte all'equatoriale di Arcetri nel 1915,

— Società Italiana per lo studio della Libia e delle altre Colonie. Archivio bibliografico coloniale (Libia), anno I, dicembre 1915, N. 2, 3, 4.

— Osservatorio del Collegio alla Querce. Pubblicazioni, Ser. 4[a], N. 24, disp. 3.

** — Unione statistica delle città italiane: Annuario 1915-1916.

* **Formosa**. Bureau of Productives Industries. Icones plantarum formosanarum nec non et Contributiones ad Floram Formosanam, vol. V.

Fukuoka (Japon). Medizinische Fakultät der K. Universität Kyushu. Mitteilungen, Bd. II, 1916.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 4[e] Série, N. 11-13.

* **Genève**. Société de Physique et d'Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXXII, 1915. — Mémoires, vol. XXXVIII, 4-5.

* — Observatoire. Résumé météorologique de l'année 1914 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. — Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1914. — Rapport sur le Concours de réglage de chronomètres de l'année 1915.

* **Genova**. Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti, an. XLIII, 1-5.

* — Società Ligure di Storia patria. Atti, vol. XLVII.

Genova. Regia Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo sull'andamento della Scuola nell'anno accademico 1914-15.

— Istituto Idrografico della Regia Marina. Tavole nautiche. — Annali idrografici, vol. IX (1913-1914).

* **Granville** (Ohio). Denison University. Scientific Laboratories. Bulletin, vol. XVIII, art. 1-3.

Halifax. Nova Scotia. Nova Scotian Institute of Science. Proceedings and Transactions, vol. XIII, P. 3 4; XIV, P. 1-2.

* **Harlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, Sér. III, B. (sciences naturelles), t. II, 3.

* — Fondation de P. Teyler van der Hulst. Catalogue de la Bibliothèque, t. IV (1904-1912).

* **Hobart**. Royal Society of Tasmania. Papers and Proceedings, 1915.

* **Jowa City**. University. Bulletin. Contributions from the Physical Laboratory, vol. I, 6.

Kodaikánal. Observatory. Bulletin, XLIX-L-LII.

* **Kyōto**. Scholae Medicinalis Universitatis Imperialis. Acta, vol. I, N. 1-2.

* — College of Science Kyōto Imperial University. Memoirs, vol. I, 6-7.

* **Kristiania**. Videnskapsselskapet. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse, 1914. — Skrifter, 1914. — Forhandlinger Aar 1914. — The Norvegian Aurora Polaris Expedition, vol. I, Kr. Birkeland. On the cause of magnetic storms and the origin of terrestrial magnetism, Section 1-2. Christiania, 1908-1913.

* **La Plata**. Universidad Nacional. Faculdad de Ciencias físicas, matemáticas y astronómicas. Anuario, 1916, N. 7. — Contribución al Estudio de las ciencias fisicas y matemáticas, N. 18-13.

* **Lawrance**. University of Kansas. Bulletin, vol. XVI, N. 5 (Science Bulletin, vol. IX, N. 1-21).

Lima. Ministerio de Fomento. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perù. Boletin, N. 55.

* **Lisboa**. Comissão do Serviço Geológíco de Portugal: Comunicações, t. XI (1915-1916).

— Instituto de Anatomia (Faculdade de Medicina da Universidad de Lisboa). Archivo de Anatomia e Anthropologia, 1914, vol. II, 1-2.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. VI, 3; VII, 1.

London. International Catalogue of scientific literature. Vol. 10. Batteriology, Physiology. — Vol. 11. Anatomy, Anthropology, Batteriology, Botany, Chemistry, Geology, Meteorology, Mineralogy, Palaeontology, Physiology. — Vol. 12. Anatomy, Astronomy, Anthropology, Botany, Chemistry, General Biology, Geography, Mathematics, Mechanics, Meteorology. Mineralogy, Palaeontology, Physics, Zoology. — Vol. 13. Astronomy, Biology, Physics, Geography, Mathematics, Mechanics, Meteorology, Mineralogy, Palaeontology, Zoology. — Vol. 14. Zoology.

* — British Association for the advancement of science. Report of the Eighty-Fifth Meeting Manchester, 1915.

* **London**. Royal Society. Year Book, 1916, Proceedings, Ser. A, vol. *92*, N. 637-646; Ser. B, vol. *89*, N. 612-617. — Transactions, Ser. A, vol. *216*, N. 541-547; vol. *217*, N. 549 550; Ser. B, vol. *207*, N. 339-347; *208*, N. 348-351.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXVI, n. 1-9.

* — Geological Society. List. 1916. Quarterly Journal, vol. LXXI, P. 2-3.

* — Linnean Society. List, 1816-1917. Proceedings, 126th. Session (Novemb. 1913 to June 1914); 127th. Session (Novemb. 1914 to June 1915, 128th. Session 1815-1816). — Journal: Botany, vol. XLII, No. 287; XLIII, No. 288-291. — Zoology, vol. XXXI, No. 209, 210; XXXII, No. 218-222. — Transactions, 2.d Sez. Botany, vol. VIII, P. 7-8. — Zoology, vol. XI, P. 13; XVI, P. 4-5; XVII, P. 1-2.

* — London Mathematical Society. Proceedings, Ser. 2a, vol. XV, 1-5.

* — Royal Microscopical Society. Journal 1916, P. 1-5.

* — Zoological Society of London. Proceedings, 1915, P. V; 1916, I-II. — Transactions, vol. XX, P. 16-17; XXI, 1.

* **Lugano**. Società Ticinese di Scienze naturali. Bollettino, Anno XI, 1915.

* **Lund**. Lunds Universitets Årsskrift. Medicin sam Matematiska och Naturvetenskapliga ämnen, N. F. Afd. 2, Bd. X. Nr. 1. — Teologi, Juridik och Humanistika ämnen. N. F. Afd. 1, Bd. X, Nr. 1.

* **Lyon** Université. Annales. Nouv. Série. I. Sciences, Médecine, fasc. 37-38. II. Droits, Lettres, fasc. 29-30.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1913.

Madras. Kodaikánal and Madras Observatories. Annual Report of the Director for 1915.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletin, vol. LXVIII, 1-6; LXIX, 1-5.

* — Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario 1915, 1916. — Revista, t. XII, 8-12; XIII, 1-12; XIV, 1-11. — Discursos leidos en la solemne Sesión celebrada bajo la presidencia de S. M. el Rey el dia 12 de marzo de 1916.

* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. 5°, n. 41–49.

* **Mantova**. R. Accademia Virgiliana. Atti e Memorie, 1914, N. S., vol. VII, P. 2; VIII, P. 1.

* **Mexico** Sociedad Científica " Antonio Alzate ". Memorias y Revista, t. XXXII, 11 12; XXXIII, 11-12; XXXIV, 1-10.

* **Milano**. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Elenco dei membri e soci per l'anno 1916. — Memorie. Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XXI, fasc. 8-10; Classe di lettere e scienze morali e storiche. vol. XXIII, fasc. 6-8. — Rendiconti, vol. XLVIII, 18-20; XLIX, 1-14. — Atti della Fondazione scientifica Cagnola, vol. XXIV, anni 1913-14.

* — Società Italiana di Scienze naturali e Museo Civico di Storia naturale. Atti, vol. LIV, fasc. 2-4; LV, 1.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Anno 1917. — Articoli generali del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano.

Milano. R. Commissione Geodetica italiana. E. Soler. Seconda campagna con la bilancia di Eötvös nei dintorni di Padova (Mandria-Pratolongo) con annessa Relazione del Dott. G. Silva sulle Determinazioni di gravità col bipendolo Miloni.

— (città). Bollettino municipale mensile di cronaca amministrativa e di statistica, an. XXXII, 1-10. — La popolazione di Milano secondo il censimento eseguito il 10 giugno 1911. — Nel secondo centenario della nascita del conte Giorgio Giulini, storiografo milanese.

— Banca Commerciale italiana. Relazione del Consiglio di Amministrazione (dalla Direzione).

* **Minneapolis**. University of Minnesota. University Farm., St.-Paul, Agricultural Experiment station. Bulletin, 148-152. — Minnesota School of Mines Experiment Station. Bulletin, No. 4. — Current Problems, N. 5, 6, 7. — Studies in Language and Literature, N. 1, 2. 5. — Studies in Engineering, N. 2, 3. — Studies in the Social Sciences, N. 2, 3, 6.

— Geological and Natural History Survey of Minnesota. Occasional Papers, No. 1.

* **Modena**. Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, ser. 5ª, vol. II (1915).

Monaco. Resultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert Iᵉʳ Prince souverain de Monaco, fasc. XLII, XLVI, XLVII. — Institut Océanographique. Bulletin, nᵒˢ 314-322.

* **Montpellier**. Académie des Sciences et Lettres. Bulletin mensuel, 1916, nn. 1-5.

Mosca. Société Mathématique. Recueil mathématique (in lingua russa).

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 6ᵉ Série, t. XI (1913-1914).

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 3ᵉ sér., t. IV, 1ʳ-4ᵉ trimestre (1914).

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1916. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconto, Ser. 3ª, vol. XXI, fasc. 7-12; XXII, 1-10. — Atti, Serie 2ª, vol. XVI. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti: Rendiconto gennaio a dicembre 1915, Atti, N. S., vol. IV. — Accademia di scienze morali e politiche: Rendiconto gennaio a dicembre 1915. Atti, vol. XLIV.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. 6ª, vol. LXVII.

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XLV.

* — Società dei Naturalisti. Bollettino, vol. XXVIII, 1915.

* — Museo Zoologico della R. Università. Annuario; N. S., vol. IV, 1-20.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Mémoires, t. V.

* **New-York**. New York Public Library. Astor Lenox and Tilden Foundation. Bulletin, 1916, vol XX, No. 1-10.

* — New York Academy of Sciences. Annals, vol. XXXVI, pp. 1-496; XXIV, 171-443; XXVII, 1-29.

* — American Mathematical Society. — Bulletin, vol. XXII, 4-10; XXIII, 1-2. — Transactions, vol. XVII, 1-4.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin. vol. XXVII. 4. Index, XXVIII, 1-2.

Ottawa. Royal Society of Canada. List of Officers and Members and Minutes of Proceedings. — Mémoirs: Section I. Litterature française, Histoire, Archéologie, etc. Ser. III, vol. IX, 1-3; X. — Transactions: Section II. English Litteratur, History, Archeology, etc. Section III, vol. IX, 1-3; X. — Transactions: Section III. Mathematical, Physical and Chemical Sciences. Ser. III, vol. IX, 1-3; VIII, X. — Section IV. Geological and Biological Sciences, vol. IX, X. — Section IV. Geological and Biological Sciences, Ser. III, vol. IX.

— Ministère des Mines, Commission Géologique. Bulletin, N. 1, 2, 8. — Mémoires, N. 20 *E*, 25, 26, 30, 31, 39, 42, 44, 45, 50, 53, 59, 60, 64, 65. — L'industrie du Nikel, N. 179. — La chute du Niagara, N. 1571. — Dépôts d'Argile et de Schistes des Provinces de l'Ouest. P. III, N. 1325. — Rapport sommaire pour l'année civile 1914. — Rapport annuel de la production minérale du Canada durant l'année civile 1913, N. 321. — Rapport préliminaire sur une partie de la Côte principale de la Columbie britannique e les îles voisines. — Catalogue des Oiseaux du Canada.

— Department of Mines. Mines Branch Electrothermic Smelting of Iron Ores in Sweden. — Summary Report of the Mines Branch... for the Calendar Year ending December 31, 1914. — Report (Preliminary) on the Mineral production of Canada during the Calendar Year 1915. Bulletin N. 11, 12, 13. — Recherches sur les charbons du Canada, vol. IV. — Préparation du cobalt métallique par la réduction de l'oxyde. — L'exploitation filonienne au Yukon. - Rapport sur les Pierres de construction et d'ornement du Canada, vol. II, III, Provinces maritimes. — Les propriétés physiques du cobalt métallique. 2ème partie. — Rapport préliminaire sur les sables bitumineuses de l'Alberta Nort (Alberta Nord). — Le Gypse du Canada. — Rapport sommaire de la Division des Mines pour 1914. — Investigation of the Coal of Canada (Supplementing Report, No. 83).

Oxford. Radcliffe Observatory. Results of Meteorological Observations, vol. LI, 1911–15.

* **Padova**. R. Università degli Studi. Annuario per l'anno accadem. 1915-16.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti, 3ª ser., vol. VIII.

* — Museo Civico: Bollettino, An. XVII, 1914.

* **Palermo**. Circolo Matematico. Rendiconti, t. XL, fasc. 1-3; XLI, 1.

* **Paris**. Ministère des Travaux publics. Annales des Mines. — Partie administrative: 11ème Sér., t. III, Documents du 2e semestre 1914; t. IV, Documents du 2e semestre 1915; t. V, Documents du 1er, 2e trim., 1916.

* — Institut de France. Académie des Sciences. Recueil de Fonds Bonaparte, N. 1, 1915. — Procès-Verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au moi d'août 1835, t. VI.

* — Muséum National d'Histoire naturelle. Bulletin, an 1914, N. 7; 1915, 1-6.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1916.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Mémoires, 8e sér., t. IV, 1914. — Bulletin, 4me trimestre 1915.

* **Paris**. Société de Géographie. La Géographie. Bullet., XXX, n. 4-6.
* — Société Mathématique de France. Bulletin, t. XLIII, 3-4; XLIV, 1. — Comptes rendus des Séances de l'année 1916.
— Société Philomathique. Bulletin, sér. X^{e}, t. VI et VII.
* — Société Zoologique de France. Bulletin, t. XXXIX, XL.
* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, an. XV, fasc. 3-4.
* **Perugia**. R. Deputaz. di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, an. XXI, fasc. 3; XXII, 1.
* — Facoltà di Giurisprudenza dell'Università. Annali, vol. XII, 1914, 3-4.
— Facoltà di Medicina dell' Università. Annali, ser. 4^{a}, vol. IV, fasc. 4; V, fasc. 1-4.
* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Proceedings, vol. LXVII, P. 2-3; LXVIII, 1-2. — Journal, 2^{d} Ser., vol. XVI, Part 2.
* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. LIV, N. 217-220; LV, 1-3. — Transactions, New Ser., vol. XXII, P. 3.
* — Wagner Free Institute of Science. Annual Announcement, 1915-16.
* **Pino Torinese**. Regio Osservatorio Astronomico. Annuario astronomico pel 1917.
* **Pisa**. R. Università. Annuario per l'anno accademico 1915-1916.
* — Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali, vol. XXIV, XXV, 1-4. — Memorie, vol. XXX.
Pompei. Santuario. Calendario, 1916.
* **Portici**. R. Scuola Superiore di Agricoltura. Annali, vol. XII.
* — Laboratorio di Zoologia generale agraria della R. Scuola Superiore di Agricoltura. Bollettino, vol. X.
* **Pusa**. Agricultural Research Institute. Memoirs: Botanical Ser., vol. VII, 6; VIII, 1-3. — Chemical Ser., vol. IV, No. 4, 5, 7. — Report 1914-15.
* **Reims**. Académie de Reims. Travaux, an 1914-15. Séance tenue à Paris, le 10 décembre 1915; 1915-1916, id. id. le 2 juin 1916.
Rio de Janeiro. Ministerio de Justiça e Negocios interiores. Relatorio apresentado ao Presidente da Republica dos Estados Unidos do Brazil pelo Ministro E. O. de Torres Bandeira, 1910.
* — Bibliotheca Nacional. Programmas do Cursu de bibliotheconomia. — Relatorio que ao Ministro da Justiça e Negocios interiores o Director Dr. M. C. Peregrino da Silva, 1911-1915, 5 fasc.
— Museu Nacional. Archivos, vol. XVIII, XIX.
* — Observatorio Nacional. Anuario para o año de 1916, XXXII.
— Instituto Historico e Geographico Brasileiro. Antes de guerra (A Missao Saraiva ou os preliminares do conflicto com o Paraguay), 1914.
— Jardim Botanico. Archivos, vol. I, fasc. 1.
* **Roma**. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Ufficio centrale di Statistica. Annuario statistico italiano, serie 2^{a}, vol. IV, 1914. — Statistica delle cause di morte dell'anno 1913. — Notizie sommarie su gli Istituti per l'Istruzione media e normale negli anni scolastici dal 1910 al 1912.

* **Roma**. Ministero delle Finanze. Direzione Generale delle Gabelle. Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, 30 novembre, 31 dicembre 1915: 1° gennaio-settembre 1916. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1914, vol. II, Parte 1ª, 3ª. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, an. XXXII, 1915, novembre dicembre: an. XXXIII, 1916, gennaio-agosto.

* — Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Statistica Giudiziaria civile e commerciale per l'anno 1911; idem per l'anno 1912. — Statistica giudiziaria penale per gli anni 1912 e 1913. — Statistica della criminalità per l'anno 1911. — Atti della Commissione di Statistica e legislazione. Relazioni e verbali delle discussioni della Sessione del 1° luglio 1914; febbraio-marzo 1915.

* — Ministero dell'Interno. Le riforme nell'amministrazione e le mutazioni nel fine delle Istituzioni pubbliche di beneficenza, 1906. — Ordinamento delle Istituzioni pubbliche di beneficenza, 1908. — Gli Statuti e la procedura per le riforme delle Istituzioni pubbliche di beneficenza, 1910. — Domicilio di soccorso, Spedalità, Azione popolare. Disposizioni generali nella legge 7 luglio 1890, n. 6972, sulle Istituzioni pubbliche di beneficenza, 1914. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1914, vol. I, P. II, Movimento per paesi di provenienza e di destinazione (Paesi europei). — Statistica delle carceri e dei riformatori per l'anno 1914.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1915. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Memorie, ser. 5ª, vol. XI, fasc. 3-11; Rendiconti, Ser. 5ª, vol. XXV (1916), 1° semestre 1916, fasc. 1-12, 2° semestre, 1-9. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche: Memorie, Ser. 5ª, vol. XV, fasc. 7 *B*; XV, 3-4; Rendiconti, Ser. 5ª, vol. XXV (1916), 1-4. — Notizie degli scavi, Ser. 5ª, vol. XII, 7-12; XIII, 1-4. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 6 giugno 1916, vol. III, 1916.

* — Società Italiana delle scienze (detta dei XL). Memorie di matematica e di scienze fisiche e naturali, Ser. 3ª, vol. XIX.

* — Biblioteca centrale Nazionale "Vittorio Emanuele". Bollettino delle opere moderne e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno d'Italia, an. 1915. Ser. IV, nn. 11164-13594.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, an. XXI, 1-22.

* — R. Comitato Geologico italiano. Bollettino. vol. XLV, 1-4.

* Regio Ufficio Centrale Meteorologico e Geodinamico italiano. Annali, volumi XXVII, P. 3; XXVIII, 3; XXXIII, 1; XXXIV, 1; XXXV, I.

— R. Osservatorio del Collegio Romano. Memorie ed osservazioni, Ser. 3ª, vol. VI, Parte 2ª ed ultima.

— Laboratorio Batteriologico della Sanità pubblica (Ministero dell'Interno). Studi sui rapporti tra la tubercolosi umana e bovina, Roma, 1912-15.

— Cassa Nazionale per gli infortunii degli operai sul lavoro. Rassegna di assicurazioni e previdenza sociale, Bollettino mensile, anno III, 1916, n. 1, 2. — (Dono dell'On. Cesare Ferrero di Cambiano, Presidente).

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, an. 1915-16, Sessioni 1ª-5ª (19 dicembre 1915-18 giugno 1916). — Memorie, Ser. 2ª, vol. I.

* **Saint-Louis, Mo.** Missouri Botanical Garden. Annals, vol. II, N. 3-4.

* **San Francisco.** California Academy of Sciences. Constitution and By-Laws, Trustees, Officers Museum Staff and Members, 1915. — Proceedings, 4ª Ser. III-VI.

* **Sendai.** Tōhoku Imperial University. The Science Reports: Ser. I, vol. IV, 5; V, 1-4.

* **Siena.** Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXXI, fasc. 1-4; XXXII, 1-3.

* **Stockholm.** Académie Royale Suédoise des Sciences. Handlingar (Mémoires). Bd. LI, N. 1-11; LIII, 1-5. — Archiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. X, 4. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. VI, 1. — Archiv för botanik, Bd. XIV, 2. Archiv för zoologi, Bd. IX, 3-4. — Årsbok (Annuaire), År 1915. — Lefnadsteckningar, V, 1. — Dahlgren: Personförteckningar, 1739-1915, Accessions Katalog, 30.

— Institut Central de Météorologie. Observations météorologiques suédoises, vol. 56, 1914.

Stonyhurst. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological, Magnetical and Seismological Observations, 1915.

* **Svizzera.** Société Helvétique des sciences naturelles. Notices historiques et documents réunis par la Commission historique instituée à l'occasion de la Session annuelle de Genève (12-15 septembre 1915) (Centénaire de la Société), vol. LI, 1915. — Nouveaux Mémoires, vol. LI. — Actes, 1914, I-II Part; 97e Session 12-15 septembre à Genève, I-II Part.

— Commission Géologique de la Société Helvétique des sciences naturelles. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse, N. Sér., XXXe 45 livrs.

* — Geologische Commission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Geschichte. — Beiträge der Geologischen Karte der Schweiz, Neue Folge, XLIV, XLIV Liefg.

— Geotechnische Kommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Geotechnische Ser., Lieferung V.

— Commission Géodésique Suisse. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, vol. XIV, XV.

* **Sydney.** Royal Zoological Society of New South Wales. The Australian Zoologist, vol. I, P. 3.

Tacubaya. Observatorio Astronomico Nacional. Anuario para el año de 1916. — Boletin, N. 5.

* **Tananarive.** Académie Malgache. Bulletin, an. 1913, vol. XII.

Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1915-16.

* **Thonon.** Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, t. XXVIII.

* **Tōkyō.** Tōkyō Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. VIII, 2.

— Imperial University. College of Science. Journal, vol. XXXIV, art. 1; XXXV, 3, 7, 9; XXXVI, 7-8; XXXVII, 2-5; XXXVIII, 1.

— Medizinische Fakultät der K. Universität. XIV Bd., Heft 2-3; XV, 1-2.

* **Topeka.** Kansas Academy of Science. Transactions, vol. XXVII.

* **Torino.** R. Università degli Studi. Annuario 1914-15; 1915-16.

Torino. Istituto Giuridico della R. Università. D. Bizzarri, Ricerche sul diritto di cittadinanza aella costituzione comunale. — G. Pacchioni, Cesare Bertolini. — M. Ricca-Barberis, L'obbligo della consegna della cosa e della garanzia per evizione nella compra-vendita. — Idem, La prova contraria dell'art. 448 Cod. civ. Nota a sentenze. — Idem, L'àmbito dell'obbligo della garanzia per evizione.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, anno LXXIX, nn. 1-9.

* — Società degli Ingegneri e degli Architetti. Atti, an. XLIX, fasc. 2-3; L, 1916, fasc. 1-2.

* — Società piemontese di Archeologia e Belle arti. Atti, vol. VIII, fascicoli 3-4. — Davide Calandra scultore (1856-1915).

— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, vol. XXX, 1915, nn. 692-707.

— Istituto di Anatomia patologica della R. Università. Lavori, Anni scolastici 1913-15.

* — R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria. Biblioteca di Storia italiana recente (1800-1870), vol. VI.

* — R. Accademia di Agricoltura, Annali, vol. LVIII.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXXV, 1-10.

— Consiglio Provinciale. Atti, an. 1915.

* — Municipio di Torino. Annuario, 1914-15. — Atti del Consiglio Comunale, 1916. — Servizi d'igiene e sanità. — Bollettino statistico. 1915, nn. 1-12.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensile, Ser. III, vol. XXXIV, 5-12; XXXV, 1-2.

— Scuola professionale per gli Orefici. Relazione della Direzione per l'anno scolastico 1914-15, anno XI.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1915.

* **Toronto**. R. Canadian Institute. Transactions, vol. XI, p. 1. — General index to publications 1852-1912.

* — University of Toronto Studies. Review of historical publications relating to Canada, vol. XX. Publications of the Year 1915.

* **Tortosa**. Observatorio del Ebro. Boletin mensual. vol. V, 12; VI, 1-10.

* **Toulon**. Académie du Var. Bulletin, LXXXII et LXXXIII, 1914-15.

* **Toulouse**. Université. Annuaire pour l'année 1914-1915 et Livret de l'étudiant. — Annales du Midi. Revue de la France méridionale, an. XXVI^{e} 1914, N. 103 4. — Faculté des Sciences. Annales, 3^{e} sér., t. V. — Faculté de Lettres. Bibliothèque méridionale, 1re sér., t. XVI; 2^{e}, t. XVII.

* **Udine**. Società storica Friulana. Memorie storiche Forogiuliesi, vol. X, fasc. 1-4.

* **Upsal**. Observatoire météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, vol. XLVI, 1915.

* **Urbana**. University of Illinois. Illinois Biological Survey, vol. II, N. 4. — Studies in Language and Literature, vol. I, II.

* — Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, vol. X, Index; XI, art. 2-5; XII, 1-2.

* **Venezia.** R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Atti, t. LXXV, disp. 1-7.

* — Ufficio idrografico del R. Magistrato delle Acque. Pubblicazioni, nn. 53, 66, 68, Parte I (testo). — Bollettino mensile, 1915. Parte I (tipografica), 1-12; II (litografica), 1-2, 1°-2° trim. 1916. Parte I, 1-7; II, 1-3. — Bollettino bibliografico, 1°-2° trim. 1916. Catalogo della Biblioteca dalla lettera *A* alla lettera *C* compresa; Cenni descrittivi sulle magre illustrate nei Bollettini litografici del 3° e 4° trimestre 1915.

— R. Comitato Talassografico Italiano. Commissione Mareografica. — Bollettino mareografico mensile, 1914, n. 9-12; 1915, 1-3. — Bollettino bimestrale, vol. IV, n. 27-35; V, 1. — Memorie, XLIV, XLVII-LII.

* **Vercelli.** Società Vercellese di storia e d'arte. Archivio, 1912, IV, 2-3; ann. VII, n. 4; VIII, 1-3.

* **Verona.** Museo Civico. Madonna Verona. Bollettino, an. X, fasc. 36-37.

Washington. Library of Congress. Report of the Librarian of Congress and Report of the Superintendent, of the Library Building and Grounds for the fiscal Year ending June 30, 1915.

— Department of Commerce. U. S. Coast and Geodetic Survey. — Geodesy. Special publications, No. 24, 27, 28, 30, 31, 35. — Annual Report of the superintendent U. S. Coast ... to the Secretary of Commerce for the fiscal Year ended June, 30, 1915.

* — Department of Commerce. Bureau of Standards. Bulletin, XII, 1-3.

— Department of the Interior. United States Geological Survey. — Monographs, LIII, LIV. — Geologic Atlas of the United States, No. 195-198. — Thirty-Sixth Annual Report of the Director of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. June 30, 1915. — Bulletin, 544, 565, 566, 568, 569, 573, 587, 591, 593, 595, 598, 601-609, 611-616, 617, 620 B-N, P, 621 K, L, N, O. — Mineral resources of the U. S. Calendar Year 1914, I, A; I, 1-24; II, 2-34; 1915, I, A. — Water-Supply Papers, 340 K. L; 342, 351, 352, 355-359, 371, 372, 373, 375 B *a* E, 370, 376-379, 385, 397, 400 A. — Professional Papers, 95 B *a* I.

— U. S. Department of Labor. Bulletin, N. 181, 185. — Monthly Review, vol. II, January, 1916, N. 1.

* — Smithsonian Institution. Annual Report of the Board of Regents the Smithsonian Institutions showing the operation, expanditures, and condition of the Institution for the Year ending June 30, 1914. — Miscellaneous Collections, vol. *62*, 4; *64*, 3; *65*, 3, 9-14; *66*, 1-5, 7. 8. — Opinions rendered by the International Commission on Zoological nomenclature-Opinions, 67.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Proceedings, vol. 48, 49. — Bulletin, N. 50, p. VII; 91, 92 (vol. I e II), 94. — Report on the progress and condition of the United States National Museum for the Year ending June 30, 1915.

— Bureau of American Ethnology (Smithsonian Institution). Bulletin, 57, 62.

* — Carnegie Institution List of Publications of the Carnegie Institution of Washington. Publications, N. 85 (New Jersey, 1789 1904); 86, 175,

vol. II, 189, 206, 207, 209, 211, 212, 215 A, vol. I, II; 216-218, 220-221 N. 1; 222, Nos. 2, 3, 4, 5, 6; 223, 7, 8, 9; 229-233, 235-237. — Year Book, N. 14, 1915.

Washington. Smithsonian Institution. United States National Museum. — Contributions from the U. S. National Herbarium, vol. XVI, p. 14; XVII, 8; XVIII. 3-5, 7.

— Carnegie Endowment for International Peace: Second Pan American Scientific Congress. The final Act. 1916. — The Hague Conventions and Declarations of 1899-1907. 1915. — Recommendations of International Law and Official Commentary thereon, 1916. — Instructions to the American Delegates to the Hague Peace Conferences and their Official Reports, 1916. — The Hague Court Reports, 1916.

* — National Academy of Sciences. Memoirs, vol. XII, P. 2ª; XIII. — Proceedings, vol. II, 1-11.

* — Naval Observatory U. S. A. Annual Report for the Fiscal, Year 1915. Appendix No. 2. — Publications, 2ª ser., vol. IX, Parte I. — The American Ephemeris and Almanac for the Year 1918.

* **Zürich**. Naturforschenden Gesellschaft. Vierteljahrschrift 60; Jahrg. 1915; 1-4 Heft.

PERIODICI 1916.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.

American Journal of Mathematics. Baltimore; 8°.

American Journal of Philology. Baltimore; 8°.

** **Annalen** der Physik und Chemie, n. 1-8. Leipzig; 8°.

** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.

** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.

Annals and Magazine of Natural History. London; 8°.

* **Annals** of Mathematics. Charlottesville; 4°.

** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.

** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.

** **Archivio** bibliografico coloniale. Firenze; 8°

** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.

Archivio storico lombardo. Milano; 8°.

* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.

* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania; 8°.

Archivum Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.

* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.

** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.

* **Athenaeum**: Studi periodici di letteratura e storia. Direttore Carlo Pascal. Pavia; 8°.

* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie, n. 1-8. Leipzig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift, n. 1-21. Berlin; 8°.
* **Biblioteca** nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie, n. 1-10. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Conferenze** e Prolusioni. Periodico quindicinale. Roma; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
Felix Ravenna. Bollettino Storico Romagnolo edito da un gruppo di studiosi. Ravenna; 8°.
** **Fortschritte** der Physik im J. 1913. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
Geografia (La), Comunicazioni dell'Istituto geografico De Agostini. Novara; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
* **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. LXI, 1-4. Gotha; 4°.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic· Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.

** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. Roma; 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
Riforma (La) Sociale. Rassegna di questioni economiche, finanziarie e sociali (Dono del Socio Prof. Einaudi).
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di filosofia. Continuazione della *Rivista Filosofica*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Aeronautica. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Scientia**. Rivista di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna, 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
Tôhoku (The) Mathematical Journal. Edited by T. Hayashi.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
Yale Review. New Series. Edited by Wilbur L. Cross. New Haven; 8° (dono del Socio Prof. Einaudi).

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono

Dall'11 Giugno al 19 Novembre 1916.

Annali di matematica pura ed applicata. Ser. II, 26 vol.; Ser. III, vol. 1-19, 22-25. Milano, 1868-1916; 49 vol. in 4° (*Dono del Socio residente Prof. E. D'Ovidio*).

Bado (A. A.). L'accion de sulfato de cobre sopre las algas de las aguas potables. Buenos Aires, 1916; 8° (*dall'A.*).

Berlese (A.). Centuria prima di Acari nuovi. Firenze, 1916; 8° (*id.*).

— " Scutellista Gigantea „ Berl., N. Sp. Firenze, 1916; 8° (*id.*).

— Centuria seconda di Acari nuovi. Firenze, 1916; 8° (*id.*).

Bisson (Elvira). In memoria del Dr. Leopoldo Chinaglia, Tenente di Complemento nel ... Regg.° Fanteria. Primo Assistente alla R. Stazione di Entomologia agraria di Firenze; 8° (*dall'Autrice*).

Darboux (G.). Mémoire sur une classe de surfaces de quatrième classe qui sont corrélatives des surfaces du quatrième ordre à conique double et admettent pour courbe double le cercle de l'infini. Paris, 1916 (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Gosio (B.). Studi sui rapporti fra tubercolosi umana e bovina. Nota riassuntiva. Roma, 1915; 4° (*dall'A.*).

— Vaccino anticolerico e antitifico, con particolare riguardo alla loro preparazione in grande. Roma, 1916; 8° (*id.*).

— Nuovo apparecchio per rapide titolazioni dei vaccini batterici. Roma, 1916; 8° (*id.*).

— Reazioni cromatiche nelle acque Albule di Tivoli. Roma, 1916; 8° (*id.*).

Giornale di matematica di Battaglini. Napoli, 1863-1915; 54 vol. in 4° (*Dono del Prof. Enrico D'Ovidio, Accademico residente e Direttore della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*).

Guareschi (I.). La Chimica e la guerra. Conferenza. Roma, 1916; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Correlazioni fra struttura chimica e digeribilità dei principii alimentari organici. Torino, 1916; 8° (*id.*).

— La Teoria atomistica e Sebastiano Basso con notizie e considerazioni su William Higgins. Roma, 1916; 8° (*id.*).

Issel (A.). Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate. Roma, 1916; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Leonardi Cattolica (P.) e **Luria** (A.). Fari e segnali marittimi. Parte I e II. Torino, 1916; 2 vol. in 4° (*dall'A. S. E. Pasquale Leonardi Cattolica*).

Malenotti (E.). Sulle pretese varietà del " Chrysomphalus dictyospermi „ (Morg.) Leon. Firenze, 1916; 8° (*dall'A.*).

— Nuovo Diaspiti. Firenze, 1916; 8° (*id.*).

— " Signiphora Merceti „ Malen. N. Sp. Firenze, 1916 (*id.*).

— " Prospaltella fasciata „ Malen. N. Sp. Firenze, 1916 (*id.*).

Missiroli (A.). Indagini comparative sull'immunità vaccinale ottenuta per via endovenosa e sottocutanea. Roma, 1916; 8° (*id.*).

Reycend (G. A.). L'Ingegnere Stefano Molli e la sua opera di Architetto. Torino, 1916; 8° (*id.*).

Voli (Irene vedova Chiapusso). La " Flora Segusiensis „ 1805 e l'opera " excursoria „ del botanico Gio. Fr. Re nelle valli e convalli di Susa. Il botanico Beniamino Casu e la sua traduzione della " Flora Segusiensis „ 1881-1882.

Dal 18 Giugno al 26 Novembre 1916.

** *Annuario* statistico delle città italiane. Anno VI (1915-1916). Firenze, 1916; 8°.

Caristia (C.). Il diritto costituzionale italiano nella dottrina recentissima. Torino, 1915; 8° (*dall'A.*).

De Cupis (A.). Competenza e giurisdizione. 2ª ediz. Milano, 1916; 8° (*id.*).

Ferrabino (A.). Kalypso. Saggio di una Storia del Mito. Torino, 1914; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia, triennio 1913-15*).

Kant (E.). La metafisica dei costumi. Parte I: La dottrina del diritto. Prima traduzione italiana con prefazione e note di G. Vidari. Milano, 1916; 8° (*dal Prof. G. Vidari Socio residente dell'Accademia*).

Levi (E.). Storia poetica di Don Carlos. Pavia, 1914; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura, triennio 1914-16*).

Lovera (R.). L'enseignement du français à l'Institut des hautes études commerciales de Turin. Turin, 1916; 24° (*dall'A.*).

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899. Indice per materia, vol. III, puntata 1, 2.

Per la riforma della legge Infortuni. Roma, 1915; 8° (*dal Presidente della Cassa nazionale d'assicurazione per gl'infortuni degli operai sul lavoro, Senatore Cesare Ferrero di Cambiano*).

Sanesi (I.). Storia dei generi letterari italiani. La Commedia. Milano, s. a. (*dall'A.*).

Sforza (G.). Il Dittatore di Modena Biagio Nardi e il suo nipote Anacarsi. Milano-Roma-Napoli, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Il Generale Giovanni Durando e la Campagna nel Veneto del 1848 (Nuovi documenti). Venezia, 1910; 8° (*id.*).

Stampini (E.). Studi di Letteratura e Filologia latina. Torino, 1917; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Vendidad (Il) reso italiano sul testo zendico di C. F. Geldner da Francesco Adolfo Cannizzaro, corredato di una Introduz. e di Note del Prof. Italo Pizzi. Messina, 1916; 1 vol. 8° (*dono dell'Accademia Peloritana*).

Vento (S.). Le condizioni dell'Oratoria sacra del Seicento. Ricerche e critica. Milano-Roma-Napoli, 1916; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura, triennio 1914-16*).

Vico (G. B.). La Scienza Nuova giusta l'edizione del 1744 ecc., a cura di F. Nicolini. Parte 3ª ed ultima. Bari, 1916; 1 vol. 8° (*dono del signor F. Nicolini*).

Vidari (G.). Per la educazione nazionale. Saggi e discorsi. Torino, 1916; 16° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Wrong (G. M.). The Crusade of 1383. London, 1892; 8°.

Zuccante (G.). Antistene nei dialoghi di Platone. Milano, 1916; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— I Cirenaici. Milano, 1916; 8° (*id.*).

Dal 26 Novembre 1916 al 21 Gennaio 1917.

Biadego (G.). Antonio Spagnolo. Verona, 1916; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— Aleardo Aleardi nel quadriennio 1850-1853. Venezia, 1916; 8° (*id.*).

Boselli (P.). Relazione presentata dal Presidente P. B. sull'opera svolta dal Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento dall'inizio dei suoi lavori (4 aprile 1909) al 15 giugno 1916. Roma, 1916; 8° (*dono del Ministero dell'Istruzione*).

Bragagnolo (G.) e **Bettazzi** (E.). Torino nella Storia del Piemonte e d'Italia. Torino, 1916; 2 vol. 8° (*dagli Autori per il premio Gautieri per la Storia, triennio 1913-1915*).

Corpus Scriptorum Latinorum Paravianum moderante **Carolo Pascal**. N. 1-5: Catulli Carmina; Taciti De origine et situ Germanorum; Caesaris Commentarii de bello civili; Ciceronis De re publica; Minucii Octavius.

Giorcelli (G.). Contributo alla storia del V Congresso generale dell'Associazione agraria del Piemonte tenutosi in Casale Monferrato nei giorni 30 e 31 agosto, 1, 2, 3 settembre 1847. Alessandria, 1916; 8°.

Malagoli (G.). La letteratura vernacola pisana posteriore al Fucini con note linguistiche e glossario. Pisa, 1916; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-1916*).

Papadopoli Aldobrandini (N.). Il ducato d'oro di Deodato di Gozon Gran Maestro dell'Ordine di San Giovanni di Gerusalemme a Rodi (1346-1353). Venezia, 1916; 8° (*dall'A.*).

Rasi (P.). L'iscrizione metrica sepolcrale di Fulgenzio. Venezia, 1916; 8° (*id.*).

Scala (E.). Legislazione sui vini e proposte di modificazioni alla legge italiana dell'11 luglio 1904. Conegliano, 1916; 8° (*id.*).

Tabellae honorificae exemplar. Scripsit **Hector Stampini**. Ex officina lithogr. Aloisii Simondetti olim Doyen.

Vesin (Angela). Niccolò Tommaseo Poeta. Saggio critico con alcune poesie inedite. Bologna, 1914; 8° (*dall'Autrice per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-1916*).

Dal 19 Novembre 1916 al 28 Gennaio 1917.

Anastasia (G. E.). Araldica Nicotianae. Scafati, 1914; 2 vol. 4°, Testo e Atl. (*dall'A. per il premio Bressa del quadriennio 1913-1916*).

B. B. Étude sur les Travaux du professeur G. Boccardi concernant la variation des latitudes. Paris, 1916; 8° (*dono del Prof. G. Boccardi*).

Boccardi (G.). Pubblicazioni del prof. G. Boccardi a tutto il 1916. Torino; 8°.

— Il mio " Credo „ riguardo alle variazioni delle latitudini. Torino, 1916; 8°.

— Latitudine della prima sala meridiana dell'Osservatorio di Pino Torinese. Torino, 1916; 8° (*dall'A.*).

Colonnetti (G.). Principii di statica dei solidi elastici. Pisa, 1916; 8° (*id.*).

Donati (G.). Il Dinamismo. Forlì, 1916; 8° (*id.*).

Gorini (C.). Studi di batteriologia agraria: 1) Ricerche sui batteri del latte e delle mammelle; 2) Ricerche sui formaggi; 3) Ricerche sui foraggi (silò, fieni, ecc., nei rapporti coll'alimentazione del bestiame) (*dall'A. per il premio Bressa del quadriennio 1913-1916*).

Guareschi (I.). La sintesi chimica. Torino, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Janet (Ch.). Note préliminaire sur l'œuf du " Volvox globator „. Limoges, 1914; 8°.

— L'alternance Sporophyto-gamitophytique de génération chez les Algues. Limoges, 1914; 8° (*dall'A.*).

Pisani (Michele). Cura del tracoma della cheratite vasculosa superficiale (panno grasso della cornea) con auto-siero-terapia. Cosenza, 1914; 8°.

— La cataforesi nella terapia delle lesioni sifilitiche dell'occhio. Cosenza, 1915; 8° (*dall'A. per il premio Bressa del quadriennio 1913-1916*).

Rossi (A. G.). Un trasformatore dinamico per correnti alternate. Torino, 1916; 8° (*id.*).

Taramelli (T.). Di alcuni problemi geologici che risguardano la valle dell'Isonzo. Milano, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale dell'Accademia*).

— Descrizione geologica della provincia di Pavia, con annessa carta geologica e otto tavole, 2ª ediz. Novara, 1916; 4° (*id.*).

Tiffeneau (M.). Le centenaire de Charles Gerhardt. Paris, 1916; 8° (*dall'A.*).

Dal 28 Gennaio al 17 Giugno 1917.

Artom (A.). Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica. Roma, 1903; 8° (*dall'A.*).

— Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo. Roma, 1905; 8° (*id.*).

Artom (A.). Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).
— Nuove ricerche sulla dirigibilità delle onde elettriche. Roma, 1915; 8° (*id.*).
— Sopra un metodo generale per rendere selettive le Stazioni radiotelegrafiche. Roma, 1917; 8° (*id.*).
Berlese (A.). Centuria terza di Acari nuovi. Firenze, 1916; 8° (*dall'A.*).
Boccardi (J.). Problèmes des probabilités. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).
Boffito (G.) e **Niccolari** (P.). Bibliografia dell'Aria ossia Repertorio biobibliografico italiano di Meteorologia e di Magnetismo terrestre. Lettera A. Firenze, 1916; 4° (*dal Prof. G. Boffito Socio corrispondente dell'Accademia*).
Bruni (A. C.). Sullo sviluppo della porzione ghiandolare dell'ipofisi nell'uomo. Firenze, 1916; 8° (*dall'A.*).
Carbonelli (G.). Sulla dotazione obbligatoria di medicinali nelle Spezierie a Roma nel sec. XVI. Roma, 1917; 8°.
Coblentz (W. W.). Sensitivity and magnetic shielding tests of a Thomson Galvanometer for use in radiometry. Washington, 1915.
— Constants of spectral radiation of a uniformly heated inclosure or so-called black body, II. Washington.
Eredia (F.). Strumenti e Osservazioni di Meteorologia. Con norme sul servizio meteorico nelle Colonie. Firenze, 1916, 8° (*dall'A.*).
Fallot (P.). Sur la présence de l'Aptien dans la Sierra de Majorque (Baléares). Grenoble, 1916 (*dall'A.*).
Grassi (G.). Termodinamica. Introduzione al Corso di Fisica applicata. 2ª edizione. Napoli, 1896; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).
Guareschi (I.). Storia della Chimica. XII. Petrolii ed emanazioni terrestri e loro origine. Notizie storico-critiche di Chimica geologica. Torino, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
— Osservazioni sulla chimica dell'alimentazione. Torino, 1917; 8° (*id.*).
— Sui nuovi metodi di coltivazione del frumento in Francia. Torino, 1917; 8° (*id.*).
— La chimica nella alimentazione. Torino, 1917; 8° (*id.*).
Guidi (C.). Sulle dighe a volta. Roma, 1917 (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
Kilian (W.) et **Reboul** (P.). Sur la présence de Céphalopodes à affinités Indo-africaines dans le crétacé moyen de Cassis. Paris, 1904 (*dal Professore Kilian Socio corrispondente dell'Accademia*).
— et **Révil** (I.). Sur les discontinuités de sédimentation et les niveaux de brèches dans les Alpes françaises. Paris, 1916; 4° (*id.*).
Lacroix (A.). Notice historique sur Bory de Saint-Vincent (Geneviève-Jean-Baptiste-Marcellin) (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Lambe (L. M.). On Cheneosaurus, a new genus and species of Trachodont Dinosaur from the Edmonton cretaceous of Alberta. Ottawa, 1917; 8° (*dall'A.*).
Luria (A.). Aerofuoco (cioè faro per aeronavigazione) a lampi singoli od a gruppi semplici o composti di lampi tipo " Luria " a proiettore con riflettore ausiliario. Torino, 1916; 4°.

Luria (A.). Fuoco (Fanale) ad intermittenza per aeronavigazione, atto altresì a funzionare da telegrafo ottico per trasmettere messaggi ai velivoli. Torino, 1916; 4°.

Lussana (S.). Nel mondo dell'invisibile. Discorso. Siena, 1915; 8° (*dall'A.*).

— Sul calore specifico dei liquidi a pressione costante per pressioni e temperature diverse. Pisa, 1914; 8° (*id.*).

— Variation de la chaleur spécifique des gaz avec la pression. Paris, 1916; 8° (*id.*).

Malenotti (E.). *Metalaptus torquatus*, n. gen. e n. specie di Calcidite. Firenze, 1917; 8° (*dall'A.*).

Martinez (G.). I moderni sistemi di ricezione radiotelegrafica. Milano, 1917; 4° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). La Frutticultura in Piemonte nella Storia, nell'Arte e nei suoi rapporti colla R. Accademia di Agricoltura di Torino. Discorso. Torino, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Mola (P.). Catalogo della raccolta delle piante e degli animali esistenti nella regione di Bosa. Cagliari, 1916; 8° (*dall'A.*).

Negro (C.). Sul clima della Libia attraverso i tempi storici. Roma, 1913-16; 4° (*dall'A.*).

Peano (G.). Importanza dei simboli in Matematica. Bologna, 1916; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Idem. Traduzione francese del Prof. Rouquet-Alzonne. 8°.

— Le definizioni per astrazioni. Pavia, 1916; 8° (*id.*).

— Residuo in Formola de quadratura Cavalieri-Simpson. Paris, 1916; 8° (*id.*).

— Approssimazioni numeriche. Roma, 1916; 8° (*id.*).

— Formulario Mathematico. Tomo V. Torino, 1908; 8° (*id.*).

Pirotta (R.). L'origine di nuove specie secondo la teoria dell'incrocio. Bologna, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son Yacht par Albert Ir Prince Souverain de Monaco. Fasc. 48 e 49 (*dono di S. A. Serenissima il Principe Albert Ir*).

Sibillot (Ch.). Lo Sport Colombofilo negli antichi tempi. Paris, 1916; 8° (*dall'A.*).

Sperino (G.). Per la difesa della scienza anatomica italiana. Modena, 1917; 8° (*dall'A.*).

Talucchi (V.). Brevi cenni sulla vita e sulle opere dell'Architetto Giuseppe M. Talucchi. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). Risultati di uno studio geologico della provincia di Pavia. Milano, 1917; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

— La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni italiane nell'Adriatico. Milano, 1917; 8° (*id.*).

Vallauri (G.). Sul funzionamento dei tubi a vuoto a tre elettrodi (audion) usati nella radiotelegrafia. Milano, 1917; 4° (*dall'A.*).

Varella (I. R.). As humanidades distantes. Lisbōa, 1917; 8° (*dall'A.*).

Verson (E.). Il filugello e l'arte di governarlo. Roma-Napoli, 1917; 8° (*dall'A. per il premio Vallauri 1915-1918*).

— Compendio di vita quarantenne. Padova, 1913; 8° (*dall'A.*).

Williams (S. R.). Some relations between the Magnetic and the Mechanical Properties of Steel and of Nickel. Oberlin (Ohio), 1917 (*dall'Oberlin College*).

Dal 21 Gennaio al 24 Giugno 1917.

Alfieri (V.). La vita, le rime e altri scritti minori a cura di Michele Scherillo. Milano, Ulrico Hoepli editore, 1917; 8° (*Omaggio del Prof. Scherillo e dell'Editore*).

— Altro esemplare per il premio Gautieri di Letteratura 1914-1916.

Ariosto (L.). Orlando Furioso. Ad uso delle persone colte e per le scuole con introduzione e commento di Giuseppe Campari e con prefazione di Michele Scherillo. Milano, Ulrico Hoepli editore, 1917; 8° (*Omaggio di M. Scherillo e dell'Editore*).

Biadego (G.). Carlo Cipolla. Commemorazione. Verona, 1917; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boccaccio (G.). Il Decamerone nel quale si contengono *Cento Novelle* esposte e illustrate per le persone colte e per le scuole da M. Scherillo. Milano, 1917; 8° (*dal Prof. M. Scherillo per il premio Gautieri per la Letteratura, 1914-16*).

Boffito (G.). Ugo Bassi. Note bio-bibliografiche. Napoli, 1917; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Calonghi (F.). Il Codice bresciano di Tibullo. Torino, 1917; 8° (*dall'A.*).

Cecchi (E.). Storia della letteratura inglese nel secolo XIX. Vol. I. Milano, 1915; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura, 1914-1916*).

** **Chiuso** (T.). La Chiesa in Piemonte dal 1797 ai giorni nostri. Vol. V. Torino, 1904; 8°.

Cian (V.). Un poeta e un filosofo del Risorgimento, Giovanni Prati e Vincenzo Gioberti. Roma, 1917 (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Einaudi (L.). Studi di Economia e Finanza. Torino, 1916; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

— Per una nuova storia delle dottrine economiche. Firenze, 1915; 8° (*id.*).

Elio Aristide. L'encomio di Roma (II secolo dopo C.) tradotto da Carlo Oreste Zuretti. Milano, 1917; 8° (*dal trad. Socio corrisp. dell'Accademia*).

Fowler (Mary). Catalogue of the Petrarch Collection bequeathed by Willard Fiske. Oxford University Press, 1916; 8° (*dono della Cornell University Library*).

Galli (I.). Sulla questione della lingua internazionale. Relazione. Roma, 1917; 4° (*dall'A.*).

Giorcelli (G.). Documenti storici del Monferrato, XXI. Alessandria, 1916; 8°.

Landucci (L.). Saverio Scolari. Commemorazione. Palermo, 1896; 8° (*dall'A.*).

— Indissolubilità del matrimonio confarreato. Bologna, 1896; 8° (*id.*).

— Un preteso caso di affinità ed un passo dei Frammenti Vaticani. Venezia, 1909; 8° (*id.*).

— L'ingiusta assoluzione del debitore a proposito della opportunità d'una nuova revisione del diritto privato romano. Venezia, 1913; 8° (*id.*).

Landucci (L.). Azioni per far valere il " pactum disciplinae „ e la " lex commissoria „ nella compra-vendita. Venezia, 1915; 8° (*dall'A.*).

— La lesione enorme nella compra e vendita. Venezia, 1916; 8° (*id.*).

Machiavelli (N.). Il Principe e altri scritti minori a cura di M. Scherillo. Milano, 1917; 8° (*dal Prof. M. Scherillo per il premio Gautieri per la Letteratura, 1914-1916*).

Macdonald (A.). War and Criminal Anthropology. Washington, 1917; 8° (*dall'A.*).

Meozzi (A.). Il Carducci Umanista. Studio critico. Sansepolcro, 1914; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura, 1914-1916*).

— Il Carducci traduttore. Napoli, 1917; 8° (*id.*).

Mercier (D. J. Card.). Scritti e Discorsi mentre dura la guerra. Roma, 1917; 8°.

Montalcini (C.). — Assemblee della Repubblica Cisalpina. La Repubblica Cisalpina. Prefazione. Bologna, 1917; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 144-145, T. XVIII, P. I; Fasc. 146-147, T. IX, P. II; Fasc. 148-149, T. XXXIII, P. I; Fasc. 150, T. VIII, P. III. Città di Castello, 1916; 4°.

— Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della Nuova edizione dei " Rerum italicarum scriptores „. Città di Castello, 1916, fasc. 17-18; 4°.

Nallino (C. A.). Un Mappamondo arabo disegnato nel 1579 da 'Alî ibn Ahmad al-Shara di Sfax. Roma, 1916; 8° (*dall'A.*).

— I. Di una strana opinione attribuita ad al-Gāhiz intorno al Corano. II. Sull'origine del nome dei Mu'taziliti. III. Rapporti fra la dogmatica mu'tazilita e quella degli Ibāditi dell'Africa settentrionale. IV. Sul nome di " Qadariti „. Roma, 1916; 8° (*id.*).

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della libreria italiana. Indice per materie. Vol. III, Puntate 3, 4. Milano; 4°.

Patetta (F.). A proposito del mosaico medioevale scoperto a Torino nel marzo del 1909. Torino, 1916; 8° (*dall'A. Socio naz. residente dell'Accad.*).

Plauti (T. M.) Stichus. (Ad codicis Ambrosiani praecipue fidem edidit, appendicem criticam addidit C. O. Zuretti) (Vol. 6° del Corpus scriptorum latinorum Paravianum) (*dono della Ditta G. B. Paravia e C.*).

Rivera (G.). L'invasione francese in Italia e l'Abruzzo aquilano dal 1792 al 1799. Aquila, 1907; 8° (*dall'A.*).

Sabbadini (R.). Epistolario di Guarino Veronese. Vol. II, testo. Venezia, 1917; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Salvioni (C.). Note di dialettologia corsa. Pavia, 1916; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— Dell'elemento germanico nella lingua italiana a proposito di un libro recente. Milano, 1917; 8° (*id.*).

— Ladinia e Italia. Discorso. Pavia, 1917; 8° (*id.*).

Stampini (E.). Commemorazione degli Studenti caduti per la Patria fatta nell'Aula Magna della R. Università il giorno 25 marzo 1917. Torino, 1917; 8° (*dall'A. Accademico Segretario dell'Accademia*).

Taciti (*Cornelii*) De vita Iulii Agricolae (Recensuit, praefatus est, appendice critica instruxit Caesar Annibaldi) (Vol. 7° del Corpus scriptorum latinorum Paravianum) (*dono della Ditta G. B. Paravia e C.*).

— Dialogus de oratoribus. Recensuit, praefatus est, appendice critica et indicibus instruxit Fridericus Carolus Wick (*id.*).

** **Treitschke** (H. von). History of Germany in the 19th Century. London, 1915-1916; 2 vol. 8°.

Venne il dì nostro e vincere dobbiamo. Milano, 1917; 8° (*omaggio del " Credito Italiano "*).

Vergilii (*P. Maronis*) Bucolicon liber. Accedunt carmina Moretum, Copa, falso Vergilio attributa (Recensuit, praefatus est, appendice critica instruxit Carolus Pascal) (Vol. 9° del Corpus scriptorum latinorum Paravianum) (*dono della Ditta G. B. Paravia e C.*).

Vidari (G.). Il corso popolare come scuola di preparazione generica alla vita operaia. Como, 1916; 8° (*dall'A. Socio naz. residente dell'Accad.*).

— Elementi di Etica, 4ª edizione. Milano, 1917; 16° (*Id.*).

Zocco-Rosa (A.). Rassegna sintetica di studi monografici. Roma, 1917; 8° (*dall'A.*).

CLASSI UNITE

Adunanza del 19 Novembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Balbiano, Panetti, Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Chironi, Vice-Presidente dell'Accademia, Carle, Pizzi, Stampini, D' Ercole, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato. — Scusa l'assenza il Socio Brondi.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente 28 maggio 1916, il Presidente dà comunicazione dei Decreti Luogotenenziali con cui sono approvate le elezioni del Socio Camerano a Presidente e del Socio Chironi a Vice-Presidente dell'Accademia per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Indi pronuncia le seguenti parole:

“ Noi riprendiamo i nostri lavori in un'ora grave e solenne per la Patria, mentre aspra ferve la lotta per la redenzione dei fratelli e per la rivendicazione del diritto d'Italia e mentre il soldato italiano fa rifulgere il valore e l'eroismo della nostra gente.

“ Vada il nostro saluto di ammirazione e gratitudine a S. M. il Re, all'esercito e all'armata che con ardimento mirabile

combattono per il compimento della Patria, e un saluto vivissimo inviamo a S. E. Paolo Boselli e a S. E. Francesco Ruffini, che l'Accademia nostra è orgogliosa di annoverare fra i suoi soci, i quali, con tutte le forze, cooperano dal Governo al conseguimento della vittoria.

" In questa aula, da oltre cento anni, si riuniscono assiduamente i cultori della scienza, tutti concordi in un solo intento, la conoscenza del vero. L'opera del nostro Sodalizio proseguì sempre attiva e serena anche quando, fuori, imperversava la furia delle passioni umane. Con non minore serenità ed energia dobbiamo continuarla oggi e, fra il turbine orrendo che si è scatenato sull'Europa, seminatore di dolori e di ruine, dobbiamo mantenere salda la fede nell'avvenire della scienza e nel progresso dell'umanità.

" Si dice, giustamente, che la scienza è universale, che non conosce diversità di popoli, di razze, di nazionalità, che i suoi cultori lavorano tutti per raggiungere un comune altissimo fine. Ma da taluno si teme che l'estendersi della ricerca scientifica e il suo progredire conducano a scemare nei suoi cultori l'ideale della patria di fronte all'ideale dell'umanità. No, il sentimento della patria non si cancella ed anche nel lavoro comune per la conoscenza del vero, il pensiero della salute e della grandezza della patria è sempre nel cuore e nella mente di tutti.

" La scienza è uno fra i più nobili motori di alte gesta umane, educa e migliora i suoi cultori e sa infondere in essi il fuoco sacro che li spinge alla abnegazione e al sacrificio per gli alti ideali.

" Quando l'Italia, or è più di un anno, chiamò tutti i suoi figli al fiero cimento, i nostri giovani cultori della scienza, mossi da forte e profondo amore di patria furono fra i primi ad accorrere volenterosi; e non soltanto i giovani accorsero, ma anche uomini già innanzi negli anni.

" Essi abbandonarono i loro studi e le loro ricerche per rispondere alla voce della Madre comune, essi senza iattanza combattono da valorosi, essi con romana semplicità e grandezza dànno la loro vita. Eppure a tutti sorrideva la speranza di poter accrescere colle fatiche loro il patrimonio comune del sapere, eppure a non pochi un brillante avvenire nel campo scientifico era già più che una speranza.

“ La nostra Accademia si inchina riverente innanzi alla valorosa schiera e rivolge ai caduti un memore, commosso saluto. — A coloro che ancora combattono, invia il caldo augurio che possano godere della vittoria d'Italia. — Dall'esempio della loro virtù e del loro eroismo l'Accademia nostra trae nuovo incitamento a proseguire con tutto l'ardore nella via che le è segnata: il progresso della scienza per il bene dell'umanità, per la maggiore gloria della Patria „.

L'Accademia accoglie con vivo plauso le parole del Presidente, e dà incarico a questo d'inviare in nome di essa telegrammi di ossequi, d'ammirazione e d'augurio a S. M. il Re, a S. A. R. il Duca degli Abruzzi, alle LL. EE. Cadorna, Boselli e Ruffini.

Il Presidente ricorda che il Socio Parona ha avuto ultimamente la sciagura di perdere in guerra un suo figlio, ed esprime le vivissime condoglianze di tutti gli accademici al loro amato Collega. Questi ringrazia, commosso.

La Società Leonardo da Vinci, di Firenze, ha inviato un invito a partecipare ad una protesta contro i reiterati bombardamenti di Venezia e in generale contro i sistemi del nostro nemico di accanirsi contro le opere d'arte. L'Accademia unanime si associa a quella protesta.

Essendo scaduto col 1° Luglio scorso dalla carica di Tesoriere, per compiuto 1° triennio, il Socio Einaudi, si procede alla votazione per la nomina del Tesoriere per il nuovo triennio e riesce rieletto il Socio Luigi Einaudi salvo l'approvazione sovrana.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Ettore Stampini.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Novembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Balbiano, Panetti, e Segre, Segretario.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente partecipa le perdite fatte dalla Classe, durante le ferie accademiche, dei Soci corrispondenti Metchnikoff e Ramsay.

Il Socio Balbiano legge su *L'opera sperimentale di Guglielmo Ramsay* una Nota commemorativa che verrà inserita negli *Atti*.

Il Socio straniero Darboux ha inviato in omaggio un suo *Mémoire sur une classe de surfaces de quatrième classe qui sont corrélatives des surfaces du quatrième ordre à conique double et admettent pour courbe double le cercle de l'infini.*

Il Socio Guareschi offre un suo opuscolo su *La sintesi chimica*, e ne trae occasione per svolgere alcune considerazioni, a cui si collega uno scritto che presenta per gli *Atti*, col titolo *Centenario della nascita di Charles Gerhardt.*

Vengono ulteriormente presentati per l'inserzione negli *Atti* i seguenti scritti:

G. Sannia, *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie*, dal Socio D'Ovidio;

F. Insolera, *Su una relazione fra l'annualità vitalizia di gruppo e l'annualità semplice nell'ipotesi di Makeham*, pure dal Socio D'Ovidio;

C. Guidi, *Sollecitazioni sull'armatura dell'ala di un biplano in linea di volo, prodotte dal sostegno dell'aria*;

L. Viriglio, *I segni numerali romani*, dal Socio Peano;

A. Padoa, *Corrispondenze duali* (*), dallo stesso Socio;

A. Campetti, *Sopra alcuni equilibrii binari*, dal Socio Naccari;

B. Rainaldi, *La durata dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino nel sessennio 1899-1905*, 2ª Parte, pure dal Socio Naccari;

P. Barreca, *Circa la sezione a minima resistenza ohmica nei rocchetti fissi degli elettro-dinamometri conassiali*, dal Socio Grassi;

F. Sibirani, *Intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi*, dal Socio Somigliana;

E. Pistolesi, *Studio sull'uniformità di movimento dei motori a combustione a 6 e 8 cilindri*, dal Socio Panetti.

Costituitasi quindi la Classe in seduta privata, procede alla votazione per l'elezione del suo Segretario, essendo scaduto per compiuto secondo triennio il Socio Segre, e riesce eletto il Socio Carlo Fabrizio Parona per un nuovo triennio.

Si procede poscia alla votazione per la nomina della Commissione pel premio Vallauri per le scienze fisiche, quadriennio 1915-1918, e sono nominati a comporre la Commissione i Soci Naccari, Somigliana, Grassi e Balbiano.

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

LETTURE

Rendimento dei rotismi epicicloidali con un asse principale fisso.

Nota del Socio MODESTO PANETTI (*).

I. Estensione dello studio dinamico dei rotismi.

1. — Nella Nota precedente sul problema dinamico dei rotismi epicicloidali si è discusso il comportamento ideale di questi rotismi, prendendo specialmente in esame il caso del porta-treno movente e dei due assi-ruota cedenti.

L'enunciato del n° 6 è redatto però nei termini più generali.

Si può di fatto estendere immediatamente la dimostrazione al caso in cui l'energia meccanica giunga al rotismo per mezzo di uno dei due assi principali, e siano cedenti l'altro asse ed il porta-treno. In vero l'equazione dei lavori (3ª della Nota precedente) e le (4) e (5) che da essa derivano sono sempre soddisfatte qualunque sia l'ufficio dei tre mobili del sistema.

Nella ipotesi presente poi i prodotti

$$M_1 \omega_1 \qquad \text{ed} \qquad M_2 \omega_2$$

devono avere segno opposto, esprimendo uno di essi (per esempio il 1°) un lavoro motore e l'altro un lavoro resistente.

Quindi, se nella formola di Willis (la 1ª della Nota precedente) a e b hanno segni contrari, devono, per le (4), avere segni opposti M_1 ed M_2, ed i versi delle rotazioni degli assi corrispondenti concorderanno, ossia ω_1 ω_2 avranno lo stesso segno.

Se invece a e b hanno ugual segno, ω_1 ed ω_2 saranno di segno opposto.

In ogni caso dunque, nella presente ipotesi,

$$a\,\omega_1 \qquad \text{e} \qquad b\,\omega_2$$

(*) Nota presentata nell'adunanza dell'11 giugno 1916.

hanno segni contrari, quindi Ω è uguale alla differenza dei loro valori assoluti. Esso raggiunge il suo massimo quando uno dei termini della differenza si annulla. E poichè non si può annullare la velocità ω_1 del movente senza che il rotismo cessi di agire, avremo in valore assoluto

$$\max \Omega = a \omega_1 \qquad \text{quando} \qquad \omega_2 = 0 .$$

In tutti gli altri casi sarà

$$(7) \qquad \Omega = \frac{a \omega_1}{n} \qquad \omega_2 = -\frac{a}{b} \frac{n-1}{n} \omega_1 ,$$

essendo $n > 1$.

D'altra parte dalle (4) della 1ª Nota risulta

$$(8) \qquad M = -\frac{M_1}{a} \qquad M_2 = -bM = \frac{b}{a} M_1 ,$$

quindi i lavori disponibili sui cedenti saranno

$$(9) \qquad -\frac{1}{n} M_1 \omega_1 \qquad -\frac{n-1}{n} M_1 \omega_1 ,$$

rispettivamente sul porta-treno e sul 2° asse.

Concludendo: anche in questo caso il grado di riduzione della velocità su di un asse condotto trae di conseguenza la parzializzazione nel medesimo rapporto della potenza meccanica disponibile sull'asse stesso, come afferma l'enunciato del n° 6 della Nota precedente.

2. — La generalità della proposizione enunciata risulta del resto in modo più sintetico ponendo la relazione di Willis in forma omogenea, tale da escludere ogni distinzione fra i tre mobili, di cui si considerano le velocità angolari ω_1 ω_2 ω_3.

È infatti lecito scriverla come segue:

$$(10) \qquad u \omega_1 + v \omega_2 + w \omega_3 = 0$$

ponendo la condizione

$$(11) \qquad u + v + w = 0 ,$$

come si deduce dalla (1) della 1ª Nota, trasportandovi tutti i termini nello stesso membro e moltiplicandone i coefficienti per un medesimo fattore arbitrario. Così modificata, la formola di Willis ha il vantaggio di esprimere subito col quoziente di due suoi coefficienti il rapporto di trasmissione cambiato di segno fra il mobile corrispondente al coefficiente numeratore e quello corrispondente al coefficiente denominatore, quando si tiene fermo il 3° mobile.

Ad esempio:

$$\text{(12)} \qquad \text{per } \omega_3 = 0 \qquad \frac{u}{v} = -\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Supposto poi che il mobile 3 sia il porta-treno, $-\frac{u}{v}$ diventa il rapporto ordinario τ del rotismo, considerata la 1 come movente e la 2 come cedente, sicchè la (10) si può scrivere come segue:

$$\text{(13)} \qquad \tau\omega_1 - \omega_2 + (1 - \tau)\,\omega_3 = 0.$$

Ne risultano subito i rapporti corrispondenti ai diversi modi di operare del rotismo.

Sia, ad esempio, fissa la 1ª ruota,

$$\text{(14)} \qquad \omega_1 = 0 \qquad \frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{v}{u} = \frac{1}{1-\tau}.$$

Sia in vece fissa la ruota 2

$$\text{(15)} \qquad \omega_2 = 0 \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{u}{w} = -\frac{\tau}{1-\tau}$$

come è noto.

3. — Chiamando ora M_1 M_2 M_3 i momenti operanti dall'esterno sui mobili 1 2 3 col loro valore algebrico, il teorema dei lavori, applicato al comportamento ideale, permette di scrivere

$$\text{(16)} \qquad M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + M_3\omega_3 = 0.$$

Ma questa equazione non deve aggiungere alcuna condizione nuova fra le tre velocità dei mobili del rotismo, che sono sempre

e solamente soggette alla (10). Quindi i coefficienti della (16) devono essere proporzionali a quelli della (10), ossia

$$M_1 : u = M_2 : v = M_3 : w. \tag{17}$$

La ragione meccanica di queste uguaglianze risiede nel fatto che si considera il funzionamento *a regime* di un meccanismo, il cui grado di mobilità è uguale a 2. Si devono adunque poter scrivere due equazioni esprimenti le condizioni di equilibrio del sistema. Come nel caso particolare esaminato nella Nota precedente (nn. 3 e 4) possiamo dedurre tali condizioni, considerando il sistema vincolato ulteriormente da legami, che non contraddicono quelli che già esistono.

In un primo caso supponiamo il rotismo irrigidito. Essendo paralleli gli assi dei tre mobili coi quali coincidono i momenti vettori, la condizione di equilibrio si riduce a

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \tag{18}$$

In un secondo caso fissiamo uno dei suoi mobili, il 3°, per esempio. Allora per l'equilibrio dev'essere

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 = 0,$$

e quindi per la (12)

$$M_1 : u = M_2 : v. \tag{19}$$

Le condizioni (18) e (19) sono anche condizioni di equilibrio del rotismo nello stato ordinario dei suoi legami. Ma da esse, tenendo conto della (11), si deducono le (17). Invero la (11) e la (18) permettono di scrivere

$$M_3 : w = (M_1 + M_2) : (u + v),$$

mentre dalla (19) componendo si ha

$$M_1 : u = (M_1 + M_2) : (u + v),$$

e dalla combinazione di queste con la (19) discendono le (17). Inversamente dalle (17) si deducono le (18) e (19).

4. — La maggiore generalità delle formole qui dedotte permette di estendere ulteriormente lo studio cinematico e dinamico di questi rotismi.

Anzitutto dal punto di vista cinematico si possono considerare gli *aggruppamenti* di due o più di essi.

Si colleghino rigidamente due mobili di un rotismo A con due di un rotismo B, pei quali, considerati separatamente, sussistano le relazioni di Willis

$$(20) \quad \begin{cases} u_A \omega_1 + v_A \omega_2 + w_A \omega_3 = 0, & \text{dove} \quad u_A + v_A + w_A = 0, \\ u_B \omega_4 + v_B \omega_5 + w_B \omega_6 = 0, & \text{"} \quad u_B + v_B + w_B = 0. \end{cases}$$

Esprimiamo la condizione del collegamento anzidetto, uguagliando rispettivamente 2 velocità del primo rotismo a 2 del secondo; e poichè le formole (20) non fanno alcuna distinzione fra i diversi uffici dei 3 mobili di ciascun rotismo, non menomiamo la generalità della posizione scegliendo le prime 2 di ciascun trinomio, ponendo cioè:

$$(21) \qquad \omega_4 = \omega_1 \qquad \omega_5 = \omega_2 .$$

Il sistema che ne risulta ha tuttavia un grado di mobilità uguale a 2, come un comune rotismo epicicloidale, essendovi 4 condizioni fra le 6 velocità considerate. Dalle 4 condizioni possiamo eliminare 3 velocità (per esempio ω_1 ω_4 ω_5), ricavando la seguente condizione fra le 3 altre:

$$(22) \qquad \omega_2 (v_A u_B - u_A v_B) + \omega_3 w_A u_B - \omega_6 u_A w_B = 0 .$$

Questa relazione ha i caratteri della formola di Willis. In vero, essa è lineare, e la somma algebrica dei suoi 3 coefficienti è uguale a zero, come si deduce dalla analoga condizione fra le due terne dei coefficienti delle (20).

Dunque *l'aggruppamento di due rotismi epicicloidali, eseguito congiungendo rigidamente due mobili dell'uno con due dell'altro, costituisce un meccanismo che ha gli stessi caratteri cinematici di un semplice rotismo epicicloidale, e si potrà sempre ideare un tale rotismo che equivalga al complesso dei due insieme collegati.*

5. — Consideriamo ad esempio un *differenziale* con ruote coniche ed un *ritardo* costituito di 4 ruote cilindriche (fig. 1) e sia collegata rigidamente dall'albero xx una delle ruote fondamentali del 1° con una di quelle del 2°. Siano inoltre uniti rigidamente insieme il porta-treno del differenziale con l'altra ruota fondamentale del ritardo. La numerazione dei 6 mobili è fatta in modo di poter applicare le formole generali del n° precedente, e in particolare le (21), dati i collegamenti dichiarati.

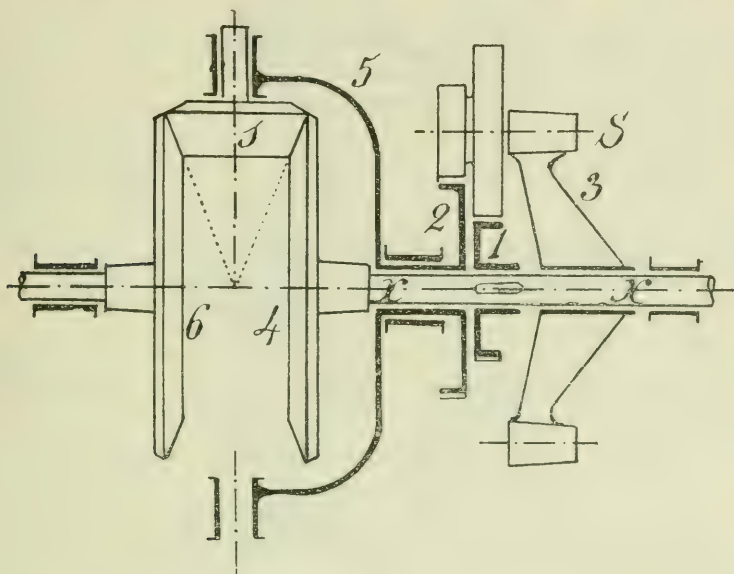



Fig. 1.

Sia τ il rapporto ordinario del ritardo, ossia il rapporto di trasmissione fra la ruota 1 e la 2 fissato il porta-treno 3. L'equazione di Willis relativa diventa la (13).

D'altra parte per il differenziale con ruote coniche, tenuto conto dei suoi collegamenti col ritardo (formole 21), si ha:

$$\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_6 = 0 . \tag{23}$$

Combinando le due uguaglianze in modo di eliminare ω_1 risulta:

$$(2\tau - 1)\,\omega_2 - \tau\omega_6 + (1 - \tau)\,\omega_3 = 0 ,$$

che è l'equazione di un altro ritardo di rapporto ordinario

$$\frac{2\tau - 1}{\tau}.$$

Questo nuovo rotismo equivale dunque al complesso degli altri due congiunti, come è stato detto.

6. — Le conclusioni dedotte, esaminando l'effetto del collegamento di due rotismi epicicloidali, si estendono subito al caso di quanti si vogliano rotismi riuniti in modo di costituire un complesso con assi fondamentali paralleli e con grado di libertà uguale a 2. Basterà infatti ripetere i ragionamenti fatti, passando da 2 a 3, da 3 a 4, da n ad $n+1$ rotismi collegati.

Siamo dunque in grado di escludere la possibilità di soluzioni nuove con la riunione di più rotismi eseguita nel modo dichiarato, alla quale si estende per conseguenza l'enunciato del n° 6 della Nota precedente.

7. — Si può tuttavia pensare ad un altro modo di agire di un rotismo epicicloidale, quando si effettui l'accoppiamento di due dei suoi mobili come elementi coniugati di un freno, la cui azione si farebbe quindi sentire in sensi opposti su di essi.

Stabilito l'ufficio di movente per l'asse 1 e di cedente per l'asse 2, il freno si può inserire fra 1 e 3 (fig. 2), ovvero fra 2 e 3. Detto m il momento applicato al mobile 3 per effetto della azione frenante, e quindi $-m$ il momento attivo sul movente nel 1° caso e sul cedente nel 2°, si hanno rispettivamente le due seguenti equazioni dei lavori

$$M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + m(\omega_3 - \omega_1) = 0,$$
$$M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + m(\omega_3 - \omega_2) = 0,$$

onde l'un caso si deduce dall'altro scambiando gli indici 1 e 2.

Fermiamo la nostra attenzione sul 1° di essi e scriviamo nuovamente l'equazione dei lavori aggruppando i termini contenenti le stesse velocità, risulta:

$$(M_1 - m)\,\omega_1 + M_2\omega_2 + m\,\omega_3 = 0. \tag{24}$$

Questa equazione deve coesistere con la (10) esprimente la proprietà cinematica del rotismo senza aggiungere nuove condizioni fra le velocità dei tre mobili; ciò per le stesse ragioni esposte al n° 3.

Quindi i coefficienti della (24) devono essere proporzionali a quelli della (10), ossia

$$(M_1 - m) : u = M_2 : v = m : w .$$

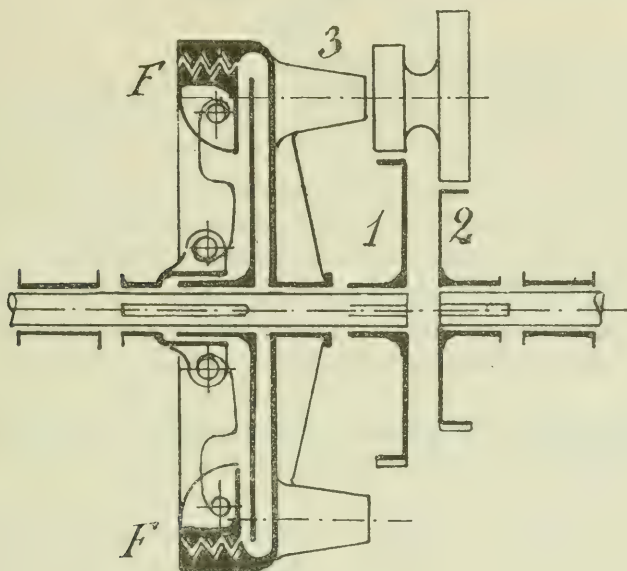



Fig. 2.

Se ne deduce, sempre con l'uso della (11),

$$M_2 = - M_1 \qquad m = - \frac{w}{v} M_1 . \tag{25}$$

La prima di queste equazioni esprime la condizione di equilibrio del rotismo reso rigido. In vero, le due azioni m — m sviluppate dal frenamento sui due mobili accoppiati si elidono. La seconda esprime la condizione di equilibrio del rotismo in cui si tenga fermo l'asse 1. Si ha di fatto

$$M_2 \omega_2 + m \omega_3 = 0 ,$$

e, tenuto conto della (10) nonchè della 1ª delle (25), si deduce la 2ª.

Anche in questo speciale uso dei rotismi epicicloidali i momenti attivi stanno dunque in rapporti determinati, indipendenti dalle velocità dei mobili: quindi il lavoro raccolto sul cedente e quello disperso dal freno sono proporzionali alle rispettive velocità ω_2 ed $\omega_3 - \omega_1$, e valgono

$$-M_1 \omega_2, \tag{26}$$

$$-\frac{w}{v} M_1 (\omega_3 - \omega_1), \tag{27}$$

e la loro somma uguaglia appunto $-M_1 \omega_1$.

L'espressione (27) del lavoro disperso dal freno può lasciar credere che, scegliendo un rotismo pel quale $\frac{w}{v}$ sia assai piccolo (*), si possa ridurre al minimo detto lavoro, pur facendo variare entro larghi limiti la velocità ω_2 del cedente.

Ma evidentemente l'espressione (26) del lavoro resistente contraddice questa ipotesi, poichè dimostra che esso varia proporzionalmente alla velocità del cedente, essendo l'altro fattore del prodotto, il momento motore M_1, costante. Ne discende che, anche con questa diversa applicazione dei rotismi epicicloidali, è impossibile dare una soluzione vantaggiosa al problema della trasmissione con rapporto variabile di velocità.

8. — Esaminando più da vicino il comportamento del meccanismo, si noti anzitutto che, essendo i momenti motore e resistente di segno opposto (formola 25), le velocità corrispondenti ω_1 ed ω_2 hanno ugual segno.

Possiamo quindi supporle entrambe positive, e sarà sempre

$$\omega_1 \geq \omega_2,$$

come risulta dall'espressione (26) del lavoro resistente, che non può superare il lavoro motore.

Si debbono poi distinguere due casi, corrispondenti a due tipi possibili di rotismo:

(*) Tale sarebbe, come risulta dalla (13), il caso di un ritardo con rapporto ordinario di trasmissione τ assai prossimo all'unità.

Il *1° tipo* è quello pel quale u e w sono del medesimo segno, e quindi m (formola 25) ha segno opposto ad M_1, ossia, per l'ipotesi fatta sui segni della velocità,

$$m < 0, \qquad \text{quindi} \qquad \omega_3 - \omega_1 > 0.$$

Di conseguenza anche $\omega_3 > 0$ e di più $\omega_3 > \omega_1$.

Il *2° tipo* si ha quando u e w sono di segno contrario. Allora

$$m > 0, \qquad \text{quindi} \qquad \omega_3 < \omega_1.$$

Se poi u ha lo stesso segno di v, dev'essere $\omega_3 > 0$. Se invece u e v sono di segno opposto, ω_3 può essere tanto positivo quanto negativo.

Così, ad esempio, un *ritardo* costituito di 4 ruote cilindriche e definito cineticamente dalla (13), è un rotismo del 1° tipo se delle due ruote ad asse fisso è conduttrice la maggiore (fig. 2).

Di fatto in tal caso $\tau > 1$ e quindi i coefficienti di ω_2 e di ω_3 hanno lo stesso segno (negativo per entrambi). Se invece è conduttrice la ruota minore, il rotismo appartiene al 2° tipo.

9. — Come al solito, il problema del regime delle velocità rimane indeterminato se non si crea una legge di dipendenza fra una delle velocità stesse e il corrispondente momento.

In questo caso tale dipendenza si dovrebbe stabilire fra il momento frenante m e la velocità relativa $\omega_3 - \omega_1$ degli elementi coniugati del freno.

Per esempio, con un freno idraulico si potrà ottenere

$$m = -\frac{w}{v} M_1 = \mu (\omega_3 - \omega_1)^2, \tag{28}$$

essendo μ una costante dello stesso segno di m, che rappresenta il momento sviluppato dal freno quando la velocità angolare relativa dei suoi due elementi è uguale ad 1. Daremo a questa costante il nome di *momento specifico del freno*, e lo supporremo modificabile a volontà entro limiti assai discosti. Per ogni suo valore, dalla (28), date le caratteristiche cinematiche del rotismo, il suo momento motore M_1 e la velocità angolare del movente ω_1 si deduce ω_3. Poi con la formola di Willis si calcola ω_2.

Se $\mu = \infty \qquad \omega_3 = \omega_1 \qquad \omega_2 = \omega_1$,

il rotismo epicicloidale si blocca per il collegamento rigido di due suoi mobili e si trasforma in un giunto: il cedente ha raggiunto la massima sua velocità uguale a quella del movente, e raccoglie tutto il lavoro disponibile, poichè il freno non ne disperde.

Per ridurre invece la velocità ω_2 del cedente nel rapporto $\epsilon = \frac{1}{n}$ del suo massimo valore ω_1, dovrà la velocità del 3° mobile diventare uguale a

$$\omega_3 = - \frac{u + \epsilon r}{w} \omega_1 ,$$

ossia aumentare nei rotismi del 1° tipo e diminuire in quelli del 2°, come fu dimostrato.

In corrispondenza il momento specifico del freno dovrà ridursi al valore

$$\mu = - \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \left(\frac{w}{v}\right)^3 \frac{M_1}{\omega_1^2} ,$$

impicciolendosi tanto più quanto più grande è la parzializzazione desiderata nella velocità del cedente, ossia quanto più piccola è la frazione ϵ, fino al valore minimo

$$\mu = - \left(\frac{w}{v}\right)^3 \frac{M_1}{\omega_1^2} ,$$

pel quale $\omega_2 = 0$, come è facile verificare direttamente per mezzo delle formole (28) (10) e (11).

Al di sotto di questo valore ω_2 cambierebbe segno, se la resistenza utile fosse capace di trasformarsi in forza motrice provocando il moto retrogrado del cedente.

II. Rendimento dei rotismi epicicloidali.

10. – Vogliasi ora studiare il comportamento dei rotismi epicicloidali, tenendo conto delle resistenze di attrito.

Premettiamo alcune considerazioni sul modo di agire di una coppia di ruote dentate, non per esporre fatti nuovi, ma per

enunciare quelli noti sotto una forma atta allo scopo che ci proponiamo. La forza (F) che le due ruote A e B si trasmettono

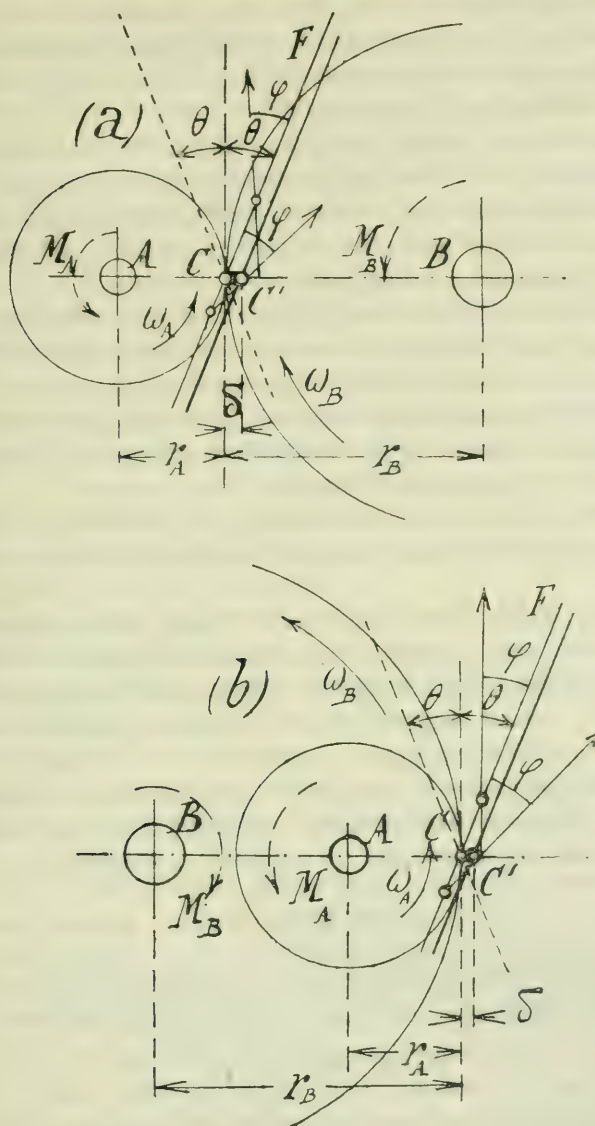



Fig. 3.

(fig. 3), diretta nel funzionamento ideale secondo la normale di contatto ai profili coniugati e passante per il punto C di tan-

genza delle primitive, è una forza *interna* al meccanismo. Come tale si può considerarla o proveniente dal corpo della dentatura A ed applicata a B, ovvero come proveniente dal corpo della dentatura B ed applicata ad A. Per corpo di una dentatura intenderemo quello interno alla primitiva nelle ruote ordinarie e quello esterno nelle ruote anulari.

Due direzioni uscenti da C potrebbero essere assunte come rette d'azione della forza interna considerata: sono quelle che formano con la retta dei centri da parti opposte angoli uguali al complemento dell'obliquità θ della dentatura, costante nei profili ad evolvente, variabile in quelli cicloidali.

La scelta fra le direzioni suddette non può essere ambigua se si conoscono i sensi dei momenti applicati dall'esterno delle due ruote. In vero, la forza che emana da una ruota e agisce sull'altra deve avere rispetto all'asse della prima momento dello stesso segno di quello dell'azione esterna e rispetto all'asse della seconda momento di segno opposto.

Ora una sola delle due direzioni può soddisfare a questa condizione; tale direzione fu segnata nelle fig. 3 a linea intera.

11. — Diremo *attivi* i momenti M_A ed M_B applicati dall'esterno alle ruote, poichè ad essi spetta l'ufficio di sviluppare lavoro. La ruota A per la quale momento attivo M_A e velocità angolare ω_A hanno lo stesso segno è motrice, perchè il suo lavoro $M_A \omega_A$ è positivo. L'altra è condotta.

Nel funzionamento ideale, ossia trascurando le resistenze passive, il rapporto del momento motore al momento resistente è uguale e di segno opposto al rapporto di trasmissione

$$\tau = \omega_B / \omega_A . \tag{29}$$

Nel funzionamento effettivo il rapporto dei momenti è uguale e di segno opposto al rapporto τ diviso per il rendimento η

$$M_A : M_B = -(\tau : \eta) , \tag{30}$$

ed essendo $\eta < 1$, il momento motore risulta aumentato rispetto al momento resistente.

Se si trascura il lavoro perduto nei perni, la perdita di rendimento per attrito risiede tutta nella *deviazione della forza in-*

terna dalla normale di contatto, la quale *avviene sempre in modo che la intersezione* C' *della sua retta d'azione con la retta dei centri sia spostata rispetto al contatto* C *delle primitive dalla parte del corpo dellā ruota condotta.* La regola è facile a verificare trattando i singoli casi; ma si conferma più agevolmente ancora col fatto che l'alterazione del momento M_A rispetto ad M_B avviene appunto nel senso dichiarato.

In vero, se si tratta di ruote esterne, lo spostamento accresce in valore assoluto il braccio relativo alla motrice e diminuisce quello relativo alla condotta; occorre dunque un maggior momento motore per fare equilibrio ad un minor momento resistente. Se si tratta di una coppia dentata interna (fig. 3 *b*), nella quale sia conduttore il rocchetto, lo spostamento, verificandosi verso il corpo della ruota anulare, riesce esterno ad entrambe le primitive e quindi in aumento al valore assoluto dei due raggi. Ma il rapporto del raggio conduttore r_A al raggio condotto r_B è in questo caso minore dell'unità, quindi aumentandoli contemporaneamente nella stessa misura si fa crescere il loro rapporto, ossia anche in questo caso si aumenta il momento motore rispetto a quello resistente.

Se poi nella coppia dentata interna è conduttrice la ruota anulare, lo spostamento si verifica verso il corpo del rocchetto. ossia internamente ad entrambe le primitive, e quindi in diminuzione del valore assoluto dei due raggi.

Qui, essendo il loro rapporto maggiore di uno, la diminuzione simultanea ed in ugual misura dei termini aumenta il quoziente, e la conclusione è quindi sempre la stessa.

12. — Ma lo spostamento dovuto all'attrito varia in modo continuo durante l'ingranamento, diminuendo da un massimo a zero nell'accesso, ossia nella fase che si svolge prima che il contatto abbia raggiunto la posizione media C, e crescendo poi da zero ad un altro massimo nel recesso. Simultaneamente la retta d'azione passa dalla inclinazione in un senso all'inclinazione in senso opposto rispetto alla normale di contatto.

Conviene quindi considerare uno spostamento δ costante, capace di produrre la stessa perdita di rendimento, e scrivere

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{r_A + \delta}{r_B - \delta} = - \frac{\tau}{\eta}, \tag{31}$$

notando che, per rendere generale la applicabilità della formola, bisogna ritenere il segno di δ e di r_B uguale a quello di r_A, o contrario ad esso, secondochè, percorrendo la punteggiata $ACC'B$, si descrivono i due primi segmenti nel senso del 3° o in senso opposto.

E di fatto, per gli ingranamenti interni, se è conduttore il rocchetto, $\delta > 0$ ed $r_B < 0$, quindi il denominatore del 2° membro diventa una somma. Se è conduttrice la ruota anulare, $\delta < 0$ ed $r_B < 0$, quindi tanto il numeratore quanto il denominatore del 2° membro sono differenze, come è stato osservato nel precedente numero.

Non terremo in vece conto della inclinazione della retta d'azione sulla normale di contatto perchè priva d'influenza, se si trascura, come dichiarammo, l'attrito nei perni, ed anche perchè tale inclinazione si verifica nelle due fasi dell'ingranamento in sensi opposti.

In conclusione: lo spostamento della retta d'azione per effetto dell'attrito si può supporre ridotto ad una semplice traslazione δ nella direzione della retta dei centri verso il corpo della ruota condotta.

13. — Si consideri ora (fig. 4) una coppia di ruote ingrananti (1) e (2), la seconda delle quali è portata da un braccio girevole intorno all'asse della prima. Tale gruppo fa parte di ogni rotismo epicicloidale, del quale la (1) è una ruota principale, la (2) è un satellite.

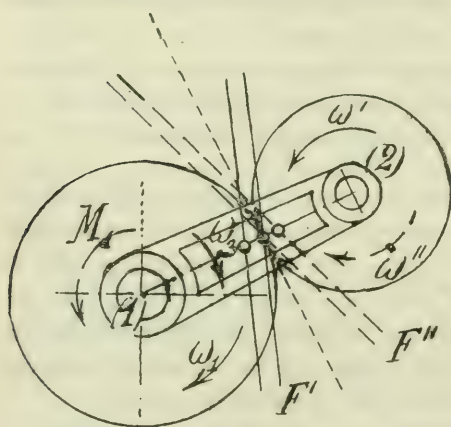



Fig. 4.

La (1) abbia il carattere di cedente, ossia il momento attivo su di essa abbia segno opposto alla velocità angolare ω_1. Il satellite (2) che la spinge compirebbe il suo ufficio, anche se fosse saldato al braccio, nel qual caso le comunicherebbe la velocità ω_3 del braccio stesso. Essendo allora escluso ogni strisciamento fra le dentature, non vi sarebbe per-

dita di effetto utile. Ma il satellite può anche possedere un moto proprio di velocità ω' rispetto al braccio.

La (1) in conseguenza acquista una nuova velocità $t\omega'$ se t è il rapporto ordinario del satellite alla ruota, e perciò la velocità risultante della (1) è

$$\omega_1 = \omega_3 + t\omega'. \tag{32}$$

Nel caso di ruote esterne t è negativo, quindi se la velocità propria del satellite è opposta a quella del braccio, la ruota (1) cammina più celere: se in vece ha lo stesso segno, la (1) cammina più lenta, e può anche arrestarsi, o girare in senso contrario, se $t\omega'$ in valore assoluto uguaglia o supera ω_3.

L'attrito fa sentire la propria azione soltanto per questo supplemento positivo o negativo della velocità della ruota, poichè, soltanto per esso, le dentature ingrananti si sviluppano l'una sull'altra.

Ma tale supplemento non è altro che il moto relativo della ruota rispetto al braccio di velocità

$$\omega_1 - \omega_3 = t\omega'.$$

Dunque, *per applicare ai rotismi epicicloidali le considerazioni svolte nei precedenti numeri e la formola* (31) *che le riassume, bisogna considerare il solo moto relativo al porta-treno,* e decidere per mezzo di esso se una ruota abbia il carattere di movente o di cedente, all'effetto di attribuire al momento attivo su di lei o sulla sua coniugata il coefficiente di riduzione rappresentato dal rendimento.

Ma questo nuovo carattere nulla ha di assoluto; può anzi essere in opposizione col vero carattere meccanico della ruota, se si verificasse che nel moto assoluto e nel moto relativo i sensi della rotazione fossero opposti. Nell'esempio considerato ciò succederebbe quando ω_1 e $t\omega'$ sono di segno contrario (caso della freccia con linea a tratti nella fig. 4), ossia quando il satellite gira nello stesso senso del braccio, ma con velocità ω'' insufficiente per dare alla ruota (1) moto retrogrado rispetto al braccio stesso.

Allora la ruota (1) che supponemmo condotta si comporta nel moto relativo al porta-treno e rispetto alla sua coniugata

come conduttrice: in fatti si muove nel verso del momento attivo, e d'altra parte il moto di sviluppo di una dentatura sull'altra avviene appunto, come è facile verificare, in senso opposto a quello che si presumerebbe pensando la (1) come condotta e girante nel senso del suo moto assoluto.

Per evitare confusioni distingueremo d'ora innanzi l'ufficio di due ruote accoppiate, agli effetti della applicazione della (31), dicendo ATTIVA *la ruota che nel moto relativo al porta-treno gira nel senso del momento,* PASSIVA *quella che gira in senso opposto.*

14. — Come vedemmo, una ruota condotta può essere attiva; ma nel rotismo epicicloidale deve allora esistere un'altra ruota principale mobile o fissa di carattere passivo, e viceversa.

Consideriamo in fatti la successione che partendo da una delle ruote principali di un rotismo epicicloidale va fino all'altra, comprendendole tutte, e prendiamone in esame il moto relativo al porta-treno, nel quale ogni ruota ha una velocità ben definita in grandezza e senso. Il momento delle forze applicate a ciascuna di esse per parte del meccanismo che nella successione stabilita la precede è di segno opposto a quello dell'azione trasmessa dalla parte che segue. Quindi ogni ruota intermedia della catena sarà, per esempio, attiva rispetto a quella che la segue e passiva rispetto a quella che la precede, e le ruote estreme (principali del rotismo) non possono essere che attiva l'una e passiva l'altra.

Allora detta 1 la ruota estrema attiva e 2 quella passiva, detti M_1 ed M_2 i momenti attivi su di esse,

τ il rapporto di trasmissione da 1 a 2,

η il rendimento del rotismo ordinario che le collega, possiamo scrivere come per una semplice coppia di ruote ingrananti

$$M_1 : M_2 = -(\tau : \eta). \tag{33}$$

D'altra parte, se M_3 è il momento attivo sul porta-treno, abbiamo fra le condizioni di equilibrio del meccanismo la

(18) ripetuta $$M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

valida anche nel regime effettivo, se si trascura l'attrito nei perni fissi. Finalmente fra le velocità angolari passa la relazione

di Willis, che per il significato qui attribuito a τ e per l'ufficio dichiarato del mobile 3 ha la forma

(13) ripetuta $$\tau \omega_1 - \omega_2 + (1 - \tau)\, \omega_3 = 0 .$$

Le due prime relazioni permettono di esprimere due momenti in funzione del 3°: con l'ultima poi una delle velocità si può dare per mezzo delle altre due. Per conseguenza il *rendimento* (η) *del rotismo nel funzionamento epicicloidale*, ossia il rapporto fra il lavoro del cedente o la somma dei lavori dei cedenti e il lavoro del movente o la somma dei lavori dei moventi *si può sempre esprimere per mezzo*

— *del rapporto di trasmissione ordinario* τ,

— *del rendimento corrispondente al funzionamento ordinario del rotismo* η,

— *del rapporto fra le velocità angolari dei due moventi o dei due cedenti.*

15. — Una prima importante applicazione si può fare ai rotismi con una ruota principale fissa (fig. 5).

Trattisi di un ritardo con 4 ruote cilindriche esterne: due principali 1, 2 di ugual asse A e due satelliti di ugual asse B. Sia fissa la ruota 2, senza per ora distinguere se attiva o passiva. Per indicarne la immobilità essa è nella figura tratteggiata. La (13) diventa

$$\tau \omega_1 + (1 - \tau)\, \omega_3 = 0 ,$$

e quindi due casi possibili, già segnalati in altra applicazione del rotismo al n° 8:

1° caso, $\tau < 1$, ossia è fissa la ruota principale più grande (fig. 5*b*); allora porta-treno e ruota mobile girano in sensi opposti, perchè ω_1 ed ω_3 devono avere segni contrari;

2° caso, $\tau > 1$, ossia è fissa la ruota principale più piccola (fig. 5*a*); allora porta-treno e ruota mobile girano nello stesso senso.

Se il porta-treno è movente e gira verso destra, la ruota mobile gira nel 1° caso verso sinistra, nel 2° verso destra, ed essendo essa il cedente del meccanismo, se ne deducono le reazioni R_1 R_2 che nei due casi trasmette al satellite col quale in-

grana, e, per l'equilibrio del gruppo dei satelliti, le S_1 S_2 con le quali la ruota tenuta ferma deve spingere contro l'altro satellite. Servono a tale scopo le norme date al n° 10.

Considerato poi il moto relativo al porta-treno, risulta che in entrambi i casi la ruota fissa gira verso sinistra: perciò,

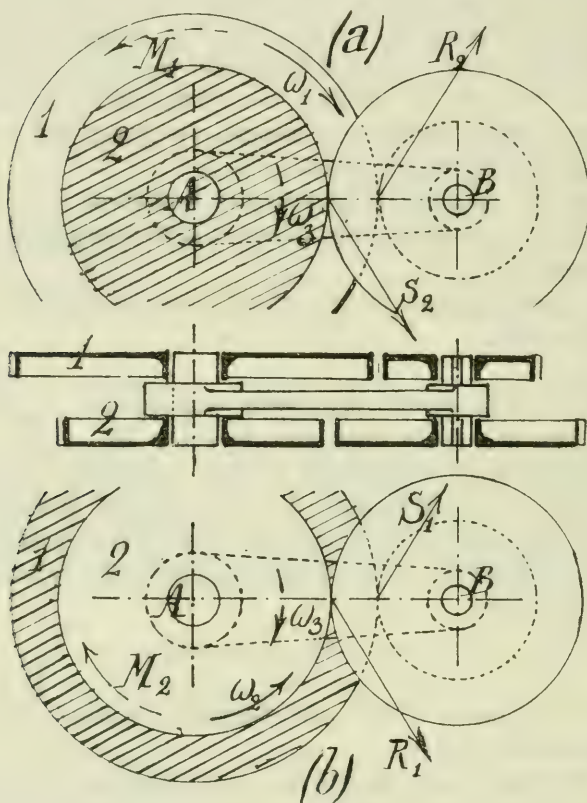



Fig. 5.

secondo la regola enunciata al n° 13, essa è attiva nel 1° caso e passiva nel 2°.

In conclusione, si comporta sempre come ruota attiva la più grande. Ad essa spetta dunque l'indice 1 secondo le premesse alle formole (33) (18) e (13), nelle quali per conseguenza è sempre $\tau > 1$.

Allora, se è fissa la ruota piccola, al cedente spetta l'indice 1, e il rendimento del rotismo epicicloidale risulta espresso da

$$(\eta) = -\frac{M_1 \omega_1}{M_3 \omega_3} = \frac{\tau - 1}{\tau - \eta}, \tag{34}$$

come discende dalle formole citate nelle quali si faccia $\omega_2 = 0$.

Se è fissa la ruota grande, al cedente spetta l'indice 2, e quindi

$$(\eta) = -\frac{M_2 \omega_2}{M_3 \omega_3} = \eta \frac{\tau - 1}{\tau - \eta} \tag{35}$$

come risulta, facendo $\omega_1 = 0$.

Queste formole dimostrano che nel caso di valori di τ prossimi all'unità, grazie ai quali si realizzano con questo meccanismo elevatissimi rapporti ideali fra momento resistente e momento motore, il rendimento è assai basso.

Così, supposto che il rendimento del rotismo nel funzionamento ordinario sia 0,95, tenuta presente la (15), essendo

per	$\tau =$ 1,15	1,10	1,05	1,02	1,01
	$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\tau - 1}{\tau} =$ 0,13	0,09	0,05	0,02	0,01
si ha	$(\eta) =$ 0,750	0,667	0,500	0,286	0,167,

quindi il potere moltiplicatore

in vece di	8	11	20	50	100
risulta	6	7	10	14	17.

È questo un fenomeno noto empiricamente per tutti i meccanismi differenziali con alto potere moltiplicatore ideale.

16. — Un'altra applicazione importante è quella ai rotismi con 2 cedenti: per esempio, al differenziale con ruote coniche. Esso si comporta come un semplice giunto quando trasmette il lavoro ai due alberi condotti con uguale velocità. In fatti i sa-

telliti non hanno moto relativo ai loro alberi e le dentature non si sviluppano quindi l'una sull'altra.

Ma, appena la velocità dei due cedenti cessa di essere la stessa, l'attrito fra le dentature entra in giuoco. Ha il carattere di ruota attiva quella che gira più lentamente: designandola quindi con l'indice 1 si ha

$$\eta M_1 = M_2 .$$

D'altra parte

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \qquad \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3 = 0 ,$$

quindi il rendimento del rotismo risulta dato da

$$(36) \qquad (\eta) = -\frac{M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2}{M_3 \omega_3} = 2 \frac{\omega_1 + \eta \omega_2}{(1+\eta)(\omega_1 + \omega_2)} .$$

Esso è uguale ad 1 se $\omega_1 = \omega_2$, come già prevedemmo.

È minimo quando l'una o l'altra di queste due velocità si annulla, nel qual caso si deducono le medesime espressioni che risultano dalle (34) e (35) quando vi si faccia $\tau = -1$.

Nella applicazione di questi meccanismi al problema di trasmettere il moto con rapporto variabile della velocità, che già condannammo come svantaggiosa, il rendimento si ottiene annullando al numeratore della (36) il lavoro raccolto su uno degli alberi che il freno assorbe.

È logico supporre che, per rendere meno grave la dispersione di energia, si applichi il freno all'albero più lento, ossia si limiti la velocità minima del cedente ad uguagliare quella del movente.

Allora

$$(\eta) = -\frac{M_2 \omega_2}{M_3 \omega_3} = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{\omega_2}{\omega_3} .$$

In conclusione, tutti i casi si possono trattare con grande semplicità.

17. — L'indagine precedente può rendersi maggiormente rigorosa tenendo conto di fatti che vennero in essa trascurati

per non menomarne la perspicuità. Anzitutto il lavoro di attrito nei perni delle ruote principali non è lo stesso nel funzionamento epicicloidale ed in quello ordinario, essendo le velocità relative ai sopporti nel primo caso ω_1 ed ω_2 nel secondo $\omega_1 - \omega_3$ ed $\omega_2 - \omega_3$.

Inoltre nel funzionamento epicicloidale si dovrebbe tener conto del lavoro di attrito nei perni del porta-treno.

Finalmente il rendimento di un rotismo non può essere identico secondochè si sceglie come motrice l'una o l'altra delle sue ruote estreme.

È ovvio come si possa tener conto dei primi due fatti accennati. Quanto all'ultimo esso implica una distinzione che non è nelle abitudini delle teorie accettate, ma che sarebbe logico fare.

È in fatti evidente, nel caso di una coppia di ruote di raggi primitivi assai diversi, che il rendimento è maggiore se è conduttrice la ruota piccola; ma le formole che si adottano per calcolarlo sono simmetriche rispetto agli elementi delle due ruote coniugate, perchè trascurano i termini di 2° grado nel coefficiente d'attrito. Esse dànno quindi lo stesso valore qualunque sia la ruota motrice.

Si potrebbe tuttavia adottare un metodo assai semplice per distinguere i due rendimenti, ricorrendo allo spostamento δ che nel n° 12 è stato definito come indice della perdita di rendimento delle dentature.

Invero, se si suppone (come è logico fare) che la grandezza di δ non muti quando i due elementi della coppia si scambiano l'ufficio meccanico di conduttore e di condotto, si potrà dedurre il rendimento corrispondente ad un modo di funzionare da quello, supposto noto, corrispondente all'altro modo.

Così se η è il rendimento della coppia A, B, essendo conduttrice A, si deduce dalla (31)

$$\delta = (1 - \eta)\,\frac{r_A r_B}{r_A + \eta r_B}\,.$$

Dando poi alla B l'ufficio di condurre, risulta

$$\eta' = -\frac{1}{\tau}\,\frac{r_A - \delta}{r_B + \delta} = \frac{r_B}{r_A}\,\frac{r_A - \delta}{r_B + \delta}\,.$$

e quindi, prossimamente,

$$\eta - \eta' = \delta^2 \frac{r_B^2 - r_A^2}{r_A^2 r_B^2},$$

ossia la differenza fra i due rendimenti è proporzionale alla differenza fra i quadrati dei raggi delle ruote condotte nei rispettivi modi di agire della coppia dentata.

Più sensibile ancora è la divergenza se si tiene conto simultaneamente della influenza dell'attrito nei perni, poichè lo spostamento della azione mutua dalla normale di contatto devia più sentitamente la reazione dei perni se si compie verso il centro della ruota di minor raggio.

Ma, come è noto, i fenomeni di attrito sono soggetti a troppo gravi alterazioni per cause estranee ai caratteri meccanici del sistema, perchè meriti spingere l'indagine al più alto grado di precisione. Ciò che importava era porre in evidenza le proprietà più cospicue che lo studio approssimato ha rivelato. Ai procedimenti più esatti parve sufficiente fare un accenno.

L'opera sperimentale di Guglielmo Ramsay.

Note commemorative del Socio L. BALBIANO.

Ho dimandato al nostro amato Presidente di ricordare in questa stessa seduta, nella quale egli ci partecipa la scomparsa del collega inglese Sir William Ramsay, l'opera sperimentale sua, perchè a me pare doveroso, ed in ciò sono confortato dall'avviso di eminenti colleghi, che l'opera del socio perduto debba subito essere ricordata, sia pure in maniera sommaria, alla famiglia accademica per significare omaggio amichevole alla memoria dell'estinto. Il ritardare tale omaggio diminuisce di qualche frazione quel complesso indefinibile fatto di stima, di amicizia e di riconoscenza che ci lega alla memoria di chi ci ha abbandonato.

L'opera sperimentale di Guglielmo Ramsay principia col 1874: comprende quindi 42 anni di attività continuata. A ventidue anni, essendo nato nel 1852 a Glasgow, esordisce con una ricerca sopra quel miscuglio liquido di polisolfuri di idrogeno che si ha trattando con acidi diluiti il prodotto di ebollizione prolungata del latte di calce con fiori di solfo, e nel primo periodo di studio si raggira intorno ad argomenti varii, slegati, come se il giovane chimico, prima di fissarsi sopra un lavoro di lunga lena, volesse scandagliare diversi campi di ricerca. Già in questi primi tentativi si discerne manifesto che l'aquilotto tentennante, ingrandendo, spiccherà voli più ampii e l'aquila volteggierà in arditi giri nelle regioni più elevate del cielo.

Nel campo organico egli preludia con un accenno di sintesi della piridina per condensazione dell'acetilene ed acido cianidrico a temperatura elevata, e coll'ossidazione permanganica degli alcaloidi della china per svelare con un disfacimento graduale

della molecola la struttura della chinina e cinconina: problemi questi altrettanto difficili quanto interessanti, che, dopo un lavorìo di mezzo secolo, sono ancora all'ordine del giorno dei congressi chimici attuali. Difatti un processo pratico di preparazione della piridina non venne finora escogitato ed il lavoro analitico sulla costituzione delle basi della china non è ancora progredito al punto da spiegarci in tutta la sua pienezza l'intima struttura di questi alcaloidi.

L'aiuto potente che nell'ultimo quarto del secolo decimonono fisica e chimica si dettero reciprocamente tanto da far germogliare un ramo nuovo di scienza, la chimica-fisica, decisero il giovine Ramsay a percorrere quest'ultima strada, ed è in questo campo che si trovano le ricerche, in unione con Young, sulle tensioni di vapore che completano ed allargano quelle del suo connazionale Dalton, permettendogli di stabilire quella regola del rapporto costante che esiste fra le temperature assolute di ebollizione di una serie di eteri organici sotto diverse pressioni, di cui alla sua volta il Crafts usufruirà per suggerire una formula di correzione ai punti di ebollizione di differenti liquidi per ricondurli alla pressione normale, cioè di 76 cm. di mercurio, determinandoli sperimentalmente alla pressione atmosferica ambiente.

Il seguire in tutta la sua estensione e profondità l'opera sperimentale del Ramsay è cosa molto ardua, perchè egli appartiene a quella esigua classe di uomini superiori che, dominatori di una scienza, passeggiano da gran signori anche nei campi limitrofi ad essa. Perciò mi limito al solo accenno delle ricerche, puramente fisiche, sui fenomeni critici scoperti circa un secolo fa da Cagniard de la Tour e studiati nei dettagli dall'Andrews verso il 1870, creando uno stato della materia intermedio fra il liquido ed il gassoso limitato dalle costanti critiche. Le esperienze e le deduzioni che egli fa col Young portano alla conclusione che lo stato liquido persiste al di là del punto critico, opinione discussa ed accettata anche da altri sperimentatori nel campo fisico.

La scoperta sperimentale del Raoult, teorizzata dal van't Hoff, che permette l'applicazione della legge di Avogadro alle sostanze in soluzione, indirizzò il Ramsay alla crioscopia degli ossidi dell'azoto e mentre per l'ipoazotide sciolta nell'acido ace-

tico, conferma il peso molecolare duplice, per l'anidride nitrosa, sciolta nell'ipoazotide, dimostra la semplicità della molecola, fatto che la differenzia dalle corrispondenti anidridi del fosforo, arsenico, antimonio.

Un'applicazione del metodo ebullioscopico fonte di risultati importanti, fu la determinazione del peso molecolare di molti elementi metallici. L'abbassamento della tensione di vapore della soluzione nel mercurio di alcuni elementi metallici paragonato con quello del solvente puro con un procedimento sperimentale ingegnoso, dimostra che le molecole del litio, manganese, zinco, cadmio, gallio, stagno, piombo, bismuto, argento ed oro sono monoatomiche. È un fatto degno da notarsi le eccezioni presentate dal calcio e dal bario, i cui atomi paiono suscettibili di ulteriore divisione nello sciogliersi nel mercurio, fatto che collima coll'osservazione di Humphreys e Mohler, che per spiegare lo spostamento di alcune bande dello spettro del vapore di calcio sottoposto a pressione sono pure costretti a ricorrere alla supposizione della divisibilità dell'atomo di questo elemento.

Invitato dal chimico industriale Mond, che tentava rendere tecnicamente pratica la pila a gas del Grove, il Ramsay intraprese uno studio dettagliato delle fasi dell'occlusione — il nome è di Graham — dell'idrogeno ed ossigeno col palladio e platino, ed in una serie di Memorie collo Shields e col Mond stesso, seguì le modalità di questi fenomeni senza però concludere sull'essenza di essi. I fenomeni di occlusione dei gas presentano ancora alla mente dei chimici un enigma, una questione che apparisce sempre coi contorni sfumati sull'orizzonte. Le esperienze sull'azione assorbente del palladio per l'idrogeno avviarono un tempo a considerarli come un vero fenomeno di azione chimica fra le due sostanze reagenti regolato dalla costanza dei pesi, concetto che poi il van't Hoff sostituì con quello di soluzione solida, avvicinandosi alla prima idea del Berthollet, combattuta energicamente e con vittoria dalle analisi esatte del Proust. Ma l'idea geniale del savoiardo ricompare ora nelle speculazioni recenti del Kurnakow e si fa strada nelle esperienze su quel prodotto curioso di ossidazione della grafite scoperto dal Brodie un mezzo secolo fa ed utilizzato dal Berthellot per l'analisi delle diverse varietà di carbonio sotto il nome di acido od ossido grafitico. A simili prodotti il Kurnakow dà il nome di " bertho-

lettiani „ appunto per distinguerli dai “ daltoniani „ a rapporti atomici costanti e senza dubbio spetterà ad essi il far sorgere una teoria che abbracci in tutta la sua estensione e modalità il fenomeno chimico della soluzione e della combinazione.

Un problema che ha sempre eccitato la mente dei chimici è lo stabilire su solide basi sperimentali il rapporto esistente fra il peso della stessa molecola allo stato di vapore, liquido e solido, cioè il fattore di associazione. Il quesito per ora non è risolto per la molecola solida, mentre per la molecola liquida il Ramsay ha portato un notevole contributo alla sua soluzione, quantunque i critici non lo ritengano del tutto esauriente, benchè le ulteriori ricerche di Longinescu, e basate su altri criteri, abbiano condotto allo stesso risultato. Usufruendo di una formula del fisico ungherese Eötvös e misurando sperimentalmente collo Shields l'altezza a cui giunge in un capillare di raggio noto il liquido di cui è conosciuta la densità, quella del suo vapore, e la temperatura, egli riesce a stabilire per una serie numerosa di liquidi il fattore di associazione e, quale risultato importante, dedurre che quelle sostanze contenenti nella loro molecola il residuo d'acqua, *ossidrile*, hanno la molecola liquida associata. Così l'acqua stessa ha la molecola liquida quadrupla di quella del suo vapore; l'alcool, l'acido acetico, tripla; l'acido solforico parimenti tripla alla temperatura di 280°: mentre il benzolo, il tricloruro di fosforo, l'anilina ed altri non subiscono associazione condensandosi il vapore a liquido.

La discussione avuta col Chabrié sulla decomposizione delle combinazioni del selenio col cloro dimostra nel Ramsay un polemista avveduto, che maneggia la dialettica come l'esperimento, avvertendo che la sua abilità di sperimentatore è documentata dalla revisione dei pesi atomici del boro e dello zinco, lavori di alta precisione sperimentale.

In brevi cenni ho cercato di abbozzare la parte dell'opera del nostro collega nella quale si ammirano le qualità di un eminente cultore di scienza, ma nella quale egli non raggiunge ancora l'apogeo della creazione. Il poeta, il creatore, si rivela luminoso in quella parte ulteriore di essa dove il Ramsay crea l'argo ed i gas dell'aria.

***

Il 31 gennaio 1895 fu giorno di festa per la scienza.

Nell'anfiteatro dell'Università di Londra, invitato dalla Società Reale di Scienze, si riunì il fiore dell'intelligenza scientifica cosmopolita per imparare che Lord Rayleigh e Sir Ramsay avevano scoperto un nuovo componente dell'aria atmosferica, l'*argo*.

Le esperienze precise del Rayleigh sulle densità dei gas avevano dimostrato che quella dell'azoto atmosferico era sempre superiore di circa 1 a 2 centesimi a quella dello stesso elemento preparato dai suoi composti ossigenati o da sali ammoniacali. Di più, l'azoto dell'aria fatto entrare dapprima in combinazione col magnesio ed in seguito rimesso in libertà dal nitrido, diminuiva la sua densità e si dimostrava identico a quello ottenuto dai composti chimici azotati. Risultava facile la deduzione che l'azoto dell'aria dovesse contenere un nuovo corpo, difficoltosa la prova sperimentale e questa venne fornita in modo eccezionalmente sicuro dai due abili sperimentatori. Mentre il Ramsay, assorbendo dall'azoto atmosferico col magnesio il nitrogeno, isolava la nuova sostanza, il Rayleigh, ripetendo la vecchia esperienza del Cavendish, faceva entrare l'azoto in combinazione coll'ossigeno sotto forma nitrosa assorbibile dalla potassa, ed otteneva come residuo incombinabile il nuovo elemento, al quale si dette il nome di *argo*, appunto per la sua inerzia chimica. Ed è questo fatto dell'inerzia chimica di una sostanza elementare che segna una pietra miliare nella storia della Scienza, e che renderà immortale la memoria dei due scienziati. Però, sotto la luce delle idee di Berthollet, l'argo non è perfettamente privo di chimismo in senso generale, perchè Villard osservò la formazione di un prodotto acquoso ed J. Homfray un prodotto di adsorbimento col carbonio: perciò si rende necessario specificare che l'argo è un elemento privo di chimismo daltoniano.

L'importanza della scoperta dell'argo viene dimostrata ampiamente dal movimento che impresse nella cerchia dei ricercatori di seconda mano, che, incapaci di brillare di luce propria, stanno in agguato di novità per luccicare di luce riflessa. Quan-

tunque Rayleigh e Ramsay avessero esplicitamente dimostrato dal rapporto dei calorici specifici a pressione ed a volume costante che l'argo fosse un gas monoatomico, tuttavia alcuni tentativi, riusciti vani, si fecero per condensare l'azoto in una forma polimera e trasformarlo in una specie di ozono, tentando dar corpo sperimentale all'idea manifestata fin da principio dal Mendelejeff, perchè l'argo col peso atomico circa 40 non inquadrava colla classificazione basata sulla legge periodica.

La posizione dell'argo nel sistema periodico subì un'ampia discussione che venne stabilita dal Ramsay stesso coll' instituire nella tabella mendeleviana un gruppo di elementi di valenza zero, previsto già dal Thomsen e dal Flawitzky e che la teoria elettronistica del Thomsen conferma, considerando l'atomo di un elemento come un complesso di elettroni e caratterizzato dal numero e dalla disposizione in anelli concentrici di essi.

Alla scoperta dell'argo seguì quella dei gas elementari inerti che si trovano in minor quantità nell'aria atmosferica. Colla distillazione frazionata dell'argo liquidificato, il Ramsay riuscì col Travers e Collie, a separare lo *xeno* ed il *neo* e dai residui dell'aria liquida il *kripto*. Con queste ricerche sistematiche, condotte con geniale perizia sperimentale, egli potè riempire qualche lacuna del gruppo zero con elementi di cui peculiare qualità è la monoatomicità della molecola e la mancanza di valenza. Di particolare interesse fu la scoperta del *neo*-peso atomico 20 — perchè riempì la lacuna prevista fra l'elio e l'argo.

Il Comitato del premio Nobel riconobbe l'importanza di questi lavori e nel 1904 l'Accademia di Stoccolma, mentre premiava Lord Rayleigh per i lavori fisici sulle densità dei gas e per la scoperta dell'argo, assegnava il premio per la chimica al Ramsay per la scoperta dei gas dell'aria e la loro posizione nel sistema periodico. La nostra Accademia, riconoscendo i suoi meriti altissimi, l'aveva fin dal 1897 nominato Socio corrispondente.

***

Nei tentativi fatti per scoprire combinazioni naturali dell'argo, il nostro socio venne condotto nel 1895 a studiare la sostanza gassosa che si svolge per trattamento con acidi, a

temperatura elevata, di un minerale di uranio, la *Cleveite*, che Hillebrand aveva ritenuto azoto. La massa gassosa, separata dai gas chimicamente attivi, presentò all'analisi spettrale quella riga gialla che già fin dal 1868 il Janssen aveva attribuito ad una sostanza della cromosfera solare, all'elio, e che nel 1882 il Palmieri aveva osservato presentarsi nello spettro di fiamma di alcune incrostazioni vesuviane. Se la scoperta dell'elio, il gas che delimita coll'idrogeno l'atmosfera solare, aveva in quel momento un'importanza notevole, perchè con esso e col « neo » il Ramsay riusciva a riempire due lacune del gruppo zero, assunse in seguito un'importanza eccezionalmente grande colla scoperta del radio e sua trasformazione spontanea in elio e del fenomeno della materia indicato col nome di radioattività.

Nel 1896 Enrico Becquerel scopriva la facoltà dell'uranio e dei suoi composti di emettere spontaneamente raggi che hanno, fra altre, la proprietà d'impressionare la lastra fotografica, al riparo della luce, e che possono attraversare le sostanze solide, liquide e gassose, purchè lo strato sia di un limitato spessore, variabile per ogni sostanza. Due anni dopo la signora Curie e Schmidt, indipendentemente, scoprivano nel torio un comportamento simile, ed in seguito ad una ricerca sistematica operata su elementi e su minerali vari, i coniugi Curie furono condotti alla scoperta del radio in quel minerale complesso di uranio che ha nome *pechblenda*. Il radio è un elemento simile al bario, e fu isolato pochi anni fa dalla Curie; esso dà tutta una serie di sali presentanti il fenomeno della radioattività in modo molto più intenso dei composti uraniferi. Questo fenomeno è dovuto secondo Rutherford e Soddy allo sprigionarsi spontaneo dalla sostanza radioattiva, con frazionamento dell'atomo *metabolo* — agevolato dalla soluzione — di una materia che si comporta come un gas e che si può condensare in liquido ed anche solidificare col raffreddamento intenso. A questa materia si dette il nome di *emanazione* ed il Ramsay col Soddy ne intrapresero lo studio nel 1903 e vennero alla conclusione che l'emanazione del radio, che essi chiamano abbreviatamente *niton*, è un gas che obbedisce alla legge di Boyle e Mariotte, del peso atomico circa 224. Il volume dell'emanazione in equilibrio con 1 grammo di radio è all'incirca di 1 mm^3 sotto la pressione normale ed alla temperatura ordinaria, cifra che venne da esperienze di

Rutherford e di Debierne ridotta a $^{6}/_{10}$ di mm^3. L'emanazione, convenientemente depurata, si scinde spontaneamente dopo un certo tempo in elio ed in radio B. C. D. Questa è la scoperta capitale che corona l'opera sperimentale del Ramsay. Dal radio elemento ben definito, dotato di chimismo, egli constatò il passaggio all'elio, parimenti elemento definito, però privo di chimismo.

Il solitario cantore di *Zarathoustra*, Federico Nietzsche, il filosofo più acuto analizzatore e, in molte sue deduzioni dall'apparenza paradossale, più sincero del secolo decimonono, asserisce che la condizione fisiologica essenziale per la creazione del capolavoro artistico è uno stato di *ebbrezza* che scuota la macchina umana: ebbene, trasportando questo concetto nell'identico campo della creazione scientifica, perchè scienza ed arte nascono da vibrazioni analoghe — quando creano — il Ramsay provò l'ebbrezza nietzsciana alla visione dello spettro caratteristico dell'elio prodotto dal radio, e dall'impulso ricevuto scaturì la soluzione del problema dell'alchimia. Il problema fantastico e venale degli antichi alchimisti, la trasmutazione degli elementi, riceveva nel 1903 per opera del chimico inglese la soluzione sperimentale e tre anni fa, nella conferenza tenuta nell'anfiteatro dell'Istituto chimico dell'Università di Roma, invitato dalla Società chimica italiana, egli potè far vedere all'uditorio plaudente un campione di elio sintetico, mediante il suo spettro caratteristico, che rappresentava il primo elemento ottenuto per scissione spontanea di un altro corpo semplice.

Se il problema risolto dalle ricerche del Ramsay è uno dei più elevati che abbia conturbato la mente dei chimici, la via sperimentale seguìta riempie d'ammirazione l'animo degli sperimentatori specialisti. Si tratta di esperienze fatte con quantità infinitesimali di materia, di misurare volumi gassosi dell'entità di frazioni di millimetro cubo, di pesare centesimi e millesimi di milligrammo, ed è perciò stato necessario inventare apparati adatti a tale lavoro microscopico e nell' invenzione e nel loro funzionare il nostro socio sale al lirismo più elevato del poeta, non discostandosi dalla severa misura del fisico.

La trasmutazione dell'atomo del radio nell'atomo dell'elio avviene spontaneamente con una perdita enorme di energia, perciò parve ragionevole al Ramsay di " supporre — dice nella

conferenza di Roma — che aggiungendo energia agli elementi conosciuti si potrà scindere le loro molecole ed ottenere nuove qualità di materia. Ora la forma di energia più concentrata che noi conosciamo è quella di un atomo di elio che si sprigiona dal niton, cioè dall'emanazione del radio „, quindi si mise a studiare, col suo allievo Cameron, l'azione dell'emanazione sulle soluzioni saline di rame, e coll'Usher, sulle soluzioni di silicio, zirconio, titanio e torio. Dalle soluzioni di rame egli asserì ripetutamente aver ottenuto il litio, elemento tipico del gruppo, diffusissimo in natura; dalle altre, produzione di acido carbonico ed ossido di carbonio in quantità variabile, che dimostrerebbero la trasmutazione di questi elementi in carbonio, pure elemento tipico del IV gruppo. Però le esperienze sul rame, ripetute dalla signora Curie, non confermarono la produzione del litio e da altri sperimentatori venne messa in dubbio la causa della formazione di acido carbonico dalle soluzioni sperimentate. Da ciò ne segue che il tentativo geniale del Ramsay non è finora confermato dal controllo sperimentale ed autorizza la Curie a concludere " che attualmente non vi sono ragioni sufficienti per ammettere che la formazione di certi elementi possa essere provocata a volontà in presenza di corpi radioattivi „. " La formazione dell'elio dal radio è un fatto che la scienza ha acquistato, ma è una decomposizione spontanea, legata ad una proprietà essenziale degli elementi radioattivi e non è influenzata dall'intervento dello sperimentatore „. È cosa certamente spiacevole che la coscienza dei chimici resti infastidita davanti al dibattito sperimentale che scaturisce da queste esperienze contraddittorie eseguite da sperimentatori così abili, ed aspetta con scettica calma dal tempo e da nuove esperienze la pace di una risoluzione definitiva.

Eccovi, o egregi colleghi, riassunta sommariamente l'opera sperimentale del nostro socio corrispondente, opera varia, importante e che in alcuni punti sale alla genialità. L'orma impressa dal Ramsay nella storia della scienza è profonda, le sue scoperte sono scritte su tavole di bronzo che il tempo non altera, il seme gittato è vitale. È un faro che rischiara l'umanità presente e che manda sprazzi di luce per illuminare l'umanità futura. Il vaticinio che il nostro grande collega lasciò a tutti i

chimici nella conferenza di Roma, che la chimica futura avrà per iscopo la trasmutazione degli elementi — di quei corpi finora ritenuti indecomponibili — additandoci la prima trasmutazione effettuata, suoni come un inno di battaglia alle generazioni future e dalle seguìte ricerche auguriamoci venga svelata la struttura degli atomi, come nel secolo passato per opera dell'Avogadro, del Kekulé, del van't Hoff e del Le-Bel venne sviscerata la struttura delle molecole.

Sarà il monumento più degno che l'umanità potrà innalzare alla memoria di Guglielmo Ramsay.

Centenario della nascita di Charles Gerhardt.

Commemorazione del Socio I. GUARESCHI.

La chimica, da Lavoisier in poi, non ebbe più dei periodi veramente empirici; dal 1789 ogni breve periodo è caratterizzato dallo sviluppo di idee, di ipotesi, di teorie veramente geniali, che hanno immensamente contribuito al progresso della scienza, particolarmente dopo la scoperta della *Pila di Volta;* e basti ricordare quelle di Berzelius e Davy, di Dalton e Avogadro, di Dumas, Laurent, Liebig, Gerhardt, Kekulé e Cannizzaro. La teoria, la immaginazione congiunta alla più rigida esperimentazione. Non vi è forse genialità di immaginazione nelle scoperte di Mitscherlich, di Pasteur, di Wurtz, di Lebel e di van't Hoff?

Il credere che i progressi della chimica siano solamente dovuti ai moderni chimici e che i nostri grandi predecessori siano stati empirici, sperimentatori solamente, è contrario alla verità storica. La immensa maggioranza dei grandi chimici, da Lavoisier e Berthollet sino verso il 1870, non pensava troppo alle applicazioni, e al danaro, la scienza pura era il loro ideale, le applicazioni utili vennero dopo.

Tra questi chimici, dopo Berzelius, primeggia CHARLES GERHARDT.

Una critica retrospettiva troppo severa sui nostri grandi lavoratori, che ci hanno lasciato l'immenso materiale sul quale il chimico costruisce ancora oggi, mi sembra una grande ingiustizia.

In questi giorni la *Società Chimica di Francia* celebrerà modestamente, tal che si richiede dato lo stato presente di guerra, il centenario della nascita del grande chimico alsaziano CHARLES GERHARDT. Ed io ho subito plaudito a queste, ripeto modeste, onoranze, che sono veramente giustificate. Ed è bene che l'Italia, sia pur di lontano, abbia idealmente parte a queste ricordanze, anche per cagioni diverse da quella di onorare un grande scienziato. Il Gerhardt è stato il maestro e l'amico di un modesto, ma distinto, chimico italiano, il triestino LUIGI CHIOZZA.

La nostra Accademia, che ha celebrato nel 1911 il centenario dell'opera principale di Amedeo Avogadro, non può non prender parte a queste onoranze al Gerhardt, il quale, col nostro Cannizzaro, tanto contribuì all'adozione della *legge di Avogadro*.

Scrivere di Ch. Gerhardt è certamente non facile; l'opera sua per quasi un mezzo secolo ha dominato il campo teorico della chimica e si fa sentire sempre.

Ch. Gerhardt nacque il 21 agosto 1816 in Strassburg ed ivi morì il 16 agosto 1856; cioè quando aveva appena quarant'anni; ma, in questo breve tempo fece delle mirabili scoperte e gettò delle idee che furono fecondissime pel progresso della scienza nostra. Studiò prima in Germania, poi volle recarsi a Parigi (1838), dove assai presto destò l'attenzione ed il sospetto del chimico colà regnante, G. B. Dumas. Il giovane Gerhardt non aveva che 19 anni quando nel 1835 pubblicò il suo primo lavoro: *Sulle formole dei silicati naturali*. È una lunga e bellissima Memoria, nella quale critica e discute le formole dei silicati allora conosciuti. Questo lavoro fu lodato da Berzelius.

Dal 1835 al 1839 si occupò di traduzioni e di ricerche sperimentali, e nel 1839 pubblicò una Memoria rimasta celebre: *Sur la constitution des sels organiques à acides complexes et leurs rapports avec les sels ammoniacaux* ("A. Ch., 1839 [2], t. LXXI, pag. 184). Gerhardt non aveva che 23 anni! In questa Memoria egli stabilisce quale principio generale " che nelle sostituzioni di un corpo semplice con un corpo composto la reazione ha

luogo in maniera che un elemento (l'*idrogeno*) di uno dei corpi si unisce ad un elemento (*ossigeno*) dell'altro corpo, per formare un prodotto (*acqua*) che si elimina, mentre gli elementi restanti (*residui*) si combinano „. Questa regola generale fu poi in seguito dal Gerhardt denominata: *legge dei residui.*

Nel 1840-41 comparve la sua prima Memoria con Cahours *sugli olii essenziali*, ove si scopre una nuova serie di composti aromatici: cimene, aldeide e acido cuminico, ecc. Questa Memoria aprì la via allo studio veramente scientifico di quella numerosa categoria di sostanze vegetali che diconsi *olii essenziali.*

Ma dove il genio di Gerhardt si manifestò apertamente fu nel 1842; egli allora pubblicò una grande Memoria: *Recherches sur la classification chimique des substances organiques*, nella "Revue Scient. „ di Quesneville (t. X), ed in riassunto, e lievemente modificata, pubblicò negli "A. Ch. „ (3) t. VII e VIII col titolo: *Considérations sur les équivalents de quelques corps simples et composés.* — Qui egli, per via chimica, applica la legge di Avogadro, riforma i più importanti pesi atomici, principalmente quelli del carbonio fatto = 12 e dell'ossigeno = 16, ecc., in modo che le formole di tutti i composti organici diventano uniformi e tali che sono ancor quelle usate oggi.

Questo grande lavoro destò le simpatie del chimico illustre, ma sfortunato, Aug. Laurent, ed allora i due chimici strinsero una amicizia che non si spezzò che colla morte.

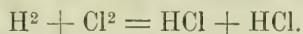
Gerhardt trovò la strada della scienza sbarrata da chimici ultrapotenti anche nella politica e per allontanarlo da Parigi fu nominato professore di chimica a Montpellier [1]. Il Gerhardt sperava un posto a Parigi nell'insegnamento superiore.

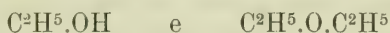
La riforma dei pesi atomici ebbe una grande influenza. In seguito egli dimostrò la grande importanza dell'acqua nelle reazioni chimiche, poi sviluppò enormemente il concetto dell'*omologia* dello Schiel, al punto che può dirsi suo.

Gerhardt e Laurent furono i primi ad ammettere, come

[1] Si afferma da alcuni, ma non ne ho le prove, che nel 1846 il Ministro della Pubblica Istruzione in Francia, Salvandy, aveva raccomandato specialmente ai professori di provincia di non servirsi dei laboratori officiali se non per prepararvi le lezioni e non per farvi delle ricerche scientifiche personali.

aveva già ripetutamente proposto l'Avogadro, la divisibilità delle molecole e quindi, ad esempio, si doveva scrivere:

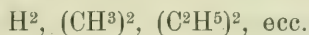
$$H^2 + Cl^2 = HCl + HCl.$$

Questo concetto condusse Gerhardt a rappresentare l'alcol e l'etere con:

$$C^2H^5.OH \quad e \quad C^2H^5.O.C^2H^5$$

ed a considerare la molecola dell'acqua H^2O come l'unità di confronto per i pesi molecolari.

Egli pel primo fece osservare che i cosidetti radicali alcolici, quali il *metile*, l'*etile*, ecc., scoperti da Kolbe e Frankland, che si rappresentavano con:

$$CH^3, \ C^2H^5, \ ecc.,$$

dovevano invece essere rappresentati con formole corrispondenti alla molecola diatomica come quella dell'idrogeno, e quindi con:

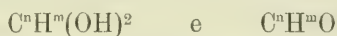
$$H^2, \ (CH^3)^2, \ (C^2H^5)^2, \ ecc.$$

Così egli propose le formole ed i nomi per le basi organiche scoperte dal Wurtz nel 1848 e che denominò *amine*; formole e nomi rimasti nella scienza.

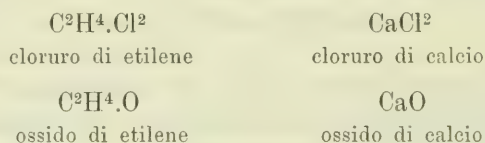
Mente generalizzatrice per eccellenza, propose una classificazione per serie e fondò, in seguito anche alle scoperte di Laurent, Regnault, Malaguti e Dumas, la cosidetta *teoria dei tipi chimici*. La quale teoria, per opera poi di Frankland, di Odling, di Wurtz e specialmente di Kekulé ed altri giovani e geniali chimici, si trasformò nella teoria della valenza. Al Gerhardt devesi la scoperta delle *anilidi*, della *chinolina*, delle *anidridi* degli acidi organici, un grande lavoro sulle *amidi* insieme al nostro Chiozza; e numerose altre ricerche, tutte fondamentali.

Egli ha riassunto le sue idee intorno all'adozione della molecola d'acqua come unità di confronto e di considerare tutti i pesi molecolari come riferibili a 2 vol. di vapore, nell'introduzione alla prima annata dei suoi " Comptes Rendus des travaux de Chimie " col titolo: *Observations sur la notation des formules*

chimiques [1]. Egli incomincia questo suo volume con un'ampia e lucida critica di un importante lavoro di H. Kolbe sui prodotti dell'azione del cloro sul solfuro di carbonio, cioè gli acidi clorometansolfonici; lavoro importante dal lato sperimentale, ma oscuro colle idee dualistiche adottate dal Kolbe, e molto schiarito colle moderne idee del Gerhardt.

Ma vi era una inconseguenza nel sistema dei pesi atomici di Gerhardt; mentre scriveva gli ossidi dei metalli alcalini e degli altri metalli, che noi oggi diciamo monovalenti, colle formole Me^2O, scriveva pure quelle degli altri metalli con Me^2O (Pb^2O, Ca^2O, ecc.). Quando Wurtz scoprì i glicoli e i loro ossidi e li rappresentò con:

$$C^nH^m(OH)^2 \quad e \quad C^nH^mO$$

il Cannizzaro (1858) fece subito notare che gli ossidi di calcio, bario, piombo, ecc., dovevano rappresentarsi con CaO, BaO, PbO, ecc., affinchè le loro formole concordassero con quelle dei glicoli e quindi:

$C^2H^4.Cl^2$	$CaCl^2$
cloruro di etilene	cloruro di calcio
$C^2H^4.O$	CaO
ossido di etilene	ossido di calcio

Cannizzaro fece vedere come, partendo dalla legge di Avogadro, e generalizzandola, si arrivasse ad un sistema di pesi atomici uniforme e pel quale appunto scompariva la discordanza fra i composti organici ed inorganici. Colla sua legge, detta *legge degli atomi*, stabilì quel sistema di pesi atomici che fu subito accettato dai chimici gerhardiani e che nelle mani di Mendeleeff diede origine al *Sistema periodico*. Egli, nel Congresso di Carlsruhe (1860), difese la grande riforma di Gerhardt colle modificazioni che egli stesso proponeva.

---

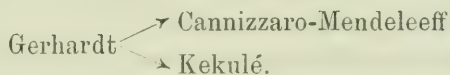
[1] " Journ. Pharm. Chim. „ [2], 1845, t. VIII, pp. 216-217. Farò notare che questa breve ma bella introduzione trovasi ne' suoi " C. R. d. trav. Chim. „, quali sono inseriti nel " Journ. Pharm. Chim. „, ma non si trova nel volume separato, cioè nella prima annata degli stessi " C. R. „, pubblicati separatamente.

Io penso che nessun chimico, se si eccettui Scheele, per la parte sperimentale, ha prodotto una massa così imponente di lavoro importante per la scienza quanto il povero Gerhardt in soli diciotto anni.

Gerhardt era dotato di una prodigiosa, eccezionale memoria; egli scrisse in breve tempo (1844-45) il suo *Précis de Chim. org.*, in 2 vol., pur non disponendo che di una modesta biblioteca. In questo libro egli espose tutte le sue nuove idee ed è anche ricco di bibliografia.

A maggior ragione si può dir questo del suo grande *Traité* in 4 grossi volumi.

L'opera scientifica di Gerhardt è grandiosa; egli aprì due nuove vie. Una, che condusse all'unificazione dei pesi atomici pochi anni dopo per opera di Cannizzaro (1858) ed i pesi atomici quali furono dati nel 1858 condussero poi il Mendeleeff dieci anni dopo al suo *Sistema periodico*, che ebbe ed ha tanta influenza, anche per la chimica fisica; l'altra via fu quella della trasformazione della teoria dei tipi, gerhardiana, in teoria della valenza per opera di Frankland, Odling e specialmente di Kekulé, imbevuto delle idee di Gerhardt e può dirsi suo ideale allievo, al quale devesi (1857-58) il concetto della tetravalenza del carbonio e del collegamento degli atomi di carbonio e da cui poi nacque la celebre teoria del *benzene* nel 1865. E che anche la teoria del benzene si rannodi alle idee gerhardiane, lo si scorge leggendo attentamente il grande *Traité de Chimie organique*, in 4 vol., che Gerhardt morendo lasciò in eredità alla scienza; trattato che anche dopo 60 anni si legge, si consulta sempre con grande profitto. Ecco perchè io penso che le idee di Gerhardt per le loro conseguenze possono essere espresse con:

Gerhardt → Cannizzaro-Mendeleeff
Gerhardt → Kekulé.

Il sistema gerhardiano fu adottato subito da tutti i migliori giovani chimici: tedeschi, inglesi, italiani e russi; trovò invece l'indifferenza e la contrarietà in Francia, eccetto che in quel gran focolaio della chimica moderna che fu il laboratorio di Adolfo Wurtz.

La nuova teoria atomico-molecolare, nata e sviluppata da

Dalton, Avogadro, Gerhardt, Cannizzaro, Kekulé, non fu adottata in Francia nell'insegnamento ufficiale se non dopo il 1880. Io non voglio dire che il grande sviluppo della chimica in Germania dopo il 1860 si debba unicamente all'adozione senza incertezze, senza eccezioni, della teoria atomica, ma certamente vi ha avuto una straordinaria influenza.

I successivi Trattati di chimica del tempo: Limpricht (1855), Kekulé (1859), Schlossberger (1860), Odling (1861), Butlerow (1864), Naquet (1865), Geuther (1870), ecc., sono calcati sulle orme di quello di Gerhardt.

L'importanza dell'opera di Gerhardt consiste non tanto nei lavori sperimentali ch'egli ha eseguito quanto per le idee geniali, e tanto più per l'influenza che hanno avuto sul progresso della chimica dopo la sua morte.

Seguire le idee di Gerhardt, si diceva allora, voleva dire essere chimico progressista. Io non dimenticherò mai quegli anni di studio, quando già nel 1868, infervorato nella chimica, io quasi divorai il *Traité de Chimie organique* e particolarmente le *Généralités* nel IV volume!

È erroneo, a mio parere, il credere che l'opera scientifica di Gerhardt abbia avuto influenza sul progresso solamente della chimica organica; no, la sua grande influenza si è estesa a tutta la chimica, perchè colle modificazioni dei pesi atomici, colle idee geniali intorno alle reazioni chimiche, col concetto dell'omologia trasportato anche nella chimica inorganica, col dare grande valore alle classificazioni per analogie chimiche, ecc. ecc. e sovra tutto col suo grande entusiasmo per la scienza, egli ha prodotto una vera rivoluzione, che si è manifestata in modo particolare poco tempo dopo la sua morte, dal 1856.

Il genio di Gerhardt aveva due grandi qualità: spirito generalizzatore, spirito critico finissimo.

Col suo spirito critico egli ha fatto un grande lavoro di *depurazione*. Innumerevoli le ricerche di altri chimici che egli ha sottoposto ad una critica fina, acuta, ma quasi sempre moderata, priva di acrimonia; ha corretto un numero straordinario di formule errate; le formule corrette o proposte da Gerhardt sono state tutte, o quasi tutte, confermate. Nè si limitò alla chimica organica, ma così fece per la chimica inorganica e mineralogica.

Si leggono sempre con ammirazione i suoi “ Comptes rendus des travaux de Chimie „ (1845-1851), le sue Memorie nella “ Revue scient. de Quesneville „, il suo *Précis de Chim. org.* in 2 vol. (1844-45) e il suo grande *Traité de Chimie organique* in 4 vol. (1852-1856).

Ma naturalmente se tutto ciò accresceva la simpatia degli uomini onesti, degli imparziali ed amanti unicamente del vero, accresceva anche, e di molto, il numero dei suoi nemici.

Gerhardt ha incontrato gli odî, le simpatie e gli entusiasmi che incontrano i veri riformatori. Quest'uomo, che con tanta schiettezza, con tanta facilità amava dire la verità, o ciò che credeva verità, non poteva a meno di attirare su di sè l'ira di chi allora dominava nella scienza.

Alcuni dei chimici più influenti di allora, invece di incoraggiare il genio nascente del Gerhardt, si opposero sempre (per via indiretta!) alla sua venuta in Parigi, ove invece si conferivano buoni posti nell'insegnamento superiore a uomini di valore inferiore a quello del Gerhardt; al punto che questi fu obbligato a lasciare Montpellier e venire a Parigi per fondarvi una scuola ed un laboratorio privati.

Nel 1845, per essersi assentato alcuni giorni da Montpellier senza un regolare permesso dell'autorità superiore, fu condannato a perdere per 21 giorni lo stipendio! E ancora nel luglio 1855 il grande riformatore, che allora era professore a Strassburg, per essersi assentato, senza formale permesso in iscritto, ma solamente verbale, fu dal ministro imperialista Fortoul punito colla ritenuta di metà dello stipendio. Ed era il momento in cui il Gerhardt aveva fatto un viaggio in Germania, per visitarvi il nuovo laboratorio di Bunsen, perchè il Gerhardt stava trattando con il Rettore dell'Università di Strassburg per la costruzione di un grande laboratorio come i moderni. Ed ora questo ministro sarebbe perfettamente ignoto se non fosse incidentalmente nominato per questi atti *eroici* contro alcuni dei più grandi pensatori che abbia avuto la Francia nel sec. XIX.

“ Dopo aver rovesciata la repubblica nel 1851, scrive Berthelot [1], e ristabilito il potere personale d'un imperatore,

[1] *Science et Libre Pensée*, 1905, p. 43.

" la reazione realista e clerico-imperialista, proseguì official-
" mente l'oppressione del libero pensiero per mezzo del ministro
" Fortoul [1], aiutato dagli aderenti al nuovo regime, quali Dumas
" e Leverrier ".

Sulla carriera scientifica di Gerhardt e di Laurent hanno avuto una notevole influenza anche i loro ideali politici, repubblicani, molto diversi da quelli dei maggiori chimici francesi di quel tempo [2]. Nessuno dei chimici potenti presso l'Impero tentò di difendere il Gerhardt contro la sopraffazione del ministro demagogo-monarchico. I suoi nemici erano in alto ed egli costretto a rimanere in basso; però il tempo, come suol dirsi, è galantuomo, fa giustizia quasi sempre, ed ha mandato nell'ombra alcuni de' suoi persecutori, mentre la fama di Gerhardt sempre più si innalza in Cielo sereno.

Io credo inutile rinfocolare gli odî nazionali ed internazionali col ricordare i nomi di coloro, francesi e non francesi, che hanno ostacolato l'opera e la carriera scientifica di Ch. Gerhardt e anche di Laurent. In tutti i paesi questi odî personali fra scienziati purtroppo vi sono sempre stati, vi sono, e vi saranno fino a che l'uomo non avrà raggiunto un grado di vera civiltà, che è ancora ben lontana dall'attuale.

Gerhardt dal 1850 al 1856, anno della sua morte, trovò conforto in un chimico italiano, il triestino Luigi Chiozza, che fu anche suo assistente per alcuni anni nel suo laboratorio privato a Parigi. Egli amava Chiozza ed era riamato da questa nobile figura di uomo onesto. Nel 1907 io ho scritto una ampia biografia di Chiozza [3]; l'importanza di questa biografia è di

---

[1] Fortoul nel 1848 era professore di Storia nell'Accademia di Tolosa e fu eletto membro dell'Assemblea costituente. Su una spada aveva giurato: *morte ai tiranni*; andò a Parigi ed esagerò sempre più le sue manifestazioni demagogiche; poi a poco a poco cambiò, come si direbbe, casacca, e divenne un reazionario Ministro della Pubblica Istruzione sotto il secondo Impero!

[2] Si vegga anche Scheurer-Kestner, *Ch. Gerhardt, Laurent et la Chimie moderne* in " Revue Alsacienne ", 1884, p. 435.

[3] I. Guareschi, *Notizie storiche su Luigi Chiozza, con lettere inedite di Ch. Gerhardt ed altri chimici.* " Mem. R. Accad. Scienze di Torino " (1907) (II), t. LVIII, p. 171.

Inoltre nel 1907 io ho scritto un opuscolo: *Notizie storiche su Ch. Ger-*

molto accresciuta per la pubblicazione che ivi ho potuto fare di 15 bellissime lettere inedite di Gerhardt a Chiozza; lettere che hanno una grande importanza per la vita di Gerhardt e la sua opera scientifica in quel periodo (1852-1856), in cui Egli componeva il suo classico *Traité*. Recentemente mi fu scritto da Parigi chiedendomi la mia concessione per ripubblicare in Francia quelle quindici lettere [1]. Io ben volentieri ho dato il mio consenso, ma non so se, dato lo stato attuale delle cose, si farà quella pubblicazione.

Quest'Uomo ha lasciato non solamente una grande eredità scientifica, ma pur anco una immensa eredità di affetti, e ben a ragione il Foscolo scolpì quella frase:

> Sol chi non lascia eredità d'affetti
> Poca gioia ha dell'urna;...

Torino, R. Università, Novembre 1916.

---

hardt e Aug. Kekulé, che è forse lo scritto meno incompleto pubblicato in Italia su Gerhardt. In questo lavoro storico-critico ho posto in piena luce alcune ricerche e idee importanti del Gerhardt che erano state o trascurate, o non abbastanza apprezzate, o anche dimenticate affatto, dai biografi di Gerhardt.

[1] In un altro mio lavoro, che si connette coll'opera scientifica di Gerhardt: *Faustino Malaguti e le sue opere,* Torino, 1902, io ho pubblicato, per la prima volta, molte lettere del nostro grande chimico a Gerhardt.

I segni numerali romani.

Nota di Dr. LUISA VIRIGLIO

I segni numerali romani, essendo ancora in uso, sono spiegati nei libri di Aritmetica pratica. Cercando esempi di numeri romani nelle iscrizioni che pervennero fino a noi, ho però trovato che le regole date nelle Aritmetiche non sono completamente conformi a quelle iscrizioni.

Mi propongo qui di riportare alcuni di tali esempi, che metteranno in chiaro la questione. Le iscrizioni che riporto sono estratte dalle opere: " Corpus Inscriptionum Latinarum „ (Berolini, 1883-1893) e " Exempla scripturae epigraphicae „. di E. Hübner (Berolini, 1885); che indicherò colle abbreviazioni: " Corpus „ e " Exempla „.

1) **Iscrizione nel Museo Laterano** (Exempla, N° 12):

C·ACONIVS·L·F
IIII VIR

Versione: " Caio Aconio, figlio di Lucio, quadrumviro „.

2) **Iscrizione in Aquileia** (Exempla, N° 23):

M·ANNAVS
Q·F·IIII·VIR·I·D

Versione: " Marco Annao, figlio di Quinto, quadrumviro per la giustizia (iure dicundo) „.

Qui i numeri non sono distinti in modo speciale dal rimanente del testo.

Di solito però, per distinguere i segni numerali dalle lettere dell'alfabeto, si sovrapponeva a quelli una linea.

3) **Iscrizione a Mario, dell'anno 100 avanti Cristo, esistente in Arezzo** (Corpus, I, pag. 195):

C·MARIVS·C·F
$\overline{IIII}$·COS·TEVTONORVM·EXERCITVM
DELEVIT·$\overline{V}$·COS·CIMBROS·FVDIT

Versione: " Caio Mario, figlio di Caio, nel quarto consolato distrusse l'esercito dei Teutoni, e nel quinto consolato sconfisse i Cimbri ".

4) **A Roma, ora nel Museo Vaticano** (Exempla, N° 241):

CAESARE·VESPASIANO·$\overline{VI}$
TITO·CAESARE·IMP·$\overline{IIII}$
·COS

Versione: " Essendo consoli Cesare Vespasiano per la sesta volta, e Tito Cesare Imperatore per la quarta ".

5) **A Roma, ora nel Museo Vaticano, sotto l'ara dedicata al Sole e a Mitra** (Exempla, N° 305):

$\overline{IIII}$·NON·IVNIAS·
O·MARYLLO·ET·GN·PAPI
RIO·AILIANO·COS·

Versione: " Nel giorno quarto avanti le none di Giugno, essendo consoli Ottavio Marillo e Gneo Papirio Eliano (cioè il 2 Giugno dell'anno 184) ".

6) **In Ercolano, ora al Museo di Napoli** (Exempla, N. 331):

IMP·CAESAR·VESPASIANVS·AVG·PONTIF·MAX
TRIB·POT·$\overline{VII}$·IMP·$\overline{XVII}$ P·P·COS·$\overline{VII}$·DESIGN·$\overline{VIII}$
TEMPLVM·MATRIS·DEVM·TERRAE·MOTV·CONLAPSVM·RESTITVIT

Versione: " L'Imperatore Cesare Vespasiano Augusto, pontefice massimo, della tribunizia potestà per la settima volta, per la diciassettesima imperatore, padre della patria, console per la settima volta e designato per l'ottava, restaurò il tempio della Madre degli Dei, rovinato dal terremoto ".

7) **In Aquileia** (Exempla, N° 363):

NERVA TRAIANVS
TRIB POT VIIII·IMP·IIII

Versione: “ Nerva Traiano, nell'anno nono della potestà tribunizia e quarto dell'impero (anno 105) „.

8) **Nel Museo di Vienne** (Francia) (Exempla, N° 387):

ANNO
IMP·CAES·NERVAE
TRAIANI·AVG
GERMANICI·IIII

Versione: “ Nell'anno quarto dell'Imperatore Cesare Nerva Traiano Augusto Germanico (cioè nell'anno 101 dopo Cristo) „.

In tutti questi esempi, e in numerosi altri che si potrebbero addurre, i numeri sono espressi dalla somma dei segni scritti, cioè sono tutti additivi. Il numero *quattro* è costantemente rappresentato dal segno IIII, in tutte le iscrizioni; pare però che nella scrittura corsiva (“ vulgaris „), sui vasi sepolcrali, si trovi la forma sottrattiva IV. Parimente *nove* è abitualmente rappresentato da VIIII; però si trova anche IX, come nell'esempio seguente:

9) **Iscrizione in Roma, nell'Arco dell'Acqua Marcia, ora Porta San Lorenzo** (anno 79) (Exempla, N° 242):

IMP·TITVS·CAESAR·DIVI·F·VESPASIANVS·AVG·PONTIF·MAX
TRIBVNICIAE·POTESTAT·IX·IMP·XV·CENS·COS·VII·DESIG·IIX·P·P

. . . .

Versione: “ L'Imperatore Tito Cesare, divino, Vespasiano Augusto, pontefice massimo, per la nona volta tribuno, imperatore per la quindicesima, censore, console per la settima, designato per l'ottava, padre della patria (rifece l'acquedotto dell'Acqua Marcia per vetustà rovinato) „.

Si vede così anche *otto* espresso dalla forma sottrattiva IIX.

I segni numerali I, V, X, L, C, M hanno la forma di lettere dell'alfabeto, ma non ne derivano, come si vede consultando le iscrizioni più antiche: i segni numerali arcaici vanno assumendo la forma delle lettere per successive modificazioni.

Il segno esprimente *cinquanta*, dopo aver avuto le forme ↓; ⫝; ⊥, è in fine fissato in L (Vedi Esempio N° 11).

Cento è sempre indicato dal segno C; quantunque anche per esso sia probabile la derivazione da una cifra antecedente ⊙, o Θ, cioè la *theta* greca.

Mille è rappresentato durante l'Impero dall'iniziale M; prima aveva la forma ↀ, cioè di un cerchio col diametro verticale, o della lettera Φ dell'alfabeto greco. Con questo segno è figurato nella

10) **Iscrizione sulla colonna di Duilio, dell'anno 250 avanti Cristo, esistente ancora in Roma** (Exempla, N° 91):

(auro) M·CAPTOM·NVMEI·ↀↀↀDCC

Versione: “ l'oro preso fu di monete 3700 „.

La metà di ↀ diede il segno D = 500.

Altre forme del numero *mille* sono ∞, ∼, ⋈, da cui M.

Il segno CIↃ, che rappresenta *mille* in alcuni libri scolastici, è usato per comodità tipografica invece di ↀ.

Alcuni libri di Aritmetica dicono che i Romani sopralineavano il segno rappresentante un numero per indicare che esso doveva essere moltiplicato per *mille*. Così $\overline{V}$ significa 5000.

Abbiamo visto invece da numerosi esempi che $\overline{V}$ significa puramente 5 (Vedi Iscrizione a Mario), e la linea serve a distinguere il numero *cinque* dalla lettera V.

Cercando d'onde l'opinione esposta abbia potuto trarre origine, ecco quanto ho trovato.

I Romani colla parola “ sestertius (nummus) „, genitivo plurale “ sestertium (nummum) „, indicavano una moneta di argento pesante circa un gramma, cioè 20 centesimi di lira; e usavano la voce “ sestertium „ per dire “ mille sesterzi „, lasciando il *mille* sottinteso; “ sestertium „ fu poi considerato come nominativo neutro, e diede il plurale “ sestertia „.

Esempi:

Orazio, Epist. VII, 80, 81:

Dum septem donat sestertia, mutua septem.
Promittit; persuadet uti mercetur agellum.

Versione: " Mentre dona sette mila sesterzi e promette di imprestarne sette mila, lo induce a comperarsi un campicello „.

Gellio, libro V, 2:

Bucephalum emptum talentis tredecim: aeris nostri summa est HS CCCXII.

Versione: " Bucefalo (il cavallo di Alessandro Magno) fu comperato per tredici talenti, somma che, secondo la nostra (di Gellio) moneta, è di 312 mila sesterzi „ [in moneta moderna circa 60 mila lire].

Il segno HS (propriamente IIS = duo semis = due (assi) e mezzo) è ora abbreviazione di " sestertius „, ora, come qui, di " sestertium „ cioè " mille sesterzi „.

E per dare un esempio scolpito, citerò la

11) Iscrizione nel Museo di Napoli, ivi trasportata dalla Calabria. dopo il terremoto del 1783 (Corpus, X, N° 39):

SIGNVM·PROSERPINAE·REFICIVNDVM·STATVENDVMQVE·ARASQVE
REFICIVNDAS·EX·S·C·CVRARVNT·HS·DCCↆXX·

Versione: " curarono la ricostruzione del simulacro e dell'ara di Proserpina, con sesterzi 770 mila „.

12) Iscrizione che ancora si trova in Petelia (Strongoli) (Exempla, N° 1080):

KAPVT·EXTESTAMENTO
HOC·AMPLIVS·REI·P·PETELINORVM DARI VOLO
HS·X̄·N̄·ITEM·VINEAM CAEDICIANAM CVM
. . . .

Versione: " Disposizione testamentaria: questo ancora voglio che sia dato alla città di Petelia, sesterzi diecimila e parimenti la vigna Cediciana... „.

La scrittura HS·$\overline{\text{X}}$·($\overline{\text{N}}$) significa “ sesterzi diecimila (nummi, o monete) „.

Alcuni hanno interpretato HS come “ sesterzi „ e $\overline{\text{X}}$ come “ dieci mila „. Ma è più semplice interpretare HS come “ mille sesterzi „ o “ sestertium „, e $\overline{\text{X}}$ come “ dieci „, in conformità dell'esempio precedente, dove HS . DCCↆXX significa “ settecentosettantamila sesterzi „, senza che il numero sia sopralineato, e in conformità di tutti gli esempi N[i] 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Altre volte, fra il numero scritto e il segno HS, è sottinteso *cento mila*, anzi che *mille*; e come in casi di dubbio si distinguano i sesterzi semplici dalle migliaia e dalle centinaia di migliaia di sesterzi, è cosa che qui non interessa, perchè non più in uso.

La forma delle cifre romane si è conservata fedelmente negli scrittori, fino a tempi vicini a noi.

Censorino, colla data 991 di Roma (cioè 238 anni dopo Cristo), scrive:

“ Solis annum constat ex diebus CCCLXV et diei parte circiter quarta „.

Versione: “ L'anno solare consta di 365 giorni e un quarto circa „.

“ Annus metonicus, quem Meton Atheniensis ex annis undeviginti constituit, ... in eo anno sunt dierum VI milia et DCCCCXL „.

Versione: “ Il ciclo metonico, che Metone ateniese stabilì di 19 anni (e dopo cui le lune ritornano agli stessi giorni del calendario solare), è di 6940 giorni „ (supposto che il ciclo abbia 14 anni comuni e 5 bisestili).

Boezio, morto nell'anno 525, nel libro: “ de institutione arithmetica „, dà (1, 20) le potenze di 2:

I. II. IIII. VIII. XVI. XXXII. LXIIII. CXXVIII.

e poi (2, 23) i numeri triangolari, piramidali, quadrati, cubi:

Trianguli :

I. III. VI. X. XV. XXI. XXVIII. XXXVI. XLV. LV.

Pyramides :

I. IIII. X. XX. XXXV. LVI. LXXXIIII. CXX. CLXV. CCXX.

Tetragoni :

I. IIII. VIIII. XVI. XXV. XXXVI. XLVIIII. LXIIII. LXXXI. C.

Cybi :

I. VIII. XXVII. LXIIII. CXXV. CCXVI. CCCXLIII.

Leonardo Pisano, *nel* “ *Liber Abaci* „, 1202, introduce le nostre cifre “ iuxta modum indorum „, e, paragonandole colle romane, scrive MCCXXXIIII = 1234; MMMMCCCXXI = 4321.

Clavio, nel suo voluminoso libro sul Calendario, del 1612, scrive iiii e xiiii, sotto forma additiva, e ix, xix sotto forma sottrattiva.

La forma IV pare invalsa verso il 1700.

In conclusione, i segni numerali romani in origine non erano lettere, ma segni speciali, che coll'andar del tempo si confusero colle lettere.

I numeri erano rappresentati come somma di segni semplici; così IIII e VIIII: raramente si incontrano le forme sottrattive IX e IIX.

La lineetta sopra i numeri serve a distinguere i segni numerali dalle lettere, ed è dubbio che rappresenti la moltiplicazione per *mille*.

Su una relazione fra l'annualità vitalizia di gruppo e l'annualità semplice, nell'ipotesi di Makeham.

Nota di F. INSOLERA.

SOMMARIO: 1. Introduzione. — 2. Espressione analitica dell'annualità vitalizia continua di gruppo, nell'ipotesi di Makeham. — 3. Limiti di validità della formola. — 4. Relazione fra l'annualità di gruppo e l'annualità semplice. — 5-6. Casi particolari ed esempi di applicazione.

1. — È noto che, secondo che la variazione di mortalità al variare dell'età si assimili all'ipotesi di Gompertz o a quella di Makeham, l'annualità di gruppo, fra elementi di diversa età, si riconduce rispettivamente all'annualità semplice o all'annualità di gruppo, fra elementi coetanei. Sicchè, mentre la prima ipotesi avrebbe il pregio di rendere inutile il calcolo diretto di annualità di gruppo, la seconda fa necessario il calcolo delle annualità su teste di pari età. Ma, per il fatto che la ipotesi di Gompertz non riesce, come l'altra, soddisfacente nella perequazione analitica delle tavole di sopravvivenza, nella pratica delle applicazioni si fa quasi costantementemente ricorso alla ipotesi di Makeham. Calcolate poi le annualità su due teste di pari età, si suole evitare la complessità dei calcoli diretti, per le annualità di gruppi con numero di teste maggiore di due, ricorrendo a metodi di approssimazione, più o meno empirici, interpolando con le annualità su una e due teste, precedentemente preparate (1).

(1) Cfr. H. POTERIN DU MOTEL, *Théorie des assurances sur la vie*, Paris, 1899, pp. 181-182.

In generale, la possibilità di una relazione fra la mortalità di un gruppo di r teste e quella di un gruppo di ρ teste, con $\rho < r$, è stabilita, dipendentemente dall'adozione di una funzione di sopravvivenza d'ordine ρ, da un bel teorema del *Quiquet* (1); teorema che, oltre che dal punto di vista teorico, riesce utile nella pratica delle applicazioni, quando ci si riferisca alla mortalità di gruppi speciali, considerata come funzione di più variabili (2).

Ma, indipendentemente da quella qualunque ipotesi che si adotti per la costruzione di una funzione di sopravvivenza, si può osservare che, in pratica, i valori delle annualità sono in generale, approssimati e compresi in un medesimo campo di variabilità, sia che ci si riferisca ad una sia che ci si riferisca a più teste. Non dovrebbe essere, perciò, impossibile di stabilire una qualche relazione ricorrente che, almeno entro i medesimi limiti di approssimazione, permetta in ogni caso il passaggio da annualità su $m+n$ teste ad annualità su m teste. Che se poi m delle $m+n$ teste della prima annualità sono proprio quelle cui si riferisce l'altra, non v'ha dubbio che, a parità d'ogni altra condizione, solo all'influenza delle m teste intervenienti sia dovuta la differenza fra le due annualità. E allora tutto si riduce a definire analiticamente l'influenza perturbatrice di questi nuovi m elementi.

L'importanza di una tale indagine mi pare indubbia, perchè per tale via si potrebbe derivare, sia pure in maniera approssimata, il valore dell'annualità su di un qualunque numero di teste da quello dell'annualità relativa ad una sola testa del gruppo, indipendentemente dalla legge di sopravvivenza prescelta.

Guidati da questo criterio, abbiamo, intanto, stabilito in questo scritto una relazione rigorosa fra l'annualità al primo decesso di un gruppo di m teste (m intero e > 1) e l'annualità semplice ($m = 1$), nell'ipotesi di Makeham.

---

(1) V. *Représentation algébrique des Tables de survie*, in "Bulletin de l'Institut des Actuaires français", tomo III, 1893.

(2) Cfr. Insolera, *Sulla legge di mortalità d'invalidi*, in "Bollettino dell'Associazione degli attuari italiani", n° 23 (1909), e *Sulla mortalità degli invalidi*, in "Giornale degli Economisti", ottobre 1913.

2. — Si consideri l'annualità al primo decesso continua di un gruppo di m elementi, definita dalla relazione

$$(1)\qquad \bar{a}_{x_1\dots x_m} = \frac{1}{v^{\frac{x_1+\dots+x_m}{m}} l x_1 \dots l x_m} \int_0^{\infty} v^{\frac{x_1+\dots+x_m}{m}+t}\, l(x_1+t)\dots l(x_m+t)\, dt$$

essendo $x_1, x_2, \dots, x_m$ le diverse età attuali degli m elementi del gruppo, v il fattore di sconto, $l(t)$ la funzione di sopravvivenza, t il tempo e l_{x_r} il valore particolare della funzione l per il valore intero x_r della variabile.

Quando per la funzione di sopravvivenza si assuma la ipotesi di Makeham, cioè si ponga

$$l(t) = k\, s^t g^{c^t}$$

con k, s, g e c costanti, la (1) si riduce a

$$(2)\qquad \bar{a}_{x_1\dots x_m} = \int_0^{\infty} v^t s^{mt} g^{(c^t-1)\sum_1^m {}_r c^{x_r}}\, dt.$$

Posto allora

$$(3)\qquad v s^m = e^{-\alpha_m},$$

$$(4)\qquad g^{\sum_1^m {}_r c^{x_r}} = e^{-q_m},$$

e assumendo come nuova variabile d'integrazione la y, definita dalla sostituzione

$$y = q_m c^t,$$

la (2) diviene

$$(2')\qquad \bar{a}_{x_1\dots x_m} = \frac{e^{q_m} q_m^{p_m}}{\log c} \int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m-1} e^{-y}\, dy,$$

in cui, per brevità, s'è posto

$$(5)\qquad \frac{\alpha_m}{\log c} = p_m.$$

Ma, eseguendo una integrazione per parti, si trova

$$\int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m-1} e^{-y}\, dy = \frac{e^{-q_m} q_m^{-p_m}}{p_m} - \frac{1}{p_m} \int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m} e^{-y}\, dy,$$

perciò, sostituendo nella (2') si ricava

$$(2'')\qquad \bar{a}_{x_1 \ldots x_m} = \frac{1}{p_m \log c}\left[1 - e^{q_m} q_m^{p_m} \int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m} e^{-y}\, dy\right].$$

Notiamo subito che è

$$(6)\qquad \int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m} e^{-y}\, dy = \Gamma(1 - p_m) - \int_0^{q_m} y^{-p_m} e^{-y}\, dy,$$

essendo Γ l'integrale euleriano di seconda specie.

Quando poi si operi la sostituzione

$$q_m - y = q_m z$$

e s'integri rispetto a z, si trova

$$(7)\qquad \int_0^{q_m} y^{-p_m} e^{-y}\, dy = e^{-q_m} q_m^{1-p_m} \int_0^1 e^{q_m z} (1 - z)^{-p_m}\, dz;$$

ma è

$$e^{q_m z} = \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^s z^s}{s!},$$

perciò, sostituendo nella (7), abbiamo

$$(7')\qquad \int_0^{q_m} y^{-p_m} e^{-y}\, dy = e^{-q_m} q_m^{1-p_m} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^s}{s!} \mathrm{B}(s+1, 1-p_m),$$

in cui B è l'integrale euleriano di prima specie.

E poichè

$$\mathrm{B}(s+1, 1-p_m) = \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(1-p_m)}{\Gamma(s-p_m+2)}$$

e

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) = s!.$$

così la (7'), fatta ogni riduzione, può mettersi sotto la seguente forma:

$$\int_0^{q_m} y^{-p_m} e^{-y}\, dy = e^{-q_m} q_m^{1-p_m} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^s}{\prod_{r=0}^{r=s} (r - p_m + 1)}.$$

Allora la (6) diviene

$$(6') \quad \int_{q_m}^{\infty} y^{-p_m} e^{-y}\, dy = \Gamma(1 - p_m) - e^{-q_m} q_m^{1-p_m} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^{s}}{\prod\limits_{r=0}^{r=s} (r - p_m + 1)} .$$

e, per la (6′), la (2″) si trasforma nella seguente

$$\bar{a}_{x_1 \ldots x_m} = \frac{1}{p_m \log c} \left[1 - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1 - p_m) + \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^{s+1}}{\prod\limits_{r=0}^{r=s} (r - p_m + 1)}\right].$$

Ma

$$1 + \sum_0^{\infty}{}_s \frac{q_m^{s-1}}{\prod\limits_{r=0}^{r=s} (r - p_m + 1)}$$

è una particolare serie ipergeometrica, cui si perviene dalla funzione ipergeometrica generale

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a \,.\, b}{1!\, c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)} z^2 + \ldots$$

quando vi si faccia

$$a = 1 , \qquad c = 1 - p_m , \qquad z = \frac{q_m}{b}$$

e si passi al limite per $b = \infty$. Perciò, in definitiva, per l'annualità vitalizia di gruppo continua si perviene alla seguente espressione:

$$(\mathrm{I}) \qquad \bar{a}_{x_1 \ldots x_m} = \frac{1}{p_m \log c} \left[F(1 - p_m, q_m) - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1 - p_m)\right],$$

in cui le funzioni F e Γ hanno valore finito e determinato finchè p_m e q_m, che sono positivi, si mantengono minori dell'unità [1].

---

[1] Questo risultato generale, quando vi si faccia $m = 1$, si riduce ad altro già ottenuto da H. A. VAN DER BELT. Ne abbiamo notizia da un fugace cenno in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, tomo

3. — Vediamo per quali valori di m è $p_m < 1$ e $q_m < 1$. Dalle posizioni (5) e (3) si ricava intanto

$$p_m = -\frac{\log v + m \log s}{\log c}, \tag{8}$$

e dalla posizione (4) si ha

$$q_m = -\sum_1^m {}_r\, c^{x_r} . \log g$$

o, per la nota proprietà makehamiana,

$$q_m = -m c^{\xi} \log g, \tag{9}$$

essendo ξ l'*età media* del gruppo di m teste che si considera [1].

Posto poi, per brevità,

$$\log c = \chi, \qquad -\log v = \delta, \qquad -\log s = \sigma, \qquad -\log g = \frac{1}{\gamma},$$

le (8) e (9) diventano

$$p_m = \frac{\delta + m\sigma}{\chi}, \tag{8'}$$

$$q_m = \frac{m c^{\xi}}{\gamma}. \tag{9'}$$

---

vol. IV, p. 531, ma non abbiamo potuto prender visione dello studio del van der Belt.

Anche il Broggi (V. *Matematica attuariale*, Milano, 1906, pp. 221-225) si occupa dell'espressione analitica dell'annualità vitalizia nel caso di $m = 1$ e quando per la funzione di sopravvivenza si sia prescelta la ipotesi di Makeham; ma il procedimento del Broggi è reso alquanto prolisso da non necessarie successioni di integrazioni per parti e il risultato, formalmente più complesso, abbisogna di ulteriori trasformazioni e riduzioni per essere ricondotto alla espressione binomia della (I) del testo.

[1] Quest'età media è ovviamente definita dalla relazione $m c^{\xi} = \sum_1^m {}_r\, c^{x_r}$, cui soddisfa la ipotesi di Makeham.

Affinchè, dunque, sia $p_m < 1$ e $q_m < 1$ i valori di m debbono soddisfare alle due condizioni

$$(10) \qquad m < \frac{\chi - \delta}{\sigma},$$

$$(11) \qquad m < \gamma c^{-\xi},$$

che si desumono rispettivamente da (8') e (9'). Dalla condizione (11) si ricava poi una limitazione per i valori di ξ: invero affinchè essa sia soddisfatta dovrà essere anche [1]

$$(12) \qquad \xi < \frac{\log \gamma - \log m}{\chi}.$$

Le condizioni (10) e (12) definiscono — in corrispondenza ad una data tavola di mortalità, perequata secondo Makeham, e a un tasso d'interesse prestabilito — il valor massimo del numero di elementi di cui può comporsi un gruppo e il valor massimo dell'età media del gruppo, affinchè la relativa annualità possa calcolarsi mediante la formola (I).

4. — Ciò premesso, osserviamo che la espressione (I) dell'annualità vitalizia di gruppo continua ha come fattore $\log c = \chi$, indipendente e dal numero degli elementi del gruppo e dalle loro età. Sicchè si ha il rapporto di proporzionalità

$$\frac{p_m \bar{a}_{x_1 \dots x_m}}{F(1 - p_m, q_m) - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1 - p_m)} = \chi$$

costante, qualunque sia il gruppo che si considera.

Istituendo allora un raffronto fra un gruppo di $m + n$ teste e un gruppo di m teste scelte fra quelle, si ricava, per la relazione precedente:

$$(\mathrm{II}) \qquad \bar{a}_{x_1 \dots x_m \, x_{m+1} \dots x_{m+n}} =$$

$$= \frac{F(1 - p_{m+n}, q_{m+n}) - e^{q_{m+n}} q_{m+n}^{p_{m+n}} \Gamma(1 - p_{m+n})}{F(1 - p_m, q_m) - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1 - p_m)} \, \frac{p_m}{p_{m+n}} \, \bar{a}_{x_1 \dots x_m}.$$

---

[1] Ricordiamo che col simbolo log indichiamo il logaritmo naturale.

È questa una formola ricorrente del tutto generale, che permette un calcolo diretto dell'annualità su un certo numero di teste, soddisfacente alle condizioni (10) e (12), quando sia nota l'annualità su alcune teste del gruppo.

In particolare, se ci si vuol riferire ad un solo elemento del gruppo di m teste, si ha la relazione:

$$\text{(III)} \qquad \bar{a}_{x_1 \ldots x_m} = \frac{F(1-p_m, q_m) - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1-p_m)}{F(1-p_1, q_1^{(r)}) - e^{q_1^{(r)}} q_1^{(r) p_1} \Gamma(1-p_1)} \frac{p_1}{p_m} \bar{a}_{x_r}$$

in cui s'è posto $q_1^{(r)}$ per indicare che s'è scelta la testa (x_r), con r del resto variabile da 1 ad m. Giova, per altro, ricordare che, per la (9) o (9'), è

$$q_m = \sum_1^m {}_r\, q_1^{(r)} = \sum_1^m {}_r \frac{c^{x_r}}{\gamma}.$$

Il passaggio dall'annualità continua all'annualità discreta può compiersi, poi, mediante la nota formola

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta),$$

applicabile anche al caso di più teste, essendo μ_x il tasso istantaneo di mortalità.

In prima approssimazione si può trascurare, nel secondo membro della precedente relazione, l'ultimo termine, e allora dalla formola (III) si ricava agevolmente per l'annualità discreta la seguente relazione:

$$\text{(IV)} \quad a_{x_1 \ldots x_m} = \frac{F(1-p_m, q_m) - e^{q_m} q_m^{p_m} \Gamma(1-p_m)}{F(1-p_1, q_1^{(r)}) - e^{q_1^{(r)}} q_1^{(r) p_1} \Gamma(1-p_1)} \frac{p_1}{p_m} \left(a_{x_r} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

nella quale, dato m e stabiliti la tavola di mortalità e il tasso d'interesse, i soli elementi variabili sono $q_1^{(r)}$, al variare di x_r, e q_m, al variare dell'età media ξ del gruppo $(x_1 x_2 \ldots x_m)$.

Questa formola, nella sua accessione più generale, riesce piuttosto complessa, dovendo calcolare per essa volta a volta due valori numerici della funzione ipergeometrica $F(1-p, q)$ e due valori numerici dell'espressione $e^q q^p$.

Ma, poichè i valori di q_m, che sono compresi fra 0 e 1, crescono col crescere del numero m degli elementi del gruppo, quando si abbia da fare con gruppi di pochi elementi, così che q_m sia abbastanza piccolo, i termini della serie ipergeometrica $F(1-p, q)$ decrescono rapidamente, quasi come quelli dello sviluppo di e^q, sicchè ci si può limitare alla considerazione dei termini nelle prime o, al più, nelle seconde potenze di q. Limitatamente alla considerazione delle prime potenze, si ha perciò

$$F(1-p \,.\, q) \simeq 1 + \frac{q}{1-p}, \qquad e^q \simeq 1 + q\,.$$

Siccome poi

$$c^t = 1 + \frac{t \log c}{1!} + \frac{t^2 (\log c)^2}{2!} + \ldots,$$

quando si ponga

$$f(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2, \tag{13}$$

con

$$\rho_0 = \frac{1}{\gamma}, \qquad \rho_1 = \rho_0 \log c\,, \qquad \rho_2 = \rho_1 \frac{\log c}{2}, \tag{14}$$

si inferisce, per la (9) o (9′),

$$\begin{cases} q_m = m f(\xi) \\ q_1^{(r)} = f(x_r). \end{cases} \tag{15}$$

Allora, in luogo della (IV), può considerarsi la relazione

$$a_{x_1 \ldots x_m} = \frac{(1+q_m)[1-q_m{}^{p_m}\,\Gamma(2-p_m)]-p_m}{(1+q_1{}^{(r)})[1-q_1{}^{(r)p_1}\,\Gamma(2-p_1)]-p_1}\,\frac{p_1(1-p_1)}{p_m(1-p_m)}\left(a_{x_r}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} \tag{IV′}$$

facilmente calcolabile quando, mediante le (15), si siano trovati i valori di q_m e $q_1{}^{(r)}$.

I coefficienti della funzione $f(t)$, non dipendendo nè dal numero degli elementi del gruppo nè dalle loro età, rimangono costanti per una data tavola di mortalità e sono perciò da calcolarsi una volta tanto. Sicchè il calcolo di q_m e $q_1{}^{(r)}$ riesce molto semplice.

5. — Per poter meglio trarre le conclusioni pratiche di quanto precede, concreteremo adesso l'indagine riferendoci ad una data tavola di mortalità, perequata secondo la ipotesi di Makeham, e a un particolare tasso d'interesse.

Quando si adotti il tasso d'interesse annuo $i = 0{,}035$ e si prenda a considerare la tavola di mortalità RF (*rentiers français*), si trova

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \chi = 0{,}0954 \\ \sigma = 0{,}0056 \\ \delta = 0{,}0344 \\ \gamma = 1632{,}7 \end{array} \right.$$

e la condizione (10) si risolve in

$$m < \frac{0.0610}{0.0056} = 10{,}89.$$

Si conclude: *la scelta della tav. RF e del tasso 3,5 %₀ rende applicabili le formole I, II, III e IV a gruppi il numero dei cui elementi non superi dieci.*

Aumentando il tasso d'interesse diminuisce il valore dell'espressione a secondo membro della condizione (10), ma molto lentamente. Così, p. es., il precedente risultato rimane ancora valido anche per il tasso del 4 %; mentre la scelta del 3 % farebbe estendere la validità delle formole anche a gruppi con 11 elementi.

Quando poi si cambi tavola di mortalità si avranno risultati diversi da quelli della RF. Ma, per tavole derivate da masse fra loro non grandemente eterogenee, i risultati riescono poco differenti: così, p. es., la tavola di mortalità AF (*assurés français*) dà luogo alle medesime conclusioni cui siamo pervenuti per la tavola RF.

Tenendo poi presente la condizione (12), e i valori (16) delle costanti, si può agevolmente stabilire quali sono, per la tavola RF, i valori massimi dell'età media ξ in corrispondenza ai possibili valori di m da 1 a 10. Si trova, indicando con ξ_M tale massimo in anni interi:

$m =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
$\xi_M =$	77,	70,	66,	63,	60,	58,	57,	55,	54,	53.

Valori di ξ_M non molto diversi si troverebbero quando si considerassero altre tavole: così, per es., per la tavola AF tali massimi oscillano fra 73 anni, per $m = 1$, e 47, per $m = 10$.

Nella pratica delle applicazioni tali limiti, in generale, non sono superati.

6. — Si noti adesso che il parametro p_m, per la (8) ovvero (8′) che lo definisce, scelta la tavola di mortalità e stabilito il tasso d'interesse, non dipende che da m. Epperò se m è passibile, come s'è visto per la tavola RF, di 10 valori da 1 a 10, anche p_m e $\Gamma(1 - p_m)$ sono suscettibili di 10 valori numerici distinti, che possono essere calcolati una volta tanto per quella data tavola.

Tenendo pertanto presenti i valori (16), mediante la (8′) e la tavola dei valori logaritmici della funzione Γ [1], si può costruire, per la tavola RF, la seguente tabellina:

m	p_m	$1 - p_m$	$\Gamma(1 - p_m)$
1	0,4193	0,5807	1,534
2	4780	5220	1,700
3	5387	4633	1,913
4	5954	4046	2,190
5	6541	3457	2,577
6	7128	2872	3.134
7	7715	2285	4.071
8	8302	1798	5,451
9	8889	1111	8,532
10	9476	0524	18,556

E allora, per la tavola RF, dalla (IV′) si ricava, fra l'annualità su due teste e quella semplice, la seguente relazione:

$$(\text{V})\quad a_{xy} = \frac{0{,}24\,[1 + f(x) + f(y)]\,[(1 - 0{,}89(f(x) + f(y))^{0{,}48}] - 0{,}12}{0{,}25\,[1 + f(x)]\,[1 - 0{,}89\,f(x)^{0{,}42}] - 0{,}10}\left(a_x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2},$$

in cui i coefficienti numerici sono caratteristici della tav. RF.

---

[1] Cfr. W. P. Elderton, *Frequency-curves and correlation*, London, 1906, p. 166.

In particolare se $x = y$ sarà, per le (15),

$$f(\xi) = f(x) = f(y)$$

e ci si riduce alla formola

$$(\mathrm{V}') \qquad a_{x,x} = \frac{0,24\,(1+2f)\,(1-1,23\,f^{0,48}) - 0,12}{0,25\,(1+f)\,(1-0,89\,f^{0,42}) - 0,10}\left(a_x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,,$$

essendo

$$f \simeq 0,0006 + 0,00006\,x + 0,000003\,x^2.$$

Se, per es., è $x = 30$, sarà

$$f(30) \simeq 0,005$$

e per la (V′)

$$a_{30,30} \simeq \frac{17}{20}\left(a_{30} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,.$$

Ma è [1]

$$a_{30} = 19,175\,,$$

risulterà perciò

$$a_{30,30} \simeq 16,23.$$

Il calcolo consueto porta a 16,28 [1].

Le formole (V) e (V′) rendono del tutto inutile la laboriosa costruzione di tavole di commutazione su due teste.

Torino, ottobre 1916.

---

[1] Cfr. H. Poterin du Motel, loc. cit., Tav. VI, p. 363.

Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie.

Nota di GUSTAVO SANNIA (a Cagliari).

§ 1. — La trattazione del Borel.

1. — Il BOREL (*) ha generalizzato in due modi il concetto di *somma* s di una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

Col primo:

$$s = \lim_{x=\infty} e^{-x} s(x), \tag{2}$$

ove

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}, \quad (s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n). \tag{3}$$

Col secondo:

$$s = \int_0^{\infty} e^{-x} u(x), \tag{4}$$

ove

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \tag{5}$$

è la *serie di potenze associata alla* (1) (**).

(*) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

(**) Per maggior semplicità non considereremo che serie a termini reali. Solo infine (§ 4) ci occuperemo di serie a termini complessi. Il parametro x che comparisce qui ed in seguito sarà sempre supposto *non negativo*.

Naturalmente, affinchè (1) sia *sommabile* occorre: nel primo caso che $s(x)$ sia una trascendente intera e che il limite (2) esista e sia finito; nel secondo caso che $u(x)$ sia una trascendente intera e che l'integrale improprio (4) sia *convergente* (cioè esista e sia finito).

Il Borel ritenne del tutto equivalenti le due definizioni di somma e, abbandonando la prima, si attenne definitivamente alla seconda, che è senza dubbio più maneggevole in pratica. Però C. H. Hardy (*) ha fatto osservare che esse non sono del tutto equivalenti e dànno origine perciò a due metodi di sommazione leggermente distinti: *le serie sommabili col primo metodo sono sommabili anche col secondo (non viceversa) e sono caratterizzate dalla convergenza dell'integrale improprio*

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-x} u'(x)\, dx,$$

ove $u'(x)$ *è la derivata prima di* $u(x)$ (nº 7).

Per evitare confusioni, diremo che (1) *è sommabile col metodo di Borel* (senz'altro), e scriveremo *è sommabile* B, quando (4) converge; diremo che (1) *è sommabile col primo metodo di Borel*, e scriveremo *è sommabile* B′, quando (2) esiste ed è finito.

2. — Posta la definizione (4), il Borel osservò (**) che " lo studio delle serie sommabili B presenta lo stesso inconveniente dello studio delle serie che sono convergenti senza esserlo assolutamente ". Egli intendeva alludere a ciò: che, come per le serie semplicemente convergenti, così anche per le serie sommabili B, non vale la *regola di Cauchy* per la formazione di una serie che abbia per somma il prodotto delle somme di due serie date.

Per ovviare a ciò, egli abbandonò lo studio delle serie sommabili B in generale e si limitò a considerare solo quelle che chiamò *assolutamente sommabili* e per le quali dimostrò esser valida la regola di Cauchy.

(*) Hardy, " Quarterly Journal of Mathematics ", vol. 35, 1903, p. 25.
(**) Loc. cit., p. 99.

Con l'acquisto della validità di questa regola, il metodo di sommazione B diventò adatto ad estese applicazioni; però non si può disconoscere che fu un acquisto pagato a caro prezzo. Infatti una serie (1) è *assolutamente sommabile* quando l'integrale (4). non solo converge, ma converge *assolutamente* insieme con gli infiniti altri integrali impropri

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-x} u^{(r)}(x)\, dx \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

ove $u^{(r)}(x)$ è la derivata r-esima della serie $u(x)$.

Come si vede, le serie assolutamente sommabili formano una classe estremamente particolare fra le serie sommabili B, tanto che, come ha osservato Hardy (*), *non comprende neppure tutte le serie convergenti* (**), pur comprendendo tutte le assolutamente convergenti e molte serie indeterminate.

3. — Orbene noi dimostreremo che per conseguire la validità della regola di Cauchy è inutile imporre alle serie sommabili B tutte le infinite condizioni imposte dal Borel, e che invece basta porre l'*unica* condizione che l'integrale (6) sia convergente semplicemente.

Ricordando il teorema di Hardy (n° 1), possiamo anche dire che: *la regola di Cauchy sussiste per le serie sommabili* B'.

È questo il risultato più importante della presente Nota (n° 11).

Esso rimette in onore il metodo B', ed estende la proprietà più cospicua delle serie assolutamente sommabili ad una classe di serie, tanto più ampia, che è appena leggermente più ristretta di quella costituita da tutte le serie sommabili B.

Dimostreremo pure che la regola di Cauchy vale più generalmente per una serie sommabile B ed una serie sommabile B' (n° 10, lemma II).

Anche per eseguire il prodotto di due serie sommabili B daremo una regola (n° 10, lemma I) che, se non è proprio quella di Cauchy, ne differisce di pochissimo e, in un certo senso, offre gli stessi vantaggi (n° 13).

(*) Loc. cit., p. 22.
(**) Loc. cit., p. 25.

4. — Questi risultati fanno sorgere due quistioni intimamente collegate: *Perchè il Borel impose condizioni così sovrabbondanti per conseguire la validità della regola di Cauchy? I nostri risultati rendono forse inutile la considerazione delle serie assolutamente sommabili?*

Per rispondere a queste domande è necessario fare una digressione sulle condizioni che conviene imporre ad ogni metodo di sommazione.

Anzitutto si vuole che ogni metodo X di sommazione non muti il significato dell'ente serie quando esso ne ha già uno col metodo classico o *ordinario* (è convergente), così che non distrugga i risultati già acquisiti in Analisi con questo metodo. Deve dunque essere soddisfatta la seguente

Condizione di coerenza (*): *Ogni serie convergente con somma* s *dev'essere sommabile* X *con ugual somma.*

Inoltre affinchè un metodo X sia suscettibile di applicazioni bisogna che, come accade nel metodo ordinario, le principali operazioni che si vogliono eseguire sulle somme delle serie si riflettano in altrettanti operazioni da eseguirsi sulle serie medesime.

Convenendo di rappresentare il numero somma di una serie mediante la serie stessa, si possono compendiare nelle cinque formole seguenti le operazioni elementari valide nel metodo ordinario (la (V) sotto condizioni restrittive):

(I) $(u_0+u_1+u_2+\ldots)+k=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+(u_n+k)+u_{n+1}+\ldots,$

(II) $(u_0+u_1+u_2+\ldots)\,k=ku_0+ku_1+ku_2+\ldots.$

(III) $(u_0+u_1+\ldots)+(v_0+v_1+\ldots)=(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\ldots,$

(IV) $u_0+u_1+u_2+\ldots=u_0+(u_1+u_2+\ldots),$

(V) $(u_0+u_1+\ldots)(v_0+v_1+\ldots)=w_0+w_1+w_2+\ldots,$

ove

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0,$$

Ora: quali di queste proprietà algoritmiche conviene esigere da ogni altro metodo X?

(*) *Condition of consistency* di Hardy.

Le sole proprietà (I), (II), (III) e (V), perchè esse dànno un algoritmo sufficiente per poter adoperare nei calcoli le serie sommabili X. Infatti, in virtù di esse, noi possiamo sottoporle a qualsiasi operazione algebrica intera, lineare o non, e ciò basta per le applicazioni.

E queste operazioni noi possiamo bene eseguirle senza l'aiuto della proprietà (IV), e quindi anche senza che ci sia permesso di permutare o associare neppure due soli termini di una serie (*).

Dunque non è necessario esigere anche la proprietà (IV).

E poichè non è necessario, il farlo è inopportuno. È evidente infatti che l'imporre condizioni non indispensabili non può che limitare la generalità e la potenzialità dei metodi di sommazione, il che è contrario allo scopo precipuo che ci proponiamo ricercando i metodi stessi, che è quello di estendere per quanto è possibile il significato ordinario delle serie, pur senza distruggerne i caratteri essenziali.

E che le limitazioni che può subire un metodo X per la imposizione della (IV) debbano esser gravi si capisce da ciò: che, in sostanza, la (IV) esige che in una serie si debba poter applicare la proprietà associativa ad *infiniti termini* consecutivi.

Oltre a ciò, l'esigere la proprietà (IV) è in contraddizione col concetto che noi dobbiamo avere di una serie, e che è così espresso dal Borel (**): " *On doit considérer dans une série le rang de chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme*; une série n'est pas seulement une collection dénombrable de nombres; c'est une telle collection, dont les éléments sont rangés dans un ordre déterminé, et cet ordre importe autant que la valeur des éléments. Cette manière de considérer les séries: une collection de nombres *dont chacun a un rang déterminé* est, à mon avis, tout à fait essentielle en Analyse ".

Orbene passando dal primo membro della uguaglianza (IV) al secondo, o viceversa, *tutti i termini cambiano di rango a partire dal secondo.*

(*) Infatti dalla proprietà (IV) seguirebbe che è lecito permutare o associare un numero finito di termini di una serie.

(**) Loc. cit., pp. 17-18.

Concludendo: noi riteniamo che non convenga imporre *a priori* la proprietà (IV) a nessun metodo di sommazione, e che un metodo nel quale essa non sussista (purchè sussistano le altre) sia ciò malgrado un metodo *completo*, cioè un metodo al quale nulla manchi per essere introdotto utilmente in analisi.

Tale è il metodo B'.

Che se poi per un dato metodo la proprietà (IV) si presenterà *spontaneamente* valida (anche solo in parte, come accade nei metodi B e B'), essa sarà certamente la benvenuta; ma dovremo considerarla come proprietà secondaria e particolare del metodo considerato.

5. — Contrariamente a ciò, il Borel ritenne (*) che la proprietà (IV) dovesse imporsi ad ogni metodo, e perciò l'impose al suo che non la consentiva.

E fu per ottenere la validità della proprietà (IV). *e non della regola* (5) *di* Cauchy, *che il Borel fu costretto a porre le condizioni così restrittive che reggono la sommabilità assoluta.*

Con ciò abbiamo risposto alla prima domanda postaci in principio del n° 4.

In quanto alla seconda, possiamo dire, dopo quanto precede, che:

Per la teoria aritmetica (**) *delle serie sommabili* B *la considerazione delle serie assolutamente sommabili è inutile, e il loro posto può essere degnamente occupato dalle serie sommabili* B′ (***).

(*) Loc. cit., p. 15.

(**) Per uno sviluppo della teoria dei metodi B e B', dal punto di vista aritmetico, più completo di quello fattone dal Borel, cfr. l'eccellente trattato del Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, art. 99 e segg. London, 1908.

(***) Resterà poi a decidere se le serie sommabili B' possano anche sostituire le assolutamente sommabili nello studio delle *serie di funzioni* e, in particolare, delle *serie di potenze*.

§ 2. — Lemmi.

6. Lemma I. — *Se* f(x) *è una funzione continua insieme con la sua derivata prima* f′(x) *per* $x \geq 0$, *e se l'integrale improprio*

$$\int_0^\infty e^{-x} f'(x)\, dx \tag{8}$$

è convergente, è pure convergente l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx; \tag{9}$$

si ha inoltre

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} f(x) = 0. \tag{10}$$

Per la dimostrazione, cfr. Hardy (loc. cit.), oppure Bromwich (loc. cit., art. 101) nell'ipotesi che $f(x)$ sia una trascendente intera; ma questa ipotesi non interviene nella dimostrazione.

Osservazione. *Non* si può, viceversa, dedurre la convergenza dell'integrale (8) da quella dell'integrale (9), cioè: *può accadere che l'integrale* (9) *converga, anche se non converge l'integrale* (8).

Hardy ha dato un esempio di ciò in loc. cit., p. 30. Trovasi anche in Bromwich, loc. cit., art. 101.

Lemma II. *Le due serie*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} \qquad e \qquad u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!}, \tag{11}$$

ove

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \tag{12}$$

hanno il medesimo intervallo di convergenza uniforme; e per ogni punto x *di esso si ha*

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x} s(x)\right] = e^{-x} u'(x). \tag{13}$$

Detta $s'(x)$ la serie ottenuta derivando $s(x)$ termine a termine

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

si ha

(14)
$$\frac{d}{dx}[e^{-x} s(x)] = e^{-x}[s'(x) - s(x)] =$$
$$= e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \frac{x^n}{n!} = e^{-x} u'(x);$$

sicchè *formalmente* sussiste la (13) (*).

Ricordiamo che l'intervallo di convergenza *uniforme* di una serie di potenze è anche quello della sua derivata e che in esso convergono entrambe assolutamente.

Se dunque x appartiene all'intervallo di convergenza uniforme di $s(x)$, e quindi di $s'(x)$, x apparterrà pure all'analogo intervallo di $s'(x) - s(x) = u'(x)$. In seguito a ciò tutte le operazioni successivamente eseguite nella (14) sono lecite, e la (13) sussiste.

Viceversa: supponiamo che x appartenga all'intervallo di convergenza uniforme (a, b) di $u'(x)$.

In tal caso non possiamo invertire tutti i passaggi eseguiti nella (14). Precisamente: possiamo ben passare dall'ultimo membro al penultimo, poichè $u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, *ma non possiamo passare da questo all'antipenultimo*, perchè nulla sappiamo delle due serie $s(x)$ e $s'(x)$. Perciò procederemo diversamente.

Moltiplichiamo le due serie uniformemente e assolutamente convergenti in (a, b):

(15)
$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \frac{x^n}{n!},$$

(16)
$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

(*) La formula (13) è servita ad Hardy (loc. cit., p. 25) per confrontare i metodi B e B' (cfr. n. 7). Però, tanto l'Hardy, quanto il Bromwich (loc. cit., art. 114) si limitano a dimostrarla formalmente. Che la dimostrazione formale non basti, è evidente; ma ciò risulterà meglio dalla nostra dimostrazione.

Otteniamo la serie uniformemente convergente in (a, b):

$$(17) \qquad e^{-x} u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\left[s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1} \frac{x^n}{n!}\right],$$

ove

$$v_n = n! \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \frac{s_{n+1-r} - s_{n-r}}{(n-r)!} = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{n}{r} (s_{n+1-r} - s_{n-r})$$

$$= \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{n}{r} s_{n+1-r} - \sum_{r=1}^{r=n+1} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} s_{n-1-r}$$

$$= s_{n+1} + \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\right] s_{n+1-r} + (-1)^{n+1} s_0$$

e infine

$$(18) \qquad v_n = \sum_{r=0}^{r=n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} s_{n+1-r}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dalla (17) risulta che, per dimostrare la (13), basta verificare che, moltiplicando la serie

$$(19) \qquad s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

per la serie esponenziale e^x, entrambe uniformemente convergenti in (a, b), si ottiene la serie $s(x)$ (11).

È più facile però verificare che moltiplicando $s(x)$ per la (16) si ha la (19). Ed infatti nasce la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{s_{n-r}}{(n-r)!} = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{n}{r} s_{n-r}$$

che, per la (18), si riduce appunto ad $s(x)$ (11).

§ 3. — Nuova trattazione dei metodi di Borel.

7. — Supponiamo che la serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \tag{20}$$

sia sommabile B' con somma s, sicchè

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} \tag{21}$$

sia una trascendente intera ed inoltre

$$s = \lim_{x=\infty} e^{-x} s(x). \tag{22}$$

Per il lemma II, sussiste la (13), da cui

$$e^{-x} s(x) - u_0 = \int_0^x e^{-x} u'(x)\, dx. \tag{13'}$$

Esiste il limite per $x = \infty$ del primo membro e quindi anche quello del secondo, cioè converge l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} u'(x)\, dx, \tag{23}$$

e si ha

$$s = u_0 + \int_0^\infty e^{-x} u'(x)\, dx. \tag{24}$$

Ne segue, per il lemma I, che esiste anche l'integrale improprio

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx, \tag{25}$$

e si ha

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} u(x) = 0. \tag{26}$$

Inoltre, integrando per parti, si ha

$$(27) \qquad \int_0^x e^{-x} u'(x)\, dx = e^{-x} u(x) - u_0 + \int_0^x e^{-x} u(x)\, dx$$

ed, al limite per $x = \infty$, si ha, per le (24) e (26),

$$(28) \qquad s = \int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx .$$

Da tutto ciò raccogliamo che, se una serie è sommabile B' con somma s, è anche sommabile B (n° 1) con ugual somma, ed inoltre converge l'integrale (23).

Viceversa, se converge (23), onde $u'(x)$ è una trascendente intera, sussiste la (13) del lemma II, da cui si deduce la (13'). Poichè esiste ed è finito il limite (23) del secondo membro, esiste ed è finito anche il limite del primo, cioè esiste il limite (22), onde la serie (20) è sommabile B'.

Da tutto ciò raccogliamo: *Le serie sommabili* B' *sono anche sommabili* B *con ugual somma* (*ma non viceversa*) (*); *e fra le serie sommabili* B *sono caratterizzate dalla convergenza dell'integrale* (23).

Ne segue che: *il metodo di sommazione* B' *è leggermente meno potente del metodo* B (**).

8. — La condizione di coerenza (n° 4) è soddisfatta tanto dal metodo B che dal metodo B', cioè:

Ogni serie convergente con somma s *è sommabile* B' (*e quindi anche* B) *con ugual somma.*

Si ha di più: *le serie divergenti* (*non indeterminate*) *non sono sommabili* B *e quindi neppure sommabili* B'.

Tutto ciò è noto (***).

(*) Perchè dalla convergenza di (25) non segue quella di (23) (lemma I, osservazione).

(**) Un metodo X è *meno potente* di un altro Y (e questo *più potente* di X) quando ogni serie sommabile X è anche sommabile Y, e non viceversa.

(***) Cfr. Bromwich, loc. cit., art. 100 e 114.

9. — Or passiamo ad esaminare la validità delle proprietà (I), ... (V) elencate nel nº 4.

Dimostriamo anzitutto che (IV) non sussiste integralmente. Paragoniamo perciò le due serie (20) e

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{29}$$

Le serie di potenze ad esse associate sono rispettivamente $u(x)$ e $u'(x)$, quindi le loro somme sono

$$s = \int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx\,, \qquad s' = \int_0^\infty e^{-x} u'(x)\, dx\,,$$

quando questi integrali convergono.

Se (29) è sommabile B (o B') s' converge, quindi (lemma I) converge anche s e sussiste la (26), quindi (20) è sommabile B, anzi è sommabile B' (nº 7); inoltre la (27) dà, al limite per $x = \infty$, $s' = -u_0 + s$. Dunque *l'uguaglianza*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = u_0 + (u_1 + u_2 + \ldots) \tag{30}$$

sussiste se la serie del secondo membro è sommabile B, *ed allora la serie del primo membro è sommabile* B'. Lo stesso può dirsi dell'uguaglianza

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots), \tag{31}$$

come si vede subito con applicazione ripetuta della (30).

Se 20 è sommabile B, sicchè s converge, non si può dire se s' converga o non (lemma I, osserv.), e quindi se (29) sia sommabile o non, e se la (30) sussista oppur no.

Ma se (20) è sommabile B', s' converge, quindi (29) è sommabile B e, come poc'anzi, si vede che sussiste la (30). Ma non possiamo dire che sussiste la (31), perchè non possiamo applicare alla serie (29) la formola (30), essendo la (29) soltanto sommabile B e non B'.

Possiamo anche esprimere tutto ciò dicendo:

A. *Ad una serie sommabile* B (*o* B') *è lecito premettere un numero finito di termini; si ottiene una serie sommabile* B' *la cui*

somma è uguale a quella della prima aumentata della somma dei termini premessi.

B. *Da una serie sommabile* B′ *è lecito rimuovere il solo primo termine (in generale); si ottiene una serie sommabile* B (*non* B′ *in generale) la cui somma è uguale a quella della prima diminuita del valore di quel termine.*

C. *Da una serie sommabile* B, *ma non* B′, *non è lecito rimuovere neppure il suo primo termine.*

Poichè dunque la proprietà (IV) non sussiste integralmente, possiamo dire (cfr. la nota al nº 4) che: *in una serie sommabile* B *o* B′ *non è lecito applicare la proprietà commutativa o associativa neppure ad un numero finito di termini.*

10. — Sussistono integralmente le proprietà (I), (II), (III) del nº 4. Precisamente

Teorema I. *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \qquad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots$$

è sommabile B (*o* B′), *tale è anche l'altra e la somma della seconda è uguale a quella della prima aumentata di* k.

Teorema II. *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \qquad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \dots \qquad (k \neq 0)$$

è sommabile B (*o* B′), *tale è anche l'altra e la somma della seconda è uguale a quella della prima moltiplicata per* k.

Teorema III. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili B (*o* B′) *con somma* u *e* v *rispettivamente, tale è anche la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots$$

ed ha per somma u + v.

Le dimostrazioni dei teoremi II e III son ben facili. Il teorema I può dimostrarsi direttamente, oppure indirettamente, applicando II e III alle due serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \, .$$
$$0 + 0 + \dots + 0 + k + 0 + 0 + \dots ,$$

dove k occupa il posto $(n+1)$-esimo. La seconda è convergente ed ha per somma k, quindi è anche sommabile B e B' e con ugual somma.

11. — Or passiamo all'importante proprietà V del n° 4, dimostrando anzitutto due lemmi, interessanti per sè stessi.

LEMMA I. *Se due serie*

$$(32) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \dots , \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili B *ed hanno per somma* u *e* v *rispettivamente, la serie*

$$(33) \qquad 0 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots ,$$

ove

$$(34) \qquad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 ,$$

è sommabile B *ed ha per somma* $\mathrm{w} = \mathrm{uv}$.

Per ipotesi

$$u = \int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx = \lim_{a=\infty} \int_0^{2a} e^{-x} u(x)\, dx ,$$
$$v = \int_0^\infty e^{-y} v(y)\, dy = \lim_{a=\infty} \int_0^{2a} e^{-y} v(y)\, dy ,$$

ove

$$(35) \qquad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!} , \qquad v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{y^n}{n!}$$

sono trascendenti intere; quindi

$$(36) \qquad w = uv = \lim_{a=\infty} \int_0^{2a} e^{-x} u(x)\, dx \, . \int_0^{2a} e^{-y} v(y)\, dy = \lim_{a=\infty} J(a) ,$$

ove $J(a)$ è l'integrale doppio

$$J(a) = \iint e^{-(x+y)} u(x) v(y) \, dx \, dy$$

esteso al quadrato $OABC$ del piano (x, y), che ha per vertici i punti

$$O(0, 0), \quad A(2a, 0), \quad B(2a, 2a), \quad C(0, 2a).$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$x + y = 2\xi, \qquad y - x = 2\eta.$$

Il quadrato $OABC$ si trasformerà nel quadrato $O'A'B'C'$ del piano (ξ, η), che ha per vertici

$$O'(0, 0), \quad A'(a, -a), \quad B'(2a, 0), \quad C'(a, a),$$

ed $J(a)$ si trasformerà nell'integrale

$$J(a) = 2 \iint e^{-2\xi} u(\xi - \eta) v(\xi + \eta) \, d\xi \, d\eta$$

esteso a questo quadrato. Quindi

$$(37) \qquad J(a) = 2 \int_0^{2a} e^{-2\xi} W(2\xi) \, d\xi = \int_0^a e^{-\xi} W(\xi) \, d\xi,$$

ove

$$(38) \qquad W(2\xi) = \int_{-\xi}^{\xi} u(\xi - \eta) v(\xi + \eta) \, d\eta.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, incominciamo col formare il prodotto delle due serie (35) con la regola di CAUCHY; otteniamo:

$$(51) \qquad u(x) v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, y), \qquad w_n(x, y) = \sum_{r=0}^{n} u_r v_{n-r} \frac{x^r y^{n-r}}{r! \, (n-r)!};$$

quindi

$$(39) \qquad u(\xi - \eta) v(\xi + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi - \eta, \xi + \eta),$$

ove

$$(40) \qquad w_n(\xi - \eta, \xi + \eta) = \sum_{r=0}^{n} u_r v_{n-r} \frac{(\xi - \eta)^r (\xi + \eta)^{n-r}}{r!(n-r)!} .$$

La (51) è una serie di polinomii uniformemente convergente nel quadrato $OABC$ (*), quindi (39) è una serie di polinomii uniformemente convergente nel quadrato corrispondente $O'A'B'C'$: perciò, fissato ξ, è integrabile termine a termine rispetto a η.

Dunque la (38) può scriversi

$$W(2\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\xi}^{\xi} w_n(\xi - \eta, \xi + \eta)\, d\eta$$

o, per la (40),

$$W(2\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{u_r v_{n-r}}{r!(n-r)!} \int_{-\xi}^{\xi} (\xi - \eta)^r (\xi + \eta)^{n-r}\, d\eta \; (**)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} u_r v_{n-r} \frac{(2\xi)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{(2\xi)^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

da cui

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Ora questa è la serie di potenze associata alla serie (33) e, poichè dalle (36) e (37) si ha

$$w = uw = \int_0^{\infty} e^{-\xi}\, W(\xi)\, d\xi ,$$

(*) Perchè moltiplicando le trascendenti intere (35) *termine a termine*, nasce una serie *doppia* che è una trascendente intera nelle due variabili x e y, e perciò uniformemente convergente nel quadrato $OABC$; e tale si conserva aggruppandone i termini di ugual grado in modo da ottenere la serie semplice (51).

(**) Si vede facilmente, con successive integrazioni per parti, che *se* p e q *sono interi non negativi*,

$$\int_{-\xi}^{\xi} (\xi - \eta)^p (\xi + \eta)^q\, d\eta = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!} (2\xi)^{p+q+1} .$$

se ne deduce che la serie (33) è sommabile B ed ha per somma $w = uv$, giusta l'enunciato.

LEMMA II. *Se di due serie* (32) *sommabili* B *con somma* u *e* v, *rispettivamente, una è sommabile* B′, *la serie*

$$(41) \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

è sommabile B *ed ha per somma* w = uv (*).

Supponiamo che la prima delle (32) sia sommabile B' e che la seconda sia sommabile B. Allora (n° 9, B) la serie

$$(42) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sarà sommabile B ed avrà per somma $u - u_0$.

Applicando il lemma I a questa serie ed alla seconda delle (32), si deduce che la serie

$$0 + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_2 v_0) + (u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \dots$$

ossia

$$(43) \qquad 0 + (w_1 - u_0 v_1) + (w_2 - u_0 v_2) + (w_3 - u_0 v_3) + \dots$$

è sommabile B ed ha per somma $v(u - u_0)$.

Anche la serie

$$(44) \qquad u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + u_0 v_3 + \dots$$

è sommabile B con somma $u_0 v$ (n° 10, teorema I), quindi (n° 10, teorema III) sarà pure sommabile B la serie (41), che si ottiene sommando (43) e (44) termine a termine, ed avrà per somma

$$w = v(u - u_0) + u_0 v = uv.$$

(*) HARDY ha dimostrato (loc. cit., p. 43) un teorema analogo a quello di MERTENS relativo al metodo di sommazione ordinario, cioè: *se due serie* (32) *sono sommabili* B, *con somma* u *e* v *rispettivamente, ed una è sommabile assolutamente, la serie* (41) *è sommabile* B *ed ha per somma* w = uv. — Il nostro lemma II costituisce un'ampia generalizzazione di questo teorema, sostituendovi alla sommabilità assoluta la sommabilità B'.

Teorema V (per le serie sommabili B'). *Se due serie*

$$(45) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili B', *con somma* u *e* v *rispettivamente, la serie*

$$(46) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \dots, \quad ove \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

è sommabile B' *ed ha per somma* w = uv.

Poichè la seconda delle (45) è sommabile B' con somma v, la serie

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

è sommabile B con somma $v - v_0$ (n° 9, B). Applicando il lemma II a questa serie ed alla prima delle (45), che è sommabile B', si ha che la serie

$$v_1 u_0 + (v_1 u_1 + u_2 v_0) + (v_1 u_2 + v_2 u_1 + v_3 u_0) + \dots$$

ossia

$$(w_1 - u_1 v_0) + (w_2 - u_2 v_0) + (w_3 - u_3 v_0) + \dots$$

è sommabile B ed ha per somma $u(v - v_0)$.

È pure sommabile B la serie (n° 10, teorema I)

$$u_1 v_0 + u_2 v_0 + u_3 v_0 + \dots$$

ed ha per somma $(u - u_0) v_0$; dunque (n° 10. teorema III) è pure sommabile B la serie

$$(47) \qquad w_1 + w_2 + w_3 + \dots,$$

ottenuta sommando le due ultime termine a termine, ed ha per somma

$$u(v - v_0) + (u - u_0) v_0 = uv - u_0 v_0 = uv - w_0.$$

Ne segue (n° 9, A) che sarà sommabile B' e con somma uv la serie che si ottiene da (47) preponendovi il termine w_0, cioè la (46). c. d. d.

12. — Dai teoremi I, II, III e V per le serie sommabili B', si deduce il

TEOREMA. *Se si ha un polinomio in un numero finito di variabili*

$$P(u, v, w, \ldots)$$

e si sostituiscono queste variabili con altrettante serie sommabili B', *si ottiene una serie sommabile* B', *la cui somma è il valore che assume il polinomio quando al posto delle variabili si sostituiscono le somme delle serie corrispondenti.*

Le operazioni si eseguono come se si trattasse di serie assolutamente convergenti, *con l'avvertenza però di non eseguire mai cambiamenti nell'ordine dei termini nè associazioni di essi* (neppure in numero finito).

13. — La regola di CAUCHY per la formazione di una serie che abbia per somma il prodotto delle somme di due date serie, non sussiste per le serie sommabili B. Però il lemma I del n° 11 dà un'altra regola che ben poco ne differisce.

D'altra parte è da notare che la regola di CAUCHY è *una* fra le tante regole che si possono assumere per la formazione della serie-prodotto e deve la sua scelta al fatto importantissimo che: *applicata a due serie di potenze dà ancora una serie di potenze.*

Orbene si vede subito che *questo fatto sussiste ancora se si assume la regola fornita dal lemma I.*

L'unica differenza sta in ciò che, mentre la regola di CAUCHY applicata a due serie di potenze *ad esponenti tutti positivi* dà ancora una serie dello stesso tipo, *l'altra regola dà una serie avente anche un termine ad esponente negativo e con un coefficiente nullo.*

Infatti questa regola applicata alle due serie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

dà la serie

$$0 + a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots,$$

il cui primo termine può ben scriversi Ox^{-1}, almeno per $x \neq 0$.

Concludendo: se conveniamo di sostituire alla regola di Cauchy quella fornita dal lemma I, anche il metodo B può dirsi un metodo *completo*, nel senso spiegato nel n° 4. Vale allora il teorema del n° 12 con le stesse avvertenze.

§ 4. — Serie a termini complessi.

14. — Tutto ciò che abbiamo detto sin qui si estende alle serie a termini complessi

$$(a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots,$$

sol che si convenga: di chiamare *sommabile* B (o B') una di tali serie quando sono entrambe sommabili B (o B') le due serie a termini reali

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \qquad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots;$$

e di chiamare *somma* della serie il numero $a + ib$, ove a e b sono le somme delle due serie a termini reali.

Però, anzichè operare sulla coppia di termini a serie reali, si può operare direttamente su quella a termini complessi.

Perchè, posto

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!},$$

si ha

$$a = \int_0^{\infty} e^{-x} a(x)\, dx, \qquad b = \int_0^{\infty} e^{-x} b(x)\, dx,$$

onde

$$a + ib = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \frac{x^n}{n!} \right] dx$$

d'accordo con la definizione di *somma* data per le serie a termini reali. Ecc.

Cagliari, 10 ottobre 1916.

Sollecitazioni nell'armatura dell'ala di un biplano in linea di volo, prodotte dal sostegno dell'aria.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Si considera una delle armature dell'ala, o l'anteriore o la posteriore; quel che si dice per l'una vale anche per l'altra.

L'armatura è costituita da due longheroni, il superiore e l'inferiore, collegati da montanti e diagonali, per es., secondo lo schema indicato dalla fig. 1 (pag. 88), nella quale le diagonali disegnate con linea piena rappresentano i tiranti effettivamente in azione in linea di volo, mentre le altre, tratteggiate, rimangono inerti.

Quantunque non sia indispensabile per la teoria, tuttavia, per le semplificazioni che ne derivano, ammetteremo, come del resto si verifica ordinariamente nella pratica, che il prodotto EJ del modulo di elasticità normale per il momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse di flessione sia costante ed eguale per i due longheroni. Altra semplificazione concessa è di trascurare la variazione elastica di lunghezza dei montanti, ossia di ritenere costante la distanza fra le curve elastiche dei due longheroni in corrispondenza dei varî montanti; od, in altri termini, le ordinate y_1, y_2, ... delle due curve elastiche (fig. 2) contate, in corrispondenza delle dette verticali, a partire dai rispettivi assi primitivi possono ritenersi le stesse.

La travatura, la quale si comporta evidentemente come una mensola incastrata in corrispondenza del piano medio dell'apparecchio, è, nel tipo rappresentato dalla fig. 1, nove volte iperstatica: ma in grazia delle premesse, e ritenuto, come si ammette in simili calcoli, che, in linea di volo, la pressione prodotta contro l'ala dal sostegno dell'aria si faccia risentire in egual modo sui due longheroni, il superiore e l'inferiore, le curve ela-

stiche dei medesimi devono risultare congruenti, ed allora è possibile scrivere relazioni semplicissime fra gli sforzi nelle diagonali e quelli nei montanti.

Fig. 1

Fig. 2

Chiamiamo X', X''', X^{V}, X^{VII}, X^{IX} gli sforzi iperstatici nei montanti ed X'', X^{IV}, X^{VI}, X^{VIII} le componenti verticali, pure iperstatiche, degli sforzi nelle diagonali attive. Nel calcolo algebrico, il senso di tali sforzi viene supposto, al solito, positivo per tutti; nel calcolo numerico il risultato negativo per le X dispari indicherà che i montanti risultano, invece, compressi. Dalla congruenza fra le curve elastiche dei due longheroni, i quali si comportano evidentemente come travi continue sorrette nei punti d'attacco dei montanti e delle diagonali, deriva l'eguaglianza delle reazioni d'appoggio corrispondenti. Indicando quindi con $2P$ il carico applicato lungo il montante di carlinga, carico portato per metà da ciascuno dei due longheroni, si può scrivere (fig. 3_a, pag. 90):

$(X' + X'')$ del longherone sup. $= - X'$ del longherone inf.

$(X''' + X^{\mathrm{IV}})$ „ „ $= -(X'' + X''')$ „ „

. . . .

$(X^{\mathrm{IX}} + P)$ „ „ $= -(X^{\mathrm{VIII}} + X^{\mathrm{IX}}) + P$ „ „

ossia

$$(1)\quad X' = -\frac{X''}{2};\quad X''' = -\frac{X''+X^{\mathrm{IV}}}{2};\quad X^{\mathrm{V}} = -\frac{X^{\mathrm{IV}}+X^{\mathrm{VI}}}{2};$$

$$X^{\mathrm{VII}} = -\frac{X^{\mathrm{VI}}+X^{\mathrm{VIII}}}{2};\quad X^{\mathrm{IX}} = -\frac{X^{\mathrm{VIII}}}{2}.$$

Si ritiene, in pratica, che la pressione esercitata dall'aria, in linea di volo, sia distribuita in modo uniforme su tutta la lunghezza dei longheroni, e colla medesima intensità per amendue.

Supposti liberati i due longheroni da tutte le aste di parete, cioè supposte nulle tutte le X, ciascuno di essi verrà riguardato come una mensola orizzontale incastrata orizzontalmente in corrispondenza della mezzeria dell'apparecchio. Indichiamo con ζ_1, ζ_2, ... ζ_5 le ordinate, in corrispondenza dei montanti, della rispettiva curva elastica prodotta dalla pressione dell'aria. L'ordinata generica ζ_r, se s'indica con p la pressione per unità lineare, ha notoriamente l'espressione (fig. 3_b):

$$(2)\qquad \zeta_r = \frac{pL^4}{8EJ}\left[1 - \frac{4}{3}\,\frac{\mathbf{x}_r}{L} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{x}_r}{L}\right)^4\right].$$

S'immagini poi uno qualunque dei due longheroni cimentato soltanto da una forza unitaria, normale al suo asse, agente successivamente lungo i diversi montanti. Si otterranno certe curve elastiche schizzate nelle fig. $3_{c,d,e,f,g}$ le cui ordinate η in corrispondenza dei montanti portano due indici, indicanti il primo il numero d'ordine del montante, il secondo il numero del montante lungo il quale agisce la forza fittizia unitaria. Le espressioni generali delle η sono

$$(3)\qquad \eta_{r,r} = 1\,\frac{(l-x_r)^3}{3EJ},$$

$$(4)\quad \eta_{r,i} = \eta_{i,r} = 1\,\frac{(l-x_r)^3}{3EJ}\left[1 - \frac{3}{2}\,\frac{x_i - x_r}{l - x_r} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_i - x_r}{l - x_r}\right)^3\right],\ (r<i)$$

nelle quali si deve fare $x_1 = 0$.

Ciò posto, il teorema di reciprocità di Maxwell, applicato all'uno e poi all'altro longherone, fornisce le seguenti equazioni:

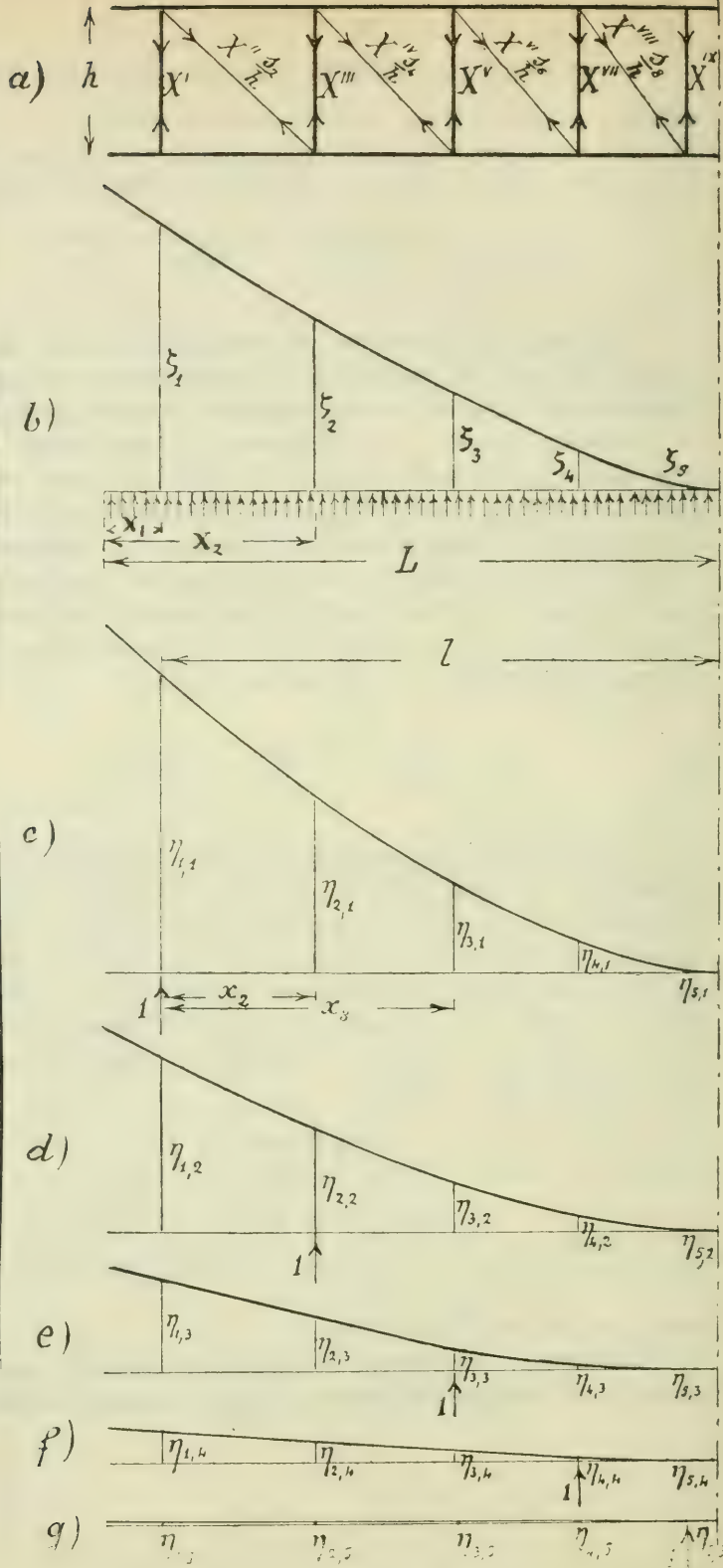



Fig. 3.

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\zeta_1 - (X' + X'')\,\eta_{1,1} - (X''' + X^{\text{IV}})\,\eta_{2,1} - (X^{\text{V}} + X^{\text{VI}})\,\eta_{3,1} - (X^{\text{VII}} + X^{\text{VIII}})\,\eta_{4,1} - (X^{\text{IX}} + P)\,\eta_{5,1} = \\
&= \zeta_1 + X'\eta_{1,1} + (X'' + X''')\,\eta_{2,1} + (X^{\text{IV}} + X^{\text{V}})\,\eta_{3,1} + (X^{\text{VI}} + X^{\text{VII}})\,\eta_{4,1} + (X^{\text{VIII}} + X^{\text{IX}} - P)\,\eta_{5,1} = y_1 \\[1em]
&\zeta_2 - (X' + X'')\,\eta_{1,2} - (X''' + X^{\text{IV}})\,\eta_{2,2} - (X^{\text{V}} + X^{\text{VI}})\,\eta_{3,2} - (X^{\text{VII}} + X^{\text{VIII}})\,\eta_{4,2} - (X^{\text{IX}} + P)\,\eta_{5,2} = \\
&= \zeta_2 + X'\eta_{1,2} + (X'' + X''')\,\eta_{2,2} + (X^{\text{IV}} + X^{\text{V}})\,\eta_{3,2} + (X^{\text{VI}} + X^{\text{VII}})\,\eta_{4,2} + (X^{\text{VIII}} + X^{\text{IX}} - P)\,\eta_{5,2} = y_2 \\[1em]
&\zeta_3 - (X' + X'')\,\eta_{1,3} - (X''' + X^{\text{IV}})\,\eta_{2,3} - (X^{\text{V}} + X^{\text{VI}})\,\eta_{3,3} - (X^{\text{VII}} + X^{\text{VIII}})\,\eta_{4,3} - (X^{\text{IX}} + P)\,\eta_{5,3} = \\
&= \zeta_3 + X'\eta_{1,3} + (X'' + X''')\,\eta_{2,3} + (X^{\text{IV}} + X^{\text{V}})\,\eta_{3,3} + (X^{\text{VI}} + X^{\text{VII}})\,\eta_{4,3} + (X^{\text{VIII}} + X^{\text{IX}} - P)\,\eta_{5,3} = y_3 \\[1em]
&\zeta_4 - (X' + X'')\,\eta_{1,4} - (X''' + X^{\text{IV}})\,\eta_{2,4} - (X^{\text{V}} + X^{\text{VI}})\,\eta_{3,4} - (X^{\text{VII}} + X^{\text{VIII}})\,\eta_{4,4} - (X^{\text{IX}} + P)\,\eta_{5,4} = \\
&= \zeta_4 + X'\eta_{1,4} + (X'' + X''')\,\eta_{2,4} + (X^{\text{IV}} + X^{\text{V}})\,\eta_{3,4} + (X^{\text{VI}} + X^{\text{VII}})\,\eta_{4,4} + (X^{\text{VIII}} + X^{\text{IX}} - P)\,\eta_{5,4} = y_4 \\[1em]
&\zeta_5 - (X' + X'')\,\eta_{1,5} - (X''' + X^{\text{IV}})\,\eta_{2,5} - (X^{\text{V}} + X^{\text{VI}})\,\eta_{3,5} - (X^{\text{VII}} + X^{\text{VIII}})\,\eta_{4,5} - (X^{\text{IX}} + P)\,\eta_{5,5} = \\
&= \zeta_5 + X'\eta_{1,5} + (X'' + X''')\,\eta_{2,5} + (X^{\text{IV}} + X^{\text{V}})\,\eta_{3,5} + (X^{\text{VI}} + X^{\text{VII}})\,\eta_{4,5} + (X^{\text{VIII}} + X^{\text{IX}} - P)\,\eta_{5,5} = y_5 .
\end{aligned}
\right.
$$

Si ha inoltre (fig. 2) che la differenza delle ordinate della curva elastica in corrispondenza di due montanti consecutivi, per es., $y_2 - y_3$, risulta eguale all'allungamento elastico subìto dal tirante di lunghezza s_4 diviso per il seno dell'angolo d'inclinazione di s_4 all'orizzontale, cioè per $\frac{h}{s_4}$; cosicchè, indicando con EF il prodotto del modulo di elasticità normale per l'area della sezione trasversale del tirante, si può scrivere:

$$
(6) \left\{ \begin{array}{ll} y_1 - y_2 = \dfrac{X'' s_2^3}{h^2 E'' F''}; & y_2 - y_3 = \dfrac{X^{IV} s_4^3}{h^2 E^{IV} F^{IV}}; \\ y_3 - y_4 = \dfrac{X^{VI} s_6^3}{h^2 E^{VI} F^{VI}}; & y_4 - y_5 = \dfrac{X^{VIII} s_8^3}{h^2 E^{VIII} F^{VIII}} \end{array} \right.
$$

e sostituendo alle y le precedenti espressioni, per es., quelle relative al longherone inferiore, si ottengono le equazioni (7) a pag. 93, le quali in grazia delle (1) si trasformano nelle equazioni (8) a pag. 94, *che contengono soltanto le* X *d'indice pari.*

È notevole l'espressione semplice dei coefficienti delle X, e come, nel quadro dei medesimi, essi (in grazia del teorema di Maxwell) siano simmetrici rispetto alla diagonale discendente verso destra, il che ne abbrevia il calcolo numerico.

Queste equazioni (8) risolvono il problema, in quanto che, ricavate da queste le X d'indice pari, per mezzo delle (1) risultano determinate anche le X d'indice dispari, e, note tutte le X, non soltanto sono conosciuti gli sforzi nelle aste di parete, ma rimane perfettamente determinato anche il regime statico dei longheroni. Così il momento flettente in corrispondenza di un montante qualunque, per es., del terzo a partire dall'estremità libera, viene espresso come segue:

a) per il longherone superiore

$$M_3 = \frac{p\,\mathbf{x}_3^2}{2} - (X' + X'')\,x_3 - (X''' + X^{IV})\,(x_3 - x_2),$$

b) per il longherone inferiore

$$M_3 = \frac{p\,\mathbf{x}_3^2}{2} + X' x_3 + (X'' + X''')\,(x_3 - x_2),$$

le quali espressioni, in virtù delle (1), si equivalgono.

$$
(7) \left\{
\begin{aligned}
&(\eta_{1,1}-\eta_{1,2})\,X' + \left(\eta_{2,1}-\eta_{2,2}-\frac{s_2^{\,3}}{h^2 E'' F''}\right) X'' + (\eta_{2,1}-\eta_{2,2})\,X''' + (\eta_{3,1}-\eta_{3,2})\,(X^{\mathrm{IV}}+X^{\mathrm{V}}) + \\
&\qquad + (\eta_{4,1}-\eta_{4,2})\,(X^{\mathrm{VI}}+X^{\mathrm{VII}}) + (\eta_{5,1}-\eta_{5,2})\,(X^{\mathrm{VIII}}+X^{\mathrm{IX}}-P) + \zeta_1-\zeta_2 = 0 \\
&(\eta_{1,2}-\eta_{1,3})\,X' + (\eta_{2,2}-\eta_{2,3})\,(X''+X''') + \left(\eta_{3,2}-\eta_{3,3}-\frac{s_4^{\,3}}{h^2 E^{\mathrm{IV}} F^{\mathrm{IV}}}\right) X^{\mathrm{IV}} + (\eta_{3,2}-\eta_{3,3})\,X^{\mathrm{V}} + \\
&\qquad + (\eta_{4,2}-\eta_{4,3})\,(X^{\mathrm{VI}}+X^{\mathrm{VII}}) + (\eta_{5,2}-\eta_{5,3})\,(X^{\mathrm{VIII}}+X^{\mathrm{IX}}-P) + \zeta_2-\zeta_3 = 0 \\
&(\eta_{1,3}-\eta_{1,4})\,X' + (\eta_{2,3}-\eta_{2,4})\,(X''+X''') + (\eta_{3,3}-\eta_{3,4})\,(X^{\mathrm{IV}}+X^{\mathrm{V}}) + \left(\eta_{4,3}-\eta_{4,4}-\frac{s_6^{\,3}}{h^2 E^{\mathrm{VI}} F^{\mathrm{VI}}}\right) X^{\mathrm{VI}} + \\
&\qquad + (\eta_{4,3}-\eta_{4,4})\,X^{\mathrm{VII}} + (\eta_{5,3}-\eta_{5,4})\,(X^{\mathrm{VIII}}+X^{\mathrm{IX}}-P) + \zeta_3-\zeta_4 = 0 \\
&(\eta_{1,4}-\eta_{1,5})\,X' + (\eta_{2,4}-\eta_{2,5})\,(X''+X''') + (\eta_{3,4}-\eta_{3,5})\,(X^{\mathrm{IV}}+X^{\mathrm{V}}) + (\eta_{4,4}-\eta_{4,5})\,(X^{\mathrm{VI}}+X^{\mathrm{VII}}) + \\
&\qquad + \left(\eta_{5,4}-\eta_{5,5}-\frac{s_8^{\,3}}{h^2 E^{\mathrm{VIII}} F^{\mathrm{VIII}}}\right) X^{\mathrm{VIII}} + (\eta_{5,4}-\eta_{5,5})\,(X^{\mathrm{IX}}-P) + \zeta_4-\zeta_5 = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left[\eta_{1,1}-\eta_{1,2}-(\eta_{2,1}-\eta_{2,2})+2\,\frac{s_2^{\,3}}{h^2E''F''}\right]X''+[\eta_{2,1}-\eta_{2,2}-(\eta_{3,1}-\eta_{3,2})]\,X^{\text{IV}}+\\
&\quad+[\eta_{3,1}-\eta_{3,2}-(\eta_{4,1}-\eta_{4,2})]\,X^{\text{VI}}+[\eta_{4,1}-\eta_{4,2}-(\eta_{5,1}-\eta_{5,2})]\,X^{\text{VIII}}=2\,[\zeta_1-\zeta_2-P(\eta_{5,1}-\eta_{5,2})]\\
&[\eta_{1,2}-\eta_{1,3}-(\eta_{2,2}-\eta_{2,3})]\,X''+\left[\eta_{2,2}-\eta_{2,3}-(\eta_{3,2}-\eta_{3,3})+2\,\frac{s_4^{\,3}}{h^2E^{\text{IV}}F^{\text{IV}}}\right]X^{\text{IV}}+\\
&\quad+[\eta_{3,2}-\eta_{3,3}-(\eta_{4,2}-\eta_{4,3})]\,X^{\text{VI}}+[\eta_{4,2}-\eta_{4,3}-(\eta_{5,2}-\eta_{5,3})]\,X^{\text{VIII}}=2\,[\zeta_2-\zeta_3-P(\eta_{5,2}-\eta_{5,3})]\\
&[\eta_{1,3}-\eta_{1,4}-(\eta_{2,3}-\eta_{2,4})]\,X''+[\eta_{2,3}-\eta_{2,4}-(\eta_{3,3}-\eta_{3,4})]\,X^{\text{IV}}+\\
&\quad+\left[\eta_{3,3}-\eta_{3,4}-(\eta_{4,3}-\eta_{4,4})+2\,\frac{s_6^{\,3}}{h^2E^{\text{VI}}F^{\text{VI}}}\right]X^{\text{VI}}+[\eta_{4,3}-\eta_{4,4}-(\eta_{5,3}-\eta_{5,4})]\,X^{\text{VIII}}=2\,[\zeta_3-\zeta_4-P(\eta_{5,3}-\eta_{5,4})]\\
&[\eta_{1,4}-\eta_{1,5}-(\eta_{2,4}-\eta_{2,5})]\,X''+[\eta_{2,4}-\eta_{2,5}-(\eta_{3,4}-\eta_{3,5})]\,X^{\text{IV}}+[\eta_{3,4}-\eta_{3,5}-(\eta_{4,4}-\eta_{4,5})]\,X^{\text{VI}}+\\
&\quad+\left[\eta_{4,4}-\eta_{4,5}-(\eta_{5,4}-\eta_{5,5})+2\,\frac{s_8^{\,3}}{h^2E^{\text{VIII}}F^{\text{VIII}}}\right]X^{\text{VIII}}=2\,[\zeta_4-\zeta_5-P(\eta_{5,4}-\eta_{5,5})]
\end{aligned}
\right.
$$

Gli sforzi di taglio nelle sezioni adiacenti, a sinistra e a destra, del detto montante, hanno rispettivamente le espressioni

$$\left.\begin{aligned} T_2'' &= p\mathbf{x}_3 - \Sigma_1^{IV} X \\ T_3' &= p\mathbf{x}_3 - \Sigma_1^{VI} X \end{aligned}\right\} \text{ per il longherone superiore}$$

$$\left.\begin{aligned} T_2'' &= p\mathbf{x}_3 - \Sigma_1^{III} X \\ T_3' &= p\mathbf{x}_3 - \Sigma_1^{V} X \end{aligned}\right\} \quad \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{inferiore}$$

anch'esse equivalenti.

Finalmente lo sforzo assiale, per es., nel campo terzo, cioè quello seguente il terzo montante, viene così espresso

$$-N_3 = X'' \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{h} + X^{IV} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{h} + X^{VI} \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3}{h} \quad \text{per il longh. sup.}$$

$$N_3 = X'' \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{h} + X^{IV} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{h} \qquad \text{" inf.}$$

lo sforzo assiale, di compressione, in un campo del longherone superiore è eguale allo sforzo assiale, di tensione, nel campo seguente del longherone inferiore.

Calcolate le X d'indice pari risultano noti anche, dalle (6), i dislivelli degli appoggi, e si può avere una verifica dell'operato calcolando i momenti dei longheroni in corrispondenza dei montanti colle equazioni dei tre momenti. Queste, partendo dall'estremità libera dell'ala e andando verso la carlinga (tenendo conto che la pressione p è rivolta verso l'alto, e che i dislivelli decrescono verso la carlinga) si scrivono come appresso, ponendo per brevità $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = l_1$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = l_2$ ... e notando che M_1, staticamente determinato, è il momento prodotto dalla pressione dell'aria contro lo sbalzo $\mathbf{x}_1$ del longherone, e cioè $M_1 = \frac{p\mathbf{x}_1^2}{2}$.

$$9) \left\{\begin{aligned} l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 &= \frac{1}{4} p (l_1^3 + l_2^3) - 6EJ\left(\frac{y_2 - y_3}{l_2} - \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) \\ l_2 M_2 + 2(l_2 + l_3) M_3 + l_3 M_4 &= \frac{1}{4} p (l_2^3 + l_3^3) - 6EJ\left(\frac{y_3 - y_4}{l_3} - \frac{y_2 - y_3}{l_2}\right) \\ l_3 M_3 + 2(l_3 + l_4) M_4 + l_4 M_5 &= \frac{1}{4} p (l_3^3 + l_4^3) - 6EJ\left(\frac{y_4 - y_5}{l_4} - \frac{y_3 - y_4}{l_3}\right) \\ l_4 M_4 + 2(l_4 + l_5) M_5 + l_5 M_5 &= \frac{1}{4} p (l_4^3 + l_5^3) + 6EJ\frac{y_4 - y_5}{l_4}. \end{aligned}\right.$$

La conoscenza dei dislivelli teorici serve di verifica per la prova statica dell'apparecchio.

Abbiamo fatto di questo metodo un'applicazione numerica ad un biplano militare, del quale ci furono gentilmente forniti i dati, determinando, innanzi tutto, sperimentalmente il prodotto EJ per i longheroni, ed il modulo E per le diagonali attive formate di piccoli cavi di filo d'acciaio. Quest'applicazione, di cui facemmo omaggio all'Autorità militare, e che non può essere resa di pubblica ragione, ha dimostrato la bontà del metodo; noteremo soltanto che in questo, come in molti problemi relativi a sistemi iperstatici, l'approssimazione nel calcolo numerico, affinchè soprattutto le sollecitazioni nei longheroni risultino giustamente valutate, dev'essere molto spinta, tanto che conviene sostituire l'uso di una macchina calcolatrice all'impiego delle tavole logaritmiche a sette decimali, senza che per ciò il lavoro risulti soverchiamente lungo e penoso.

L'applicazione completa ad un caso pratico, cioè il calcolo delle ζ e delle η e la risoluzione delle equazioni, non richiede più di una giornata di lavoro.

Torino, novembre 1916.

La durata dello splendere del Sole sull'orizzonte di Torino nel sessennio 1899-1905

(MANCA L'ANNO 1903).

Nota del Prof. B. RAINALDI
già Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino.

(Seconda Parte) (*).

TABELLA IV.

(Tempo vero locale).

Numero medio dei minuti in cui, per ogni ora di ciascuna decade, splendette il sole, con le relative medie decadiche sessennali.

(1) Per la — Prima Parte — vedi " Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ", vol. LI, pag. 1310.

MESE	Decade	4h - 5h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2a							
	3a							
Febbraio	1a							
	2a							
	3a							
Marzo	1a							
	2a							
	3a							
Aprile	1a							
	2a							
	3a							
Maggio	1a							
	2a							
	3a	0,5						0,1
Giugno	1a	2,5						0,4
	2a							
	3a	1,0						0,2
Luglio	1a	5,2						**0,9**
	2a							
	3a							
Agosto	1a							
	2a							
	3a							
Settembre	1a							
	2a							
	3a							
Ottobre	1a							
	2a							
	3a							
Novembre	1a							
	2a							
	3a							
Dicembre	1a							
	2a							
	3a							

MESE	Decade	$5^h - 6^h$						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2a							
	3a							
Febbraio	1a							
	2a							
	3a							
Marzo	1a							
	2a							
	3a							
Aprile	1a							
	2a							
	3a							
Maggio	1a				3,0			0,5
	2a	7,5						1,3
	3a	11,8						1,9
Giugno	1a	22,0			2,4	3,6		4,7
	2a	2,0	11,5		10,0	0,7		4,0
	3a	18,5	15,0		4,0	2,0		6,6
Luglio	1a	33,5	20,0		7,4	12,0		12,3
	2a	10,5	18,5					4,8
	3a	9,1	10,9		0,9	1,8	0,7	3,9
Agosto	1a		11,0		5,7			2,8
	2a		7,0		2,0	2,1		1,9
	3a			6,0	0,9	2,6		1,6
Settembre	1a							
	2a							
	3a							
Ottobre	1a							
	2a							
	3a							
Novembre	1a							
	2a							
	3a							
Dicembre	1a							
	2a							
	3a							

MESE	Decade	6h – 7h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2ª							
	3ª							
Febbraio	1ª							
	2ª							
	3ª							
Marzo	1ª	1,8	9,0	8,1	3,0			3,7
	2ª	9,0	18,0		4,5			5.3
	3ª	15,0		3,6	5,5	2,9		4,3
Aprile	1ª	10,0	6,5			2,8		3,2
	2ª	2,5	8,0	30,5		1,0	1,5	7,3
	3ª	14,5	7,2	7,5		2,5		5,3
Maggio	1ª	0,5	11,7	16,2	12,0	17,5		9,7
	2ª	16,9	8,8	12,0	16,5	28,8	3,5	14.4
	3ª	16,4	14,5	18,2	32,7	31,0	2,7	19,3
Giugno	1ª	49,3	12,5	17,5	16,4	13,5	6,5	19,3
	2ª	12,0	30,0	19,7	22,2	25,8	9,5	19,9
	3ª	29,0	27,5	17,4	28,4	17,0	11,0	21,7
Luglio	1ª	51,2	48,9	13,0	39,4	43,1	16,0	**35,3**
	2ª	40.8	48,3	11,5	22,5	33,5	17,9	29,1
	3ª	37,6	44,2	6,9	13,5	39,4	12,7	20,7
Agosto	1ª	24,0	37,6		21,8	24,4	18,0	21,0
	2ª	6,0	24,1		17,5	38,6	17,0	17,2
	3ª	8,0	2,0	20,8	6,2	37,2	0,8	12,5
Settembre	1ª	3,5	8,8	3,6	27,4	6,7	4,0	8,8
	2ª	8,5	6,0	0,6	11,0	1,0		4,5
	3ª	0,2			1,2			0,2
Ottobre	1ª							
	2ª	4,0						0.7
	3ª							
Novembre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Dicembre	1ª							
	2ª							
	3ª							

MESE	Decade	$7^h - 8^h$						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,3
	2ª			1,0				0,2
	3ª		0.9	20,3			1,8	3,8
Febbraio	1ª			5,7				1,0
	2ª	1,0	15,5	12,5		6,5		5,9
	3ª	5,0	17,5	17,5				6,7
Marzo	1ª	18,3	23,0	21,0	9,0		10,5	13,6
	2ª	30,0	30,0		31,5	2,0	5,5	16,5
	3ª	24,8	10,2	16.8	27,3	8,6	6,8	15,8
Aprile	1ª	37,2	26,6	7,5	15.5	25,1	21,0	22,2
	2ª	8,5	44,8	54,0		6.4	15,2	21,5
	3ª	30,0	24.0	19,3		23,0	18,2	19.1
Maggio	1ª	25,5	26,5	35,3	23,5	33,6	7,4	25,3
	2ª	28.0	24,0	28,7	16,1	45,1	18,0	26,7
	3ª	18.3	33,5	37,7	38,2	41,3	10,9	30,0
Giugno	1ª	52,5	25,5	41,0	15,0	15,8	18,0	28,0
	2ª	13,5	36,2	32,8	26,3	30,7	21,0	26,8
	3ª	36,0	31,5	25,4	35,9	33,7	26,0	31,4
Luglio	1ª	43.5	43.3	31.5	53.0	52.1	28.6	42,0
	2ª	45,5	52,7	42,1	27.5	50,9	24,0	32,9
	3ª	42,3	56,2	15,6	37.8	52,5	22,8	30,8
Agosto	1ª	41.0	39,1	10,0	34,8	42,6	30,2	26,1
	2ª	28,2	28,2	30.0	27,1	50,9	38,7	29,2
	3ª	24,8	6,5	27,0	12,6	35,9	25,9	18,0
Settembre	1ª	22,5	24,4	7,5	42.9	17,3	28,6	31,8
	2ª	29,8	26,0	8,9	21,9	11,8	3,0	11,9
	3ª	13,5	4.5		18.2	12,7	4,7	8,9
Ottobre	1ª	0,5	18,5	8,5	6,1	20,5	20,6	12,5
	2ª	9,0	19,0	8,5	1,2	5,2	7,8	8,5
	3ª	6,1	26.4	6,8		3,3		7,1
Novembre	1ª			4,5				0.8
	2ª			5,0				0,8
	3ª							
Dicembre	1ª		15,0	15,0				5,0
	2ª			7,1				1,4
	3ª			4,3				0,7

MESE	Decade	8h – 9h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	8,0	5,0	0,5	18,0	0,0	0,0	5,3
	2a	12,8	10,6	17,1				6,8
	3a		7,5	33,6			2,7	7,3
Febbraio	1a	4,5		17,1		4,0	2,4	4,7
	2a	13,5	28,7	26,0		13,0	3,0	14,0
	3a	25,0	37,9	42,5		3,0	3,3	18,6
Marzo	1a	29,5	33,0	24,3	24,3		22,0	22,2
	2a	34,3	31,0		36,0	12,0	12,0	20,9
	3a	35,4	21,1	24,3	33,0	17,2	21,8	25,5
Aprile	1a	36,9	39,8	11,8	21,7	35,2	31,2	29,4
	2a	23,2	56,5	54,0	6,0	15,8	24,0	29,9
	3a	30,0	31,7	16,8	7,0	31,0	30,7	24,5
Maggio	1a	36,0	25,6	39,7	34,4	36,6	16,5	31,5
	2a	35,5	24,0	25,9	18,0	49,4	17,8	28,4
	3a	22,1	36,8	38,9	36,4	40,2	11,8	31,0
Giugno	1a	57,0	26,5	33,5	13,5	18,1	25,3	29,0
	2a	19,5	32,0	35,8	31,0	35,2	21,1	29,1
	3a	38,0	33,0	40,7	40,5	26,9	34,0	35,5
Luglio	1a	44,7	38,9	36,6	47,7	51,8	30,0	41,6
	2a	47,0	47,5	55,3	30,0	48,0	37,3	**44,2**
	3a	47,7	57,1	25,5	38,0	48,3	35,5	42,0
Agosto	1a	41,0	39,9	15,0	35,6	41,8	30,3	33,9
	2a	44,7	31,6	51,4	40,2	46,5	46,7	43,5
	3a	37,8	5,0	42,3	25,9	46,5	29,1	31,1
Settembre	1a	33,8	25,6	8,5	42,9	24,9	36,1	28,6
	2a	38,0	32,2	15,0	24,0	15,5	8,9	22,3
	3a	17,8	16,0		23,7	15,0	16,0	14,8
Ottobre	1a	5,5	26,5	17,5	10,2	35,0	35,7	30,1
	2a	9,5	33,3	17,5	14,3	25,3	26,3	21,0
	3a	18,8	37,3	7,3	4,5	12,0	0,7	13,4
Novembre	1a			9,0		7,8	0,9	3,0
	2a			6,0		10,7	3,0	3,3
	3a	4,0	3,0				0,7	**1,3**
Dicembre	1a	2,6	20,0	28,5			1,9	8,8
	2a		9,0	15,7		12,2	0,5	6,2
	3a	3,0	7,5	8,6		4,0		3,9

MESE	Decade	9h – 10h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	20,6	0,5	11,5	18,0	0,0	23,7	12,4
	2a	24,4	22,8	33,3		6,0	8,2	15,8
	3a	5,5	20,9	48,1	5,5	3,9	15,6	16,6
Febbraio	1a	9,7		17,1		4,0	33,0	10,6
	2a	16,0	33,4	35,3	9,0	17,5	28,4	23,3
	3a	40,6	35,9	51,0	11,3	10,3	7,5	26,1
Marzo	1a	34,4	36,5	30,1	25,1		30,0	26,0
	2a	36,0	33,8	0,3	47,5	18,5	22,3	26,4
	3a	42,6	24,5	26,1	38,2	25,7	32,6	31,6
Aprile	1a	40,0	36,0	11,0	28,7	43,6	36,0	32,6
	2a	25,5	55,5	53,8	6,0	17,0	27,0	30,8
	3a	30,0	36,7	16,7	24,0	31,0	29,8	28,0
Maggio	1a	35,8	27,2	34,5	36,0	31,7	16,5	30,3
	2a	35,5	24,0	42,4	30,3	42,3	14,8	31,2
	3a	29,4	42,0	45,2	42,3	30,7	24,8	35,7
Giugno	1a	58,5	21,3	42,0	19,3	33,5	21,0	32,6
	2a	21,5	33,0	44,1	30,1	33,1	29,5	31,9
	3a	33,0	29,5	53,3	34,3	35,6	30,9	36,1
Luglio	1a	46,0	45,3	51,4	44,0	45,4	38,5	45,1
	2a	50,3	46,8	55,0	35,8	44,5	46,0	**46,4**
	3a	48,2	57,4	22,5	39,1	52,8	40,0	43,3
Agosto	1a	44,5	42,9	15,0	32,7	40,3	32,1	34,6
	2a	51,5	34,0	51,4	47,0	43,9	48,5	46,1
	3a	44,5	5,5	44,3	27,3	36,2	32,0	31,6
Settembre	1a	36,8	25,9	16,5	46,5	30,5	35,7	32,0
	2a	39,7	27,2	13,0	21,6	27,7	17,3	24,4
	3a	15,0	7,7		6,5	15,7	26,2	11,9
Ottobre	1a	9,3	28,8	24,7	9,8	31,6	44,8	24,8
	2a	16,5	29,0	18,0	16,0	19,7	34,7	22,3
	3a	25,9	32,5	6,4	8,6	7,7	7,2	
Novembre	1a			6,0		12,5	10,6	**4,9**
	2a	27,8		6,0		23,9	12,5	11,7
	3a	34,0	6,4	8,5		10,3	16,0	12,5
Dicembre	1a	11,1	23,3	37,5		13,3	9,0	15,2
	2a	6,5	38,5	15,7	3,3	44,7	21,0	21,6
	3a	6,0	16,4	8,6		8,5	2,7	7,0

MESE	Decade	10h – 11h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	25,5	0,0	15,0	18,0	0,0	49,2	18,0
	2a	34,4	36,1	40,0		6,0	24,0	23,4
	3a	10,5	28,2	46,9	10,4	10,9	24,1	20,2
Febbraio	1a	21,0	4,5	20,7	6,0	7,5	42,0	17,0
	2a	18,3	30,4	35,5	12,0	22,8	40,0	26,5
	3a	45,0	26,3	56,9	7,5	16,1	12,5	27,4
Marzo	1a	35.5	39.5	31,0	30,0	2.0	24.0	27,0
	2a	36,0	35,0	1,7	48,0	28,9	25,2	29,1
	3a	45,9	27.7	24,8	38.2	24.6	34.7	32,7
Aprile	1a	41,1	31.0	14.0	30.0	44,9	37.6	33.1
	2a	29,7	58,0	50,0	8,0	17,3	27,3	35,1
	3a	35,0	41,7	26.0	30,0	33,6	38,5	34,1
Maggio	1a	36.5	32,8	37.7	41,5	36.7	26,7	35.3
	2a	38,1	23,5	43,9	34,2	31,3	10,7	30,3
	3a	33,5	47,1	49,8	43,6	35,2	18,3	37,9
Giugno	1a	55,5	25,6	50,3	20,8	35,5	32,7	36,7
	2a	23,5	39,3	49,5	32,2	30,7	36,5	35,3
	3a	37,5	32,7	50,7	37,4	44,5	23,6	37,7
Luglio	1a	49,5	44,9	47.8	42,0	50.7	46.5	46,9
	2a	51,0	47,6	59,0	26,3	51,3	47,4	47,1
	3a	50,9	59,7	23.8	47,5	58,3	53,4	**48,9**
Agosto	1a	50.0	44.3	15.0	42.5	44.1	25,1	36.8
	2a	55,5	31,5	51,4	44,0	42,0	48,2	45,4
	3a	52,5	15,5	42.8	19,9	48,6	34,5	35,6
Settembre	1a	49,5	18,5	15,5	36,7	28,7	41,8	31,8
	2a	20,3	6,8		2,8	22,1	16,1	11,4
	3a	13,5				16,0	25,2	9,1
Ottobre	1a	15.5	29.8	24.5	6.0	30.1	56.2	27.0
	2a	24,2	27,7	17,8	25,1	24,1	42,4	26,9
	3a	26,6	32,7	8,6	10,9	5,5	13,6	16,3
Novembre	1a			5,0		16,8	13,0	**5,8**
	2a	36,1	2,0	6,0	1,0	26,6	15,3	14,5
	3a	54,0	2,0	12,0		21,0	8,0	16,2
Dicembre	1a	20.0	26,7	38.2	3,3	18.9	24,0	21,9
	2a	17,3	42.0	15,7	7,1	37,2	19,3	23,2
	3a	6,0	26,2	8,6	3,3	15,8	5,5	10,9

MESE	Decade	11h – 12h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	27,0	9,5	13,6	15,0	0,0	48,0	18,9
	2a	47,4	29,1	40,5		6,0	24,0	24,5
	3a	6,4	24,7	55,0	13,6	10,9	31,4	23,7
Febbraio	1a	27.5	6,0	28,6	8,5	10,5	42,0	20,5
	2a	20.0	26,8	50,3	12,0	22,8	42,0	29,0
	3a	43.8	36,9	60,0	18,1	18,3	11,3	31,4
Marzo	1a	34.6	44,5	30,0	35,5	5,0	29,3	29,8
	2a	36.0	35,6	1,4	48.0	29,3	18,0	28,1
	3a	41.8	28,6	27,3	40,9	24,2	32,4	32,5
Aprile	1a	46.1	35,0	20,0	33,0	53,7	45,4	38,9
	2a	27.5	51,8	53,8	18,2	16,3	23,8	31,9
	3a	41.3	45,6	27,5	28,1	33,0	31,8	34,6
Maggio	1a	45.2	37,1	39,7	38,8	42,1	22,0	37,5
	2a	39.0	26,8	34,2	41,4	29,7	13,5	30,8
	3a	41.8	51,2	46,8	44,5	31,9	25,1	40,2
Giugno	1a	57.0	23,4	50,5	22.1	38,3	30,8	37,0
	2a	24.0	36,9	42.6	34.4	26.6	23,9	31.4
	3a	40.0	34,2	48,0	41.0	35.2	18,9	36,2
Luglio	1a	51.5	38,3	39,8	46,3	48,0	47,0	45,2
	2a	36.5	49.9	60,0	43.8	47,6	46,0	**47,3**
	3a	45.7	54,9	20,4	51,3	55,3	41,0	44,8
Agosto	1a	51.0	38,3	15,0	46,6	57,2	35,7	40,6
	2a	52.5	32,0	52,4	46,0	44,8	47,3	45,8
	3a	56.8	17.5	36.1	24.3	43.3	31.7	35.0
Settembre	1a	45.3	22,3	15,2	26.4	30,3	43,9	30,6
	2a	21.0	8.0	4.4	7.1	22.2	27.0	15.0
	3a	17.8	0,5	0,2		15,2	21,5	9,2
Ottobre	1a	22.3	35,3	34,8	13,4	30,3	60,0	32.7
	2a	27.2	23,5	18,0	28,0	28,3	44,0	28.2
	3a	26.8	33,2	10,9	11.8	5,6	21,4	18.3
Novembre	1a					14,5	23,5	**6,3**
	2a	36.7	2,0		4,7	38,3	16,5	16,4
	3a	50,6	5,1	3,0		35,9	9,4	17,3
Dicembre	1a	25.2	23,8	43,8	4,5	20,0	18,0	22,6
	2a	15.5	42.0	15.7	15,2	41,7	33,4	27,3
	3a	2.0	38.0	8.6	12.0	13.2	17.7	15.3

MESE	Decade	$12^h - 13^h$						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio. . . .	1ª	26,5	11,5	15,0	6,0	0,0	39,2	13,3
	2ª	45,0	25,6	44,3		4,0	24,0	23,8
	3ª	5,5	23,6	47,8	16,4	5,5	35,4	22,4
Febbraio . . .	1ª	33,5	6,0	27,9	12,0	10,8	42,0	22,0
	2ª	15,0	29,9	56,0	12,0	20,8	45,0	29,9
	3ª	45,6	41,9	60,0	21,9	20,9	13,7	34,0
Marzo	1ª	21,9	40,8	30,0	41,0	5,5	24,0	27,2
	2ª	36,0	28,0		48,0	30,5	24,0	27,8
	3ª	40,9	25,5	26,4	39,5	28,0	34,1	32,4
Aprile.	1ª	52,8	40,7	19,4	25,3	49,9	36,1	37,4
	2ª	26,3	53,0	47,8	21,4	8,2	31,3	31,3
	3ª	41,0	40,6	26,3	27,5	33,3	37,0	34,3
Maggio	1ª	37,5	26,7	35,5	24,7	47,3	24,8	32,8
	2ª	31,7	27,4	33,8	32,2	34,1	4,7	27,3
	3ª	34,5	42,7	38,3	36,5	26,9	28,9	34,6
Giugno	1ª	49,0	18,2	39,6	21,0	29,0	23,5	30,1
	2ª	24,0	36,9	37,7	27,7	37,1	20,5	30,7
	3ª	32,0	36,0	54,8	48,5	28,6	33,9	39,0
Luglio	1ª	47,4	35,9	39,0	44,0	32,0	50,8	41,5
	2ª	43,2	50,7	54,0	37,0	40,8	52,7	28,3
	3ª	36,9	56,8	18,1	47,5	46,9	42,3	41,4
Agosto	1ª	44,5	39,1	14,0	39,0	55,3	37,9	28,3
	2ª	49,4	35,5	52,1	44,4	45,9	49,3	**46,1**
	3ª	57,3	16,0	38,9	32,9	36,2	31,1	35,4
Settembre . .	1ª	50,3	25,4	21,6	42,4	37,8	43,0	36,8
	2ª	35,7	17,5	17,5	42,0	47,6	16,5	29,8
	3ª	16,5	2,0	0,2	3,5	17,1	22,5	10,3
Ottobre	1ª	21,8	40,6	26,5	20,1	30,0	54,5	32,3
	2ª	22,0	28,5	17,0	31,1	29,0	41,0	28,1
	3ª	31,5	34,3	10,9	12,7	5,5	12,7	17,9
Novembre . .	1ª					17,8	19,2	**6,2**
	2ª	40,0	4,0		12,8	48,2	26,1	21,9
	3ª	55,3	4,5			43,1	18,0	20,2
Dicembre . . .	1ª	23,3	35,3	55,0	6,7	23,1	23,3	27,8
	2ª	9,5	41,6	15,7	19,5	48,1	34,2	28,1
	3ª		35,6	8,6	18,7	16,0	25,9	17,5

MESE	Decade	13h - 14h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	24,0	11,8	10,0	3,0	0,0	42,9	15,3
	2a	39,1	28,3	49,3			25,4	23,7
	3a	7,3	30,0	49,2	16,4	5,5	31,8	23,4
Febbraio	1a	26,5	6,0	23,6	18,0	14,5	42,0	21,8
	2a	21,0	28,6	48,1	20,0	27,0	48,0	32,1
	3a	50,6	37,3	59.4	15,0	22,2	10,0	32.4
Marzo	1a	30,5	41,0	25,0	45,0	5.8	26,2	28,9
	2a	36,0	28,0	1,3	48,0	32.8	22,5	28,1
	3a	40.5	27.3	27,1	34.1	25,5	32.4	31,2
Aprile	1a	52,2	39,2	19,8	28,0	47,6	40,7	37,9
	2a	15,6	51,0	50,5	25,7	4,8	27,3	29,2
	3a	36,5	41,7	30,2	29,6	34,3	28,2	33,4
Maggio	1a	28,2	25,7	36,5	26,0	23,5	13,2	25,5
	2a	36,5	24,7	37,4	33,0	34,8	11,1	29.6
	3a	26,7	35,3	27,6	43,6	30,6	31,6	32,6
Giugno	1a	53,0	15,0	24,7	29,0	19,2	24,8	28,0
	2a	18,0	19,0	41,5	30,0	26,5	12,0	24,5
	3a	29,7	32,8	47,7	42,6	32,3	31,4	36,1
Luglio	1a	40,2	28.1	37,0	43,8	26,5	46,8	37,1
	2a	40.0	42,8	38,7	40,8	39,0	35,1	39,4
	3a	33,2	45,3	20,3	36,6	44,5	22.3	33.7
Agosto	1a	43,5	39,5	15,0	38,4	46,3	26,1	34.8
	2a	48,3	33,6	50,7	40,7	47,9	32,4	42,3
	3a	50,2	14.5	36,6	37.8	30.9	30.2	33.4
Settembre	1a	45,0	29,1	17,7	49.1	28,9	33,3	33,9
	2a	49,8	23.7	31.8	38,8	36.3	8,3	31,5
	3a	21.5	19.7	13,3	20,2	10,2	26,6	18,6
Ottobre	1a	21,0	39,5	33,1	24,4	30,3	49,5	33,0
	2a	24,8	25,5	18,5	20,9	28,7	34,5	25,5
	3a	32,7	25,0	10,0	16,5	5,5	16,4	
Novembre	1a	2,8			5.2	18,0	18,0	7,3
	2a	42,2	7,0		22,2	47,5	25,0	24,0
	3a	60.0	9.5			43.1	15,8	21.4
Dicembre	1a	28,3	36,7	43.2	6.7	30,7	18,0	27,3
	2a	7,5	41,8	15,7	24.0	44,2	36.0	28.2
	3a		33.5	8.6	24.0	17.8	25.5	18.2

MESE	Decade	14h - 15h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	20,5	11,5	3,6	6,0	0,0	40,2	13,6
	2a	37,2	26,7	42,7			25,2	22,0
	3a	6,1	13,2	45.8	16,4	5,5	29,1	19,4
Febbraio	1a	35,4	6,0	22.1	13.0	9,0	42.0	21,3
	2a	25,0	21.5	48.7	18.0	40,0	45,0	33,0
	3a	52,5	27.5	55,0	15.0	25,6	7,5	30,5
Marzo	1a	25.8	43,1	30.3	42.0	5,5	30,6	29,6
	2a	36,0	31,0	2,0	48,0	37,0	24,0	29,8
	3a	44,1	24,5	27,7	37,7	28,2	32,4	32,4
Aprile	1a	59.0	28,0	27.3	27,0	49,4	36,0	37,8
	2a	20.0	51,5	48.0	21,7	10,8	31,6	30,6
	3a	41,2	39,0	28.0	29,5	35,6	28,8	33,7
Maggio	1a	38,0	22,0	35.2	28,6	35,5	14,2	28,9
	2a	32.7	27.3	21,7	33.8	26,2	11,7	25,6
	3a	26.1	36,2	15,0	40.9	29.0	30,1	29,6
Giugno	1a	44,8	16,0	42,0	17,9	25,1	28,3	29,0
	2a	27,0	29,8	31,1	25,2	26,2	10,3	24,9
	3a	34,0	28,8	39,4	37,5	23,3	24,0	31,2
Luglio	1a	35.5	26.8	34.7	48.0	26.5	43.9	35.9
	2a	26.3	34.5	36,0	29,3	37,2	26,1	31,6
	3a	28,6	51,5	14,3	29,5	49,8	22,4	32,7
Agosto	1a	42,5	35,4	10,0	37,5	45,8	26,5	33,0
	2a	48,7	33,1	51.4	26,5	53,4	31,5	**40,8**
	3a	50,9	12,0	37,5	33,5	38,2	22,5	32,4
Settembre	1a	44,6	28,3	17.9	39,1	29,6	34,2	32,3
	2a	51,3	30,1	26,2	39,5	44,1	14,7	34,3
	3a	18,1	22,9	22.2	32,3	31,1	25,6	25.4
Ottobre	1a	31,8	29,3	33,5	28,7	34,1	48,7	34,4
	2a	26,1	23,6	15,0	15,5	22,3	29,3	22,0
	3a	32,7	18,2	5,5	19,1	13,3	17,7	17,8
Novembre	1a				23,2	20,9	24,3	**11,4**
	2a	45,6	12,0		23,0	45,5	23,2	24,9
	3a	60,0	12,0		2,2	37,3	11,5	20,5
Dicembre	1a	26,7	40.0	28,5	6,7	32,8	16,8	25,3
	2a	6,0	40,0	8,6	20,9	42,9	31,5	25,0
	3a		34.0	8,6	24,0	11,5	26,1	17,4

MESE	Decade	15h – 16h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1a	10,5	10,5	0,0	0,0	0,0	26,8	**8,0**
	2a	32.2	21.7	24,3			11,0	14.9
	3a	4,6	15,0	38,9	16,4	2,7	16,3	15.7
Febbraio	1a	31,5	6,0	24,0	13,5	6,0	36,0	19,5
	2a	22,0	22,5	43.8	16,8	38,0	42,0	30,9
	3a	52,5	21,9	52,8	15,0	28,9	7.5	29.9
Marzo	1a	24,5	46,8	25,2	36,0	3.0	31.4	27.8
	2a	36,0	25,5		41,7	24,8	27.3	25.9
	3a	43.6	27.3	31,4	36,8	32.6	25.5	32.9
Aprile	1a	50.6	25.2	28,0	28,8	44,4	39,3	36.1
	2a	16.5	56.0	49,2	21.7	7.6	33.2	30.7
	3a	34,5	35.3	32.5	22.5	43,5	35.5	34.0
Maggio	1a	43,4	28,1	36,0	9.0	34,3	6,9	26,3
	2a	29,2	29,0	21,5	31,4	30,3	15,2	26.1
	3a	23,6	41,9	13,9	34,8	29,9	20,1	27,4
Giugno	1a	43,8	25,5	39,4	16,8	24.2	25,3	29,2
	2a	27,0	27,0	35,0	31,8	18,1	11,4	25.1
	3a	28,8	25,3	37,2	42,6	27.6	22,0	30,6
Luglio	1a	42,0	31,2	33,4	46,4	23,6	42,0	36.4
	2a	33,0	30,8	35.7	35,0	32,5	16,2	30.5
	3a	25,2	45,1	16,3	33,6	43,5	25,0	31.5
Agosto	1a	42,0	34,8	10,0	27,0	45,0	31,4	31.7
	2a	48,8	32,7	43.9	34,4	38,7	28,0	**37,8**
	3a	49,7	10,0	45,0	21,2	37,4	24,2	31,3
Settembre	1a	42,5	29,1	21,8	32,2	30,7	34,5	31,8
	2a	51,0	27,5	22,8	31,4	42,0	12,5	31,2
	3a	4,3	16,0	8,6	30,5	25,8	19,6	17.5
Ottobre	1a	28.5	29.4	27.2	23,3	35,2	52.8	32.7
	2a	18.5	18.2	14.0	13,0	27,7	25,3	19.5
	3a	36.4	17.7	5,4	13.2	13,3	18.0	17.2
Novembre	1a				30,0	16,2	24,0	11.7
	2a	46.7	12,0		18,0	37,6	23,6	23,0
	3a	55,8	12,0		6,0	23,5	9,2	17.8
Dicembre	1a	23,1	34.2	15,0	6,7	22,2	10,8	18.7
	2a	4.0	34.0	8,6	16.5	26.3	16.6	17.8
	3a		38.2	8,6	14,2	5,8	15,5	13,7

MESE	Decade	$16^h - 17^h$						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	1,5	3,5	0,0	0,0	0,0	1,6	1,1
	2ª	2,2	5,6	2,5				1,7
	3ª		10,9	15.5	9,4		1,4	6,2
Febbraio	1ª		6.0	4.3	9,5	3,0	17,9	6,8
	2ª		17,9	26,5	6,0	30,8	29,1	18,4
	3ª		12,5	33.8	15,0	29,1	7,5	16,3
Marzo	1ª	16,7	38,5	22,4	32,4	1.5	33,8	24,2
	2ª	31,8	21,5		45,0	10,3	11,6	20,0
	3ª	43,6	25,1	25.9	29,7	29,8	26,5	30,1
Aprile	1ª	56.1	23,7	19.5	24.8	45.4	35.8	34,2
	2ª	15,5	56,5	46,5	23.4	10,9	21,1	29,0
	3ª	35.5	36.7	34.0	13,5	36.7	28,9	30,9
Maggio	1ª	46.6	20.6	32.2	6.0	22,2	8.5	22.7
	2ª	25,7	21,0	26,1	28,8	32,6	13,5	24,6
	3ª	24,6	40,2	17,5	38,2	30.8	17,9	28,2
Giugno	1ª	41,0	18,0	34,1	23,3	20.0	17,5	26.0
	2ª	23.0	32,5	24,5	32,5	24,8	12,7	25,0
	3ª	31,5	30,4	20,7	42,0	30,4	18,0	28,8
Luglio	1ª	36.6	42.8	12.0	41.4	27.8	36.6	32.9
	2ª	36,0	30,6	33,9	29,8	30,0	19,3	29,9
	3ª	37,3	40,7	14.4	35,0	44,2	24,1	32,6
Agosto	1ª	34,5	44.8	10.0	33,0	43.0	31.8	32.9
	2ª	45,0	28,3		38,4	29,1	16,4	26,2
	3ª	41.3	11.0	39,0	15,2	31,1	22,1	26,6
Settembre	1ª	31,7	26.3	16.3	24.2	24.0	23,0	24,3
	2ª	44,7	19,5	29,7	32,0	35,1	6,0	27,8
	3ª	4,0	21,5	4,8	24,8	13,8	10,5	13,2
Ottobre	1ª	16.0	28.0	25.5	21.2	30,5	37.8	26.5
	2ª	12,5	14,3	14,0	6.3	19,2	19,5	14,3
	3ª	33,6	5,0	4,1	12,7	7,7	11,4	12,4
Novembre	1ª				18,5	14,6	19,4	8,8
	2ª	41,1	6,0		10,0	9,5	5,9	12,1
	3ª	15,0	6,0		4,5	4,4		5,0
Dicembre	1ª	2,2	10,0	12,5	1,1		3,0	4,8
	2ª		4,5	7,1	5,1		0,9	2,9
	3ª		3,5	7,1	1,4			2,0

MESE	Decade	17h – 18h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2ª							
	3ª							
Febbraio	1ª		0,5		2,0			0,4
	2ª		2,3		3,0	14,0		3,2
	3ª		30,0	3,8	3,8	13,9	4,5	9,3
Marzo	1ª	5,2	17,7	13,9	22,5		14,3	12,3
	2ª	16,8	14,0		36,2	3,5	6,5	12,8
	3ª	27.5	4.1	22.3	30.7	18.9	1.5	17.5
Aprile	1ª	25.3	7,0	11,5	9.0	21,7	13,0	14.6
	2ª	4.0	24,0	27,3	6,5	3.5	9.0	12.4
	3ª	20.5	21,1	26,0		22,4	15,0	17,5
Maggio	1ª	21.2	14,4	24,8	3,3	23,7	2,0	14,9
	2ª	22,5	18,0	9,0	30,0	25,6	11.4	19.4
	3ª	24,5	10,5	1,4	22,9	21,5	12,1	15.5
Giugno	1ª	39,3	3,8	1,0	16,9	13,3	7,7	13.7
	2ª	23,5	22,0		20,8	22,3	0,8	14,9
	3ª	30.0	31,0		39,0	23,7	9,7	22,2
Luglio	1ª	33,0	37,4		27,1	28.7	16,0	**23,7**
	2ª	31,5	30,8		15,0	20,8	16,5	19,1
	3ª	38,2	27,6		19.9	28.2	16,8	21.8
Agosto	1ª	19,5	25,0		18,0	35.2	19,1	19,5
	2ª	23,3	27,0		37,5	21,8	6,7	19,4
	3ª	17,0	9,0	24,7	17,3	21,8	20,0	18,3
Settembre	1ª	2.5	13.1	5,5	16,4	9.0	3.0	8.3
	2ª	15.8	3,0	16,1	19.1	12.0		11.0
	3ª		3,4				1,7	0.9
Ottobre	1ª	2,5	2.0	6.0	10.5	7,0	7.0	5.8
	2ª	3.9			2,1		3.0	1.5
	3ª	16.8			3.1			3.3
Novembre	1ª				1.7			0.3
	2ª							
	3ª		3.0					0.5
Dicembre	1ª							
	2ª							
	3ª							

MESE	Decade	$18^h - 19^h$						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2ª							
	3ª							
Febbraio	1ª							
	2ª							
	3ª							
Marzo	1ª							
	2ª		3,5					0,6
	3ª			2,3				0,4
Aprile	1ª							
	2ª			1,0				0,2
	3ª			1,0				0,2
Maggio	1ª		6,7	2,0				1,5
	2ª	6,5	10,0		6,0			3,8
	3ª	10,9				2,7		2,3
Giugno	1ª	25,7			3,0	4,0		5,5
	2ª	7,5	7,5		3,0	3,2		3,5
	3ª	14,0	8,5		17,8	3,0		**7,2**
Luglio	1ª	21,5	8,3		5,5	2,1	1,5	6,5
	2ª	12,0	8,0		7,5			4,6
	3ª	15,0	6,8		3,6	0,9		4,4
Agosto	1ª	3,5			4,5	4,1	1,5	2,3
	2ª		1,0		9,5	1,2		2,0
	3ª			6,0	3,2		16,4	4,3
Settembre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Ottobre	1ª				1,5			0,3
	2ª							
	3ª							
Novembre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Dicembre	1ª							
	2ª							
	3ª							

MESE	Decade	19h – 20h						
		1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
		m	m	m	m	m	m	m
Gennaio	1ª	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	2ª							
	3ª							
Febbraio	1ª							
	2ª							
	3ª							
Marzo	1ª							
	2ª							
	3ª							
Aprile	1ª							
	2ª							
	3ª							
Maggio	1ª		1,7					0,3
	2ª		2,0		6,0			1,3
	3ª							
Giugno	1ª	1,0						0,2
	2ª							
	3ª	2,0						0,3
Luglio	1ª	0.7						0,1
	2ª							
	3ª							
Agosto	1ª							
	2ª							
	3ª							
Settembre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Ottobre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Novembre	1ª							
	2ª							
	3ª							
Dicembre	1ª							
	2ª							
	3ª							

Sopra alcuni equilibri binarî.

Nota di ADOLFO CAMPETTI.

(Con una tavola).

1. — In questo nuovo lavoro, che fa seguito ad altri pubblicati sullo stesso argomento (1), vennero studiate alcune coppie di sostanze, sia riguardo alla loro miscibilità reciproca allo stato liquido, sia riguardo alla temperatura critica delle miscele ottenute. Lo studio completo non è possibile in ogni caso, anche perchè alcune delle sostanze adoperate si alterano oppure reagiscono tra loro a temperatura elevata: tuttavia si poterono riconoscere due casi interessanti di equilibrio, in entrambi i quali vennero fissate la temperatura e la concentrazione corrispondenti ad un punto quadruplo.

2. - La prima coppia studiata fu quella etere-difenilamina: queste due sostanze in presenza non dànno due fasi liquide distinte: ma si potè esaminare la temperatura critica delle varie miscele sino ad una concentrazione centesimale di difenilamina di circa 43.

L'etere adoperato era fornito come purissimo; tuttavia venne distillato due volte, la seconda sul sodio e dette come temperatura critica 196°,1. La difenilamina di Kahlbaum esisteva da tempo in laboratorio e, dopo due cristallizzazioni dall'alcool assoluto ed essiccamento, dava come temperatura di fusione 52°,93.

Le temperature critiche delle varie miscele esaminate sono raccolte nella tabella seguente, ove c è la concentrazione in difenilamina riferita a 100 di miscela, t_k la temperatura critica osservata.

(1) " Memorie della Reale Accad. delle Scienze di Torino ", voll. XLI, XLIV e XLVI.

c	0	9,30	16,39	21,04	32,34	36,87	43,19
t_k	196°,1	222°,3	245°,8	255°,6	281°,8	295°,1	310°,1

Le esperienze non furono spinte a temperature più elevate per la difficoltà di ottenere allora una temperatura sufficientemente stabile: essendo ignota la temperatura critica (certo, se determinabile, assai elevata) della difenilamina, non si può riconoscere se sia verificata in questo caso la regola di miscuglio; tuttavia anche qui, come nei casi precedentemente studiati, la rappresentazione grafica delle temperature critiche in funzione della concentrazione di difenilamina fornisce (fig. I) una linea che, specie nel primo tratto, poco differisce da una linea retta, cioè l'*innalzamento di temperatura critica è circa proporzionale alla concentrazione.*

Anche in questo caso non si ebbe separazione di difenilamina, nè alla temperatura critica della miscela, nè al disopra di questa temperatura.

3. — Una seconda coppia studiata fu quella isopentano-difenilamina; l'isopentano Kahlbaum, già esistente da tempo in laboratorio, venne distillato due volte, ottenendosi come temperatura critica 186°,6.

Per quanto riguarda le temperature critiche delle miscele, i dati sono riferiti nella tabella, ove le lettere hanno il medesimo significato che nella precedente.

c	0	15,17	21,03	25,97	39,09
t_k	186°,6	231°,0	246°,2	260°,0	300°,1

L'esame dei dati numerici o della loro rappresentazione grafica (fig. II) conduce alle stesse conclusioni del caso precedente; e come in esso non si manifesta alcuna separazione di difenilamina, nè alla temperatura critica della miscela, nè a temperatura superiore.

Se non che, mentre l'etere e la difenilamina in presenza non forniscono due fasi liquide distinte, tale caso si verifica invece per la coppia difenilamina-isopentano, per la quale in conseguenza si può tracciare la curva di solubilità reciproca e determinare la temperatura e la concentrazione di miscibilità completa.

Nella tavola che segue c indica la concentrazione della difenilamina nella miscela considerata (riferita a 100 di miscela), t la corrispondente temperatura di miscibilità.

c	12,33	15,16	18,02	22,95	33,26	36,89	42,42	50,13
t	14°,10	17°,75	22°,87	30°,65	39°,75	41°,50	42°,80	44°,40
c	58,48	62,93	70,79	73,70	79,38	82,95	86,55	—
t	44°,85	43°,65	40°,97	38°,66	31°,09	23°,77	16°,00	—

Per miscele meno concentrate in difenilamina della prima o più dell'ultima non è possibile determinare la temperatura di miscibilità, giacchè per raffreddamento delle soluzioni meno o più concentrate si ottiene in ogni caso separazione di cristalli, anzichè intorbidamento.

Nella fig. III è tracciata, per la parte determinata e sino alla temperatura critica, la curva di miscibilità completa la quale, è bene notarlo, è tutta compresa in un intervallo di temperatura inferiore a quella di fusione della difenilamina pura.

In base ai resultati della precedente tabella si poterono calcolare i dati necessari per la costruzione del diametro della curva di solubilità reciproca; essendo perciò c_1 e c_2 le concentrazioni della difenilamina nelle due soluzioni corrispondenti ad una stessa temperatura, si pose $\frac{c_1 + c_2}{2} = A + Bt$ e si calcolarono i valori di A e B mediante le ordinate per due diverse temperature (nella tabella che segue i valori corrispondenti a queste temperature sono racchiusi entro parentesi).

t	c_1	c_2	$\frac{c_1+c_2}{2}$ osservato	$\frac{c_1+c_2}{2}$ calcolato	
15°	13,02	87,01	50,01	49,97	
(20°)	(16,40)	(84,71)	(50,55)	(50,55)	$t = 20° \begin{cases} c_1 = 16,40 \\ c_2 = 84,71 \end{cases}$
25°	19,37	81,69	50,53	51,14	
30°	22,45	80,20	51,32	51,72	
35°	26,80	77,90	52,35	52,27	
(40°)	(33,78)	(72,01)	(52,89)	(52,89)	$t = 40° \begin{cases} c_1 = 33,78 \\ c_2 = 72,01 \end{cases}$
42°,5	40,33	67,42	53,87	53,18	$A = 48,21$
45°	—	—	—	53,48	$B = 0,117$

Dal confronto tra i valori calcolati ed osservati di $\frac{c_1+c_2}{2}$ o meglio ancora dall'esame della fig. III, nella quale sono segnati i punti aventi per ordinate i valori osservati di $\frac{c_1+c_2}{2}$, si può dunque concludere che anche in questo caso la legge del diametro rettilineo è con grande approssimazione verificata, con qualche divergenza in vicinanza della temperatura t_m di miscibilità completa. Risulta poi $t_m = 44,9$ circa, mentre per la corrispondente concentrazione critica si ha $c_m = 54,2$.

Però la linea di miscibilità reciproca, se rappresenta in modo completo l'equilibrio tra le fasi liquide, non dà l'intero equilibrio tra la difenilamina e l'isopentano; per di più soltanto una parte di questa curva è di equilibrio stabile e precisamente il tratto *BKC*: infatti per raffreddamento di una miscela omogenea di una qualunque delle concentrazioni determinate da questo tratto di curva si ottengono sempre, dopo intorbidamento, due fasi liquide distinte, anche in presenza di un germe cristallino. L'opposto avviene invece per le concentrazioni rappresentate dai rami di curva *BA* e *CD*; vale a dire si ottengono per raffreddamento due fasi liquide distinte solo in assenza di un germe cristallino e perciò l'equilibrio lungo *BA* e *CD* tra le due fasi liquide è instabile.

A partire dai punti *B* e *C* l'equilibrio stabile è invece de-

terminato dalle linee *CF* e *BE* che rappresentano l'equilibrio alle varie temperature tra la fase solida (cristalli di difenilamina) e la soluzione in presenza; esse si determinarono racchiudendo entro tubi saldati alla fiamma miscele di nota concentrazione *c* e cercando poi la temperatura t_s di sparizione dei cristalli per lento riscaldamento o del loro riapparire per lento raffreddamento (sempre mantenendo un germe cristallino).

c	1,93	5,47	10,73	12,33	15,16	18,02	22,95	33,26
t_s	4°,20	22°,68	32°,71	34°,80	37°,01	38°,60	40°,30	41°,57
c	36,89	70,79	73,70	79,38	82,95	86,55	93,09	100,00
t_s	41°,80	41°,87	42°,30	42°,55	43°,26	44°,35	47°,70	52°,93

I punti *B* e *C* hanno, come deve essere, la stessa ascissa; corrispondono cioè alla stessa temperatura e precisamente di circa 41°,9 ed alle concentrazioni di difenilamina di circa 37,2 e 68,9: *nel diagramma pressione-temperatura secondo la regola di Gibbs si avrebbe dunque alla temperatura di 41°,9 e alla pressione corrispondente un punto quadruplo, nel quale possono coesistere in equilibrio stabile difenilamina solida, soluzione di concentrazione 37,2, soluzione di concentrazione 68,9 e vapore.*

4. — A risultati analoghi ai precedenti conduce lo studio della coppia resorcina-metaxilolo per quanto riguarda l'equilibrio tra le fasi solida e liquida; però per questa coppia non fu possibile determinare la temperatura critica per le varie miscele, giacchè a temperatura elevata si ha alterazione chimica sensibile.

Il metaxilolo e la resorcina adoperati, provenienti da Kahlbaum, esistevano già da qualche tempo in laboratorio; il primo dette, dopo ripetute distillazioni, come temperatura costante di ebollizione 139°,9 a pressione normale; la seconda, dopo due distillazioni, dava come temperatura di fusione 108°,8. Le espe-

rienze furono eseguite in bagno di acqua per le temperature inferiori a 100° e in bagno di olio di vaselina per le temperature superiori. Nella tavola che segue, c è la concentrazione centesimale di resorcina nella miscela, t la corrispondente temperatura di miscibilità.

c	2,99	4,03	4,78	7,90	9,87	19,61	29,93
t	61°,1	72°,5	80°,1	101°,0	108°,6	136°,2	146°,1
c	49,78	59,73	71,02	81,33	86,94	89,79	—
t	148°,3	144°,9	135°,7	106°,0	72°,4	35°,0	—

Col metodo seguìto nel caso precedente ed usando le stesse notazioni si costruì anche qui il diametro della curva di solubilità reciproca, ottenendo i seguenti resultati.

t	c_1	c_2	$\frac{c_1+c_2}{2}$ osservato	$\frac{c_1+c_2}{2}$ calcolato	
60°	2,95	88,20	45,57	45,46	
(70°)	(3,80)	(87,08)	(45,44)	(45,44)	$t = 70° \begin{cases} c_1 = 3,80 \\ c_2 = 87,08 \end{cases}$
80°	4,77	85,50	45,18	45,42	
90°	6,35	83,88	45,12	45,40	
100°	7,75	82,25	45,00	45,39	$t = 135° \begin{cases} c_1 = 19,20 \\ c_2 = 71,42 \end{cases}$
110°	10,12	80,20	45,16	45,37	
120°	12,85	77,35	45,10	45,35	
130°	16,45	73,88	45,16	45,34	$A = 45,57$
(135°)	(19,20)	(71,42)	(45,31)	(45,31)	
140°	22,25	67,65	44,95	45,31	$B = -0,00186$
145°	28,35	59,75	44,05	45,30	

Come si vede dalla tabella precedente od anche dalla fig. IV, in cui sono rappresentati graficamente i resultati, la legge del diametro rettilineo appare quasi esattamente verificata, salvo una piccola divergenza in prossimità della temperatura di miscibilità completa. Tale temperatura t_m risulta con grande approssimazione 148,7, essendo la concentrazione critica corrispondente $c_m = 43,6$.

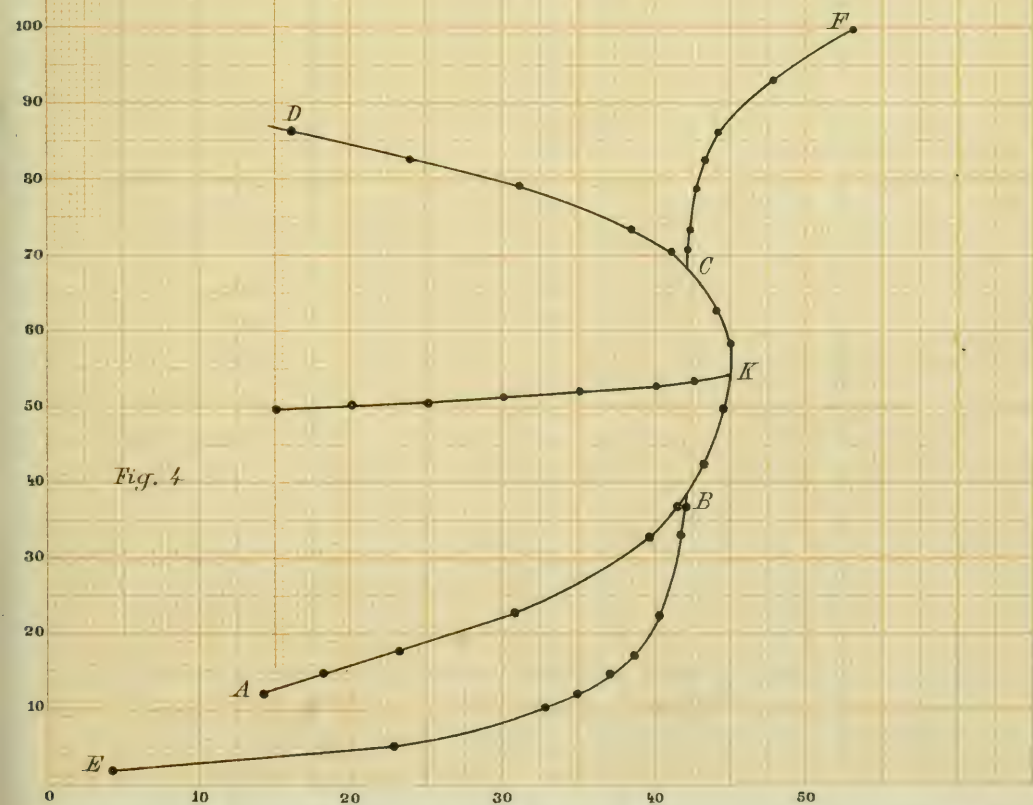
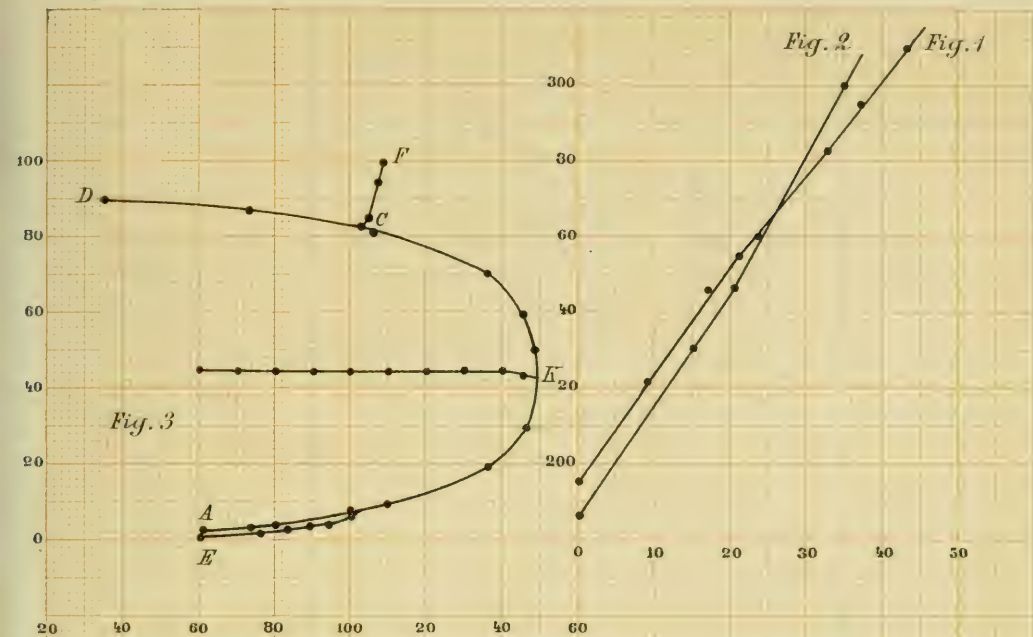
Anche in questo caso, della curva di miscibilità è linea di equilibrio stabile solo la porzione *BKC*: ad essa si aggiungono come linee di equilibrio stabile (tra una fase liquida ed una solida) le *EB* ed *FC*; mentre i tratti *AB*, *DC* della curva di miscibilità corrispondono ad equilibri instabili. I dati necessari per il tracciamento delle *EB* ed *FC*, ottenuti in modo analogo a quello seguìto per la coppia precedente, sono raccolti nella tavola seguente.

c	1.07	1,97	2,99	4,03	4,78	7,90	82,53	85,05	95,06	100
t_s	60°,2	75°,9	82°,5	89°,2	94°,2	99°,9	102°,2	104°,5	107°,1	108°,8

I punti *B* e *C* corrispondono alla medesima temperatura di circa 100°,3 ed alle concentrazioni di resorcina pari a 8,1 e 81.8 circa: *nel diagramma pressione-temperatura*, secondo la regola delle fasi, *a questa temperatura e alla pressione corrispondente si ha un punto-quadruplo dell'equilibrio, nel quale possono coesistere in equilibrio stabile le quattro fasi: resorcina solida, soluzione di concentrazione 8,1, soluzione di concentrazione 81,8 e vapore.*

5. — Nel caso della coppia resorcina-xilolo si cercò pure di determinare col metodo della corrente gassosa la composizione del vapore dato dalle due soluzioni in presenza alla stessa temperatura: si ottennero così le seguenti concentrazioni centesimali (c) della resorcina nel vapore a varie temperature.

t	118°,9	124°,3	131°,1	141°,1
c	0,00185	0,00273	0,00349	0,00388

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
A
B
C
D
E
F
K
Lit. Salussolia, Torino

Dato che la resorcina ed il metaxilolo sono tra loro miscibili in proporzioni molto elevate (anzi a 141°,1 si è già vicini alla temperatura di miscibilità completa), si poteva aspettare che nel vapore si formassero tra le due sostanze associazioni molecolari e che quindi vi fosse notevole trasporto di resorcina per fatto dei vapori di metaxilolo; i dati della tabella mostrano invece che questo non si verifica, giacchè la concentrazione della resorcina nel vapore è molto bassa di fronte a quella del metaxilolo, in corrispondenza della tensione di vapore molto minore per la prima che per il secondo.

6. — Riassumendo dunque:

a) Sono state determinate le temperature critiche per miscele di etere e difenilamina ed isopentano e difenilamina sino a concentrazione assai elevata del secondo componente, riconoscendo anche qui l'andamento circa lineare delle temperature.

b) Per le coppie isopentano-difenilamina e metaxilolo-resorcina sono state determinate le curve di solubilità, di miscibilità reciproca, le temperature e concentrazioni di miscibilità complete ed inoltre un punto quadruplo dell'equilibrio. La legge del diametro rettilineo risulta verificata con grande approssimazione, salvo una piccola divergenza in vicinanza della temperatura critica, il che (tenuto conto delle numerose coppie già studiate, per le quali vale questa proprietà) conferma sempre più nell'idea che questa legge si possa considerare in prima approssimazione come una legge generale.

Torino, Istituto Fisico della R. Università, ottobre 1916.

Circa la sezione a minima resistenza ohmica nei rocchetti fissi degli elettrodinamometri conassiali.

Nota di P. BARRECA.

(Con 1 tavola).

In una nota preliminare del Marzo ultimo, presentata alla Soc. ital. per il progresso delle scienze (1), comunicavo come, col contornare i rocchetti fissi degli elettrodinamometri a bobine circolari e conassiali, secondo curve meridiane, che siano luogo dei punti nei quali la componente radiale delle forze magnetiche sviluppate dalla bobina mobile ha grandezza costante, si ottengano apparecchi con sensibilità massima, per assegnata resistenza.

Invece di considerare tale componente, è preferibile di pensare al suo quoziente U per la corrente i_m che la origina (2); anche il suo prodotto per la corrente i_f nei rocchetti sarebbe meno conveniente.

Se, d'altra parte, si suppone $i_m = i_f = 1$, la diversità si limiterà alle dimensioni.

La teoria comprende anche il caso di bobine mobili a sezione finita ed assegnata, ma in quanto segue ci limitiamo quasi esclusivamente al caso di bobine mobili assai leggiere e formate da poche spire sottili, sostituibili con una sola nella trattazione.

La tavola allegata presenta, per tale caso particolare, dieci curve di livello (equidifferente) della grandezza U, da $U = 0{,}05$ ad $U = 0{,}50$, con un diametro di bobina mobile scelto assai

(1) P. Barreca, *Nota preliminare sopra quattro nuovi strumenti*, " Nuovo Cimento ,, vol. XI, Maggio 1916.

(2) Siano: i_m la corrente nella bobina mobile, i_f quella nelle bobine fisse.

grande (40 cm.) onde servirsene con aumentata precisione in strumenti più piccoli, secondo il principio di similitudine geometrica, essendochè U varia così in modo molto semplice.

Naturalmente, non è affatto necessario di seguirle fedelmente nella costruzione e neanche nei calcoli approssimativi, potendosi *imitarle*, con linee di più facile costruzione. In proposito, la tavola mostra che con cerchi tangenti in A al raggio delle spire mobili, si otterranno buoni risultati, semprecchè si rimanga in regioni dove il gradiente di U è piccolo, il che avverrà nella maggioranza dei casi. Entro i limiti da $U = 0,50$ ad $U = 0,05$ e col diametro $2R$ supposto nel disegno per la bobina mobile, tali cerchi potranno avere un diametro D dato dalla formola grossolana:

$$(D - 4 \text{ cm.})\, U = 1,10,$$

che non vale affatto per $U > 0,50$.

Naturalmente, con due piani normali all'asse e posti a qualche mm. di distanza dall'equipaggio mobile, piani che ci imporremo di non attraversare, lascieremo il necessario giuoco e potremo, o no, a piacere, limitare anche la lunghezza assiale delle bobine, con piani analoghi, a seconda dei casi.

a) Equazione delle curve della tavola.

Poichè ci limitiamo al caso particolare di bobina mobile sufficientemente sottile, rappresentabile con una sola spira, ma percorsa da corrente multipla, possiamo partire dalla espressione della componente magnetica radiale dovuta a corrente lineare, circolare, utilizzandone, o un'espressione chiusa, con numero finito di termini e con trascendenti ellittici [1], oppure una delle numerose formole equivalenti, con sviluppi in serie [2].

---

[1] MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Seconda edizione inglese. 2° vol., pag. 308.

[2] MAXWELL, loco cit., con armoniche zonali. MINCHIN, "*Phil. Magazine*", XXXV, 1893; per sezione finita circolare. NAGAOKA, "*Phil. Magazine*", Maggio 1903. Serie con funzioni θ e per punti molto vicini alla spira anche con funzioni q di Jacobi.

Le condizioni di convergenza di tali serie variano però da una regione all'altra del campo, cosicchè tornano forse meno comode al nostro caso.

La prima si ottiene calcolando il coefficiente M di mutua induzione tra due cerchi sottili, coassiali, i cui piani distino di x, i cui raggi siano R ed y rispettivamente e giungendo così a scrivere per la forza ponderomotrice tra i cerchi:

$$i_1\, i_2 \frac{\partial M}{\partial x} = i_1\, i_2\, \pi \frac{x}{\sqrt{Ry}} \operatorname{sen} \gamma \,\{ (1 + \sec^2 \gamma)\, E(\gamma) - 2\, F(\gamma) \}$$

(Maxwell, l. cit.), dove: i_1, i_2 sono le correnti, $\gamma = \text{arco cos} \frac{r_2}{r_1}$, r_2 ed r_1 minima e massima distanza misurabile tra un punto dell'un cerchio ed uno dell'altro ed i simboli E ed F indicano i trascendenti ellittici completi di seconda e prima specie rispettivamente.

Dividendo tale espressione per $i_1\, i_2$ e per la periferia $2\pi y$ di una spira generica del nostro rocchetto fisso, ricaviamo il quoziente U da tenere costante, cioè:

$$(1) \qquad U = \text{cost.} = \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{x}{y\sqrt{y}} \operatorname{sen} \gamma \,\{ (1 + \sec^2 \gamma)\, E(\gamma) - 2\, F(\gamma) \}$$

è l'equazione delle curve cercate. Tenendo costante U varieranno le coordinate cartesiane x, y (e la loro funzione γ) e tracceremo una curva; variando poi U otterremo tutte le curve analoghe.

Hanno per noi importanza: il valore complessivo della forza ponderomotrice sviluppata da un rocchetto la cui sezione ha il precedente contorno e le sue derivate, di piccolo ordine, rispetto ad x. Quanto alla prima, se dopo aver coperto il piano delle curve precedenti, segniamo su di esso una sezione arbitraria (a minima resistenza, oppur no) e se in ogni punto di tale sezione facciamo il prodotto:

$$i_m \cdot 2\pi y\; U \cdot c_f\, dS\,,$$

dove: c_f è la densità della corrente i_f e dS è l'elemento di superficie, avremo che il suo integrale esteso ad S ci darà di

nuovo la forza complessiva. *Questa può dunque aversi dal semplice momento statico* $\int_S yUdS$ *della sezione coperta con strato materiale che pesi* U *per ogni unità di superficie.* Potremo anche, per approssimazione. estendere l'integrale a tutta la superficie, senza distinguere isolante da conduttore, se la densità c_f è ottenuta dividendo $n_f\, i_f$ per tutta la sezione (n_f sia il numero delle spire supposto non piccolo [1]). La c_f va riferita al cm^2, se le le dimensioni della figura si misurano in cm.

Per quanto riguarda le successive derivate della forza ponderomotrice f rispetto ad x entro piccoli spostamenti assiali. decomponiamo questa e la sua antagonista a (meccanica, o no). valutata come se fosse applicata secondo l'asse alla bobina mobile. in serie di Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$a(x) = a(0) + xa'(0) + \frac{x^2}{2!} a''(0) + \ldots$$

e osserviamo, che alla sensibilità dello strumento è necessario che $a(x)$ cresca lentamente. sia che si possa agire mutandone alcuni termini (ad es., $a(0)$) come negli apparecchi con riporto a zero, sia che essi siano invariabili. Ma per la stabilità della deviazione, segua questo oppur no ad azzeramento (sia cioè. o no, una deviazione *primitiva* oppure residua, a seconda dei casi), è una condizione necessaria che $f(x)$ cresca ancor più lentamente, resti costante, o decresca, affinchè possa essere automaticamente raggiunta e superata da a entro i limiti della massima possibile deviazione e possa così aversi equilibrio stabile. Siamo dunque obbligati a deprimere tutte, o le più importanti, derivate di $f(x)$ al di sotto delle loro corrispondenti in $a(x)$, od anche interamente, ed un metodo semplice all'uopo consiste nell'annullarne un certo numero di ordine infimo. Da questo lato e per quanto riguarda elettrodinamometri del tipo considerato in questa nota, la prima derivata della forza è nulla. come in tutti questi apparecchi, se simmetrici.

---

[1] Se una sola, o poche, spire a grande sezione formassero il rocchetto fisso, supponendo uniforme densità e tubi circolari di corrente non si sarebbe più nel vero, perchè questi (agenti in parallelo tra loro) avrebbero diseguale resistenza.

Infatti, la derivata della forza prodotta dalla bobina fissa disposta da un lato e quella prodotta dalla bobina simmetrica hanno medesimo valore assoluto, ma le x crescenti di una corrispondono ad x decrescenti dell'altra e perciò la loro somma algebrica è nulla.

Poichè la prima derivata per $x = 0$ passa gradatamente da valori positivi a negativi, la seconda derivata ha ivi un valore finito e non nullo. Helmholtz (¹), che trasformava bilancie da pesate sostituendo rocchetti mobili ai piatti, annullava anche la seconda derivata, per rendere costante al più possibile la forza elettrodinamica, avvicinandosi così al comportamento dell'apparecchio nell'uso primitivo, in quanto così la sensibilità e la stabilità quando vi erano correnti, non differivano sensibilmente da quelle dell'uso antico. Otteneva questo annullamento col dare sperimentalmente alle due uguali distanze delle bobine mobili dalle fisse (usava due bobine mobili) un valore speciale, annullante separatamente le rispettive derivate seconde. Se non si ha in vista il suo particolare scopo, ciò non è necessario.

b) Strumenti a minima resistenza geometricamente simili.

Supponiamo di aver disegnate le curve di cui sopra per un dato raggio R della bobina mobile e di volerle utilizzare nella costruzione di un altro istrumento, in cui quello valga invece R'.

Basta costruire le curve geometricamente simili alle prime nel rapporto $\frac{R'}{R}$ (vale a dire leggere il disegno delle prime in scala diversa) e cambiare in pari tempo su ciascuna di esse il valore del parametro, nel rapporto inverso $\frac{R}{R'}$; infatti la (1) mostra che U ha le dimensioni inverse di una lunghezza. Il nuovo istrumento sarà, o no, geometricamente simile al primo, a seconda che utilizzeremo, per contorno, la curva omologa del contorno del primo, ovvero un'altra.

(¹) W. Helmholtz, *Ueber eine elekrodynamische Wage.* Nei " Proceedings of the London Royal Soc. ", 1881 (7 Aprile), oppure in " Wissenschaftliche Abhandlungen ", vol. I, p. 922.

In spire omologhe sarà costante il prodotto Uy e pertanto *in strumenti simili la forza complessiva* $2\pi\, i_m\, c_f \int_{S_f} U y dS_f$ *cresce, caeteris paribus, come i quadrati delle dimensioni omologhe.*

L'indice f indichi parti fisse e l'indice m parti mobili, i è una corrente, c una densità di corrente, dS un elemento superficiale del disegno rispettivo.

Possiamo distinguere due casi negli strumenti simili:

1° Manteniamo l'ipotesi testè fatta di densità c_f immutata, collo usare nella costruzione del nuovo strumento la stessa qualità di filo sottile usata pel suo omologo e prevedendo la stessa corrente massima, avendo per scopo soltanto di ottenere nella nuova costruzione un numero maggiore di spire. Se m è il moltiplicatore delle dimensioni omologhe, le n_f spire diverranno $m^2 n_f$, la forza φ complessiva diverrà $m^2\varphi$, la resistenza r diverrà $m^3 r$ (essendo rimasta immutata la sezione) e la sensibilità s (nel senso di sollecitazione divisa pel quadrato della corrente [1]) diverrà $m^2 s$.

2° Possiamo, invece, accrescere anche il diametro del filo nella stessa proporzione delle dimensioni omologhe, il che avverrà se lo giudicheremo necessario per l'uso con correnti più intense. Supponiamo di accrescere, nella stessa misura, anche lo spessore dell'isolante. La ipotesi di densità immutata corrisponde allora a portare la corrente massima da i_f max ad $m^2 i_f$ max. La forza complessiva diviene ancora $m^2\varphi$, ma la sensibilità resta s. La resistenza diviene $\frac{r}{m}$, la quantità q massima di calore svolto diviene $m^3 q$, la superficie esterna diviene $m^2 e$ e la quantità $\frac{q}{e}$ di calore da irradiare per unità di superficie diviene $m\frac{q}{e}$, cosa che potrà impedire di considerare densità immutata quando il filo avrà diametro emmuplo, se al criterio del calore svolto si vuole dare importanza preponderante.

---

[1] Conviene (tranne negli apparecchi non in serie, come i wattmetri) prendere per divisore il quadrato della corrente, onde avere medesimo coefficiente in tutta la scala, supposti, o metodi di zero, o piccole deviazioni massime, contenute perciò entro campo prossimamente uniforme.

c) Costruzione della tavola allegata.

Le curve di livello della funzione U, dunque, tracciate rigorosamente, oppure prossimamente imitate (vedi sopra), si prestano oltre che a discussioni generali delle proprietà degli elettrodinamometri a res. minima, anche alle costruzioni effettive per diverse grandezze, cosicchè conviene tracciarle una volta per tutte.

La tavola allegata (limitata al quadrante tra gli assi positivi) e già citata, rappresenta alcune di tali curve; essa suppone $2R = 40$ cm. La bobina mobile fu supposta così grande per maggior chiarezza e maggior facilità di trarne sagome in scala diversa, nel caso che si volesse seguirle fedelmente. Nella riproduzione litografica fu però ridotta a scala metà. I punti calcolati sono circondati da cerchietti. Il metodo seguìto nella costruzione è il seguente: Poichè nella (1) si possono scindere i fattori:

$$G = \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{x}{y\sqrt{y}}, \tag{2}$$

$$H = \operatorname{sen}\gamma \left\{ (1 + \sec^2\gamma) E(\gamma) - 2F(\gamma) \right\}, \tag{3}$$

vennero costruite linee $G = \text{cost.}$ e linee $H = \text{cost.}$, in sufficiente numero da ottenere un reticolato che coprisse il disegno, poi si unirono insieme tutte le intersezioni dove GH assumeva identico valore. Naturalmente furono necessarî anche punti fuori di tale rete, che è di sua natura a maglie poco uniformi; le relative intercalazioni si eseguirono sempre rigorosamente, cioè segnando ancora un pezzetto di curva $G = \text{cost.}$, ovvero $H = \text{cost.}$, rispettivamente.

Le curve della prima schiera sono cubiche passanti per l'origine ed affini secondo l'asse y; perciò costruita per punti una di esse, nella quale la costante G sia espressa da un numero semplice (a poche cifre significative), le altre possono ottenersi conservando le ordinate e raddoppiando, triplicando, ecc.... le ascisse. Nella tavola ne sono state conservate quattro.

Le curve della seconda schiera sono linee $\gamma = \text{cost.}$ (poichè $H = \text{cost.}$) e perciò anche linee $\frac{r_2}{r_1} = \text{cost.}$, rapporto delle di-

stanze del loro punto generatore dai due punti fissi A_1, A_2, nei quali la spira mobile incontra il foglio. Sono dunque circonferenze coi centri sull'asse y e passanti pei punti di esso coniugati armonici di A_1 ed A_2 nel rapporto dato. La loro costruzione è più laboriosa di quella delle cubiche precedenti, perchè scegliendo a piacere una serie di valori di $\frac{r_2}{r_1}$, non si può prevedere senz'altro se la espressione ellittica (3) darà valori equidifferenti di H, come è conveniente di ottenere, per avere in modo semplice valori di U distribuiti in modo utile. Pertanto, si calcolò dapprima la tabella più sotto riportata, nella quale per tutti i valori di γ compresi fra 56° ($H = 0{,}9351$) ed 86° ($H = 199{,}72$) si aveva H ad ogni due gradi, tranne nell'intervallo 86°-82°, nel quale, per il più rapido crescere di H, fu necessario calcolarla di grado in grado.

I valori naturali dei trascendenti ellittici E, F, furono ricavati dalle tavole IX di Le Gendre [1], leggendole per amplitudine 90° e prendendone soltanto cinque cifre.

Coi risultati di tale tabella si disegnò poi una curva avente per ordinate cartesiane H e per ascisse $\sec\gamma$, attraverso la quale furono tirate tante parallele all'asse delle ascisse, corrispondenti a valori interi ed equidifferenti di H, onde leggerne le ascisse corrispondenti ai punti d'incontro. Da queste si ricavavano subito i punti d'intersezione delle corrispondenti circonferenze con l'asse y; invero, se S ed I sono tali punti, cioè i coniugati armonici di A_1 ed A_2, si deve avere contemporaneamente:

$$\frac{A_2 S}{2R + A_2 S} = \frac{r_2}{r_1} = \cos\gamma \qquad \text{e} \qquad \frac{A_2 I}{2R - A_2 I} = \cos\gamma\,,$$

cosicchè:

$$A_2 S = 2R\,\frac{1}{\sec\gamma - 1}\,, \qquad A_2 I = 2R\,\frac{1}{\sec\gamma + 1}\,.$$

Il raggio del cerchio è poi dato dalla semisomma di queste espressioni. L'uso di $\sec\gamma$ come ascissa, invece di γ, (oltre ad essere valore già pronto dal calcolo della tabella suddetta) pre-

[1] Le Gendre, *Exercices de calcul intégral et sur trascendantes de divers ordres*, etc., vol. III, pag. 345.

senta il vantaggio di dare quasi immediatamente le frazioni sopra scritte ed inoltre quello di crescere rapidamente verso i 90 gradi, così da compensare in parte il rapido crescere delle ordinate (vedi tabella) e mantenere alla curva pendenze più convenienti pel calcolo grafico.

Nell'esecuzione pratica bisognò però spezzare tale curva ausiliare in due pezzi (da $H=1$ ad $H=10$ e da $H=10$ ad $H=200$), con scala diversa per le ordinate, onde avere ancora pendenze e letture usabili comodamente in entrambe. Anche della schiera dei cerchi, così ottenuti, ne furono conservati a disegno ultimato soltanto quattro.

Diamo qui la tabella. Si scorge da essa, che volendo disegnare con sufficiente esattezza e scala opportuna i tratti di

γ	sec γ	$H(\gamma)$	γ	sec γ	$H(\gamma)$	γ	sec γ	$H(\gamma)$
56°	1,788	0,9351	70°	2,924	5,3255	83°	8,206	62,361
58°	1,887	1,1880	72°	3,236	7,0690	84°	9,567	86,333
60°	2,000	1,5086	74°	3,628	9,556	85°	11,474	125,16
62°	2,130	1,9194	76°	4,134	13,264	86°	14,336	199,72
64°	2,281	2,4492	78°	4,810	19,053	—	—	—
66°	2,459	3,1468	80°	5,759	28,786	88°	28,654	803,11
68°	2,669	4,0695	82°	7,185	46,940	90°	∞	∞ (Vedi sotto).

curva $U=$ cost. prossimi alla traccia A della spira mobile (tratti che abbiamo abbandonato) sarebbe stato necessario di suddividere più minutamente l'intervallo da 86° a 90°, a cagione della rapidità con la quale vi cresce H. L'eguaglianza $U=GH$ dà in A un valore indeterminato, perchè, col tendere ivi di $\cos\gamma$ a zero, la $\sec^2\gamma$ è infinita di secondo ordine, mentre $E(\gamma)$ tende ad 1 ed $F(\gamma)$ tende all'infinito logaritmico (vedi Le Gendre, tabelle citate), cosicchè la H risulta in A infinita, come differenza di due infiniti di ordine diverso, mentre G vi è nulla.

È facile però scorgere che tutti i tratti abbandonati devono tendere a passare per A. Infatti, se come variabili indipendenti che individuano il punto generatore delle curve, pigliamo non più G ed $H(\gamma)$, ma G e $\gamma(H)$, avremo che è possibile tener costante ogni valore arbitrario di U, col semplice fare tendere γ al

valore massimo $\frac{\pi}{2}$ e dare poi opportuno valore a G; ma con ciò cadremo ogni volta in A, che è l'unico punto in cui $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Diciamo: tendere a passare, e non: passare, perchè chiedere che cosa avvenga proprio nel punto A è fisicamente senza significato ed incappa nella non validità per distanze nulle della legge elementare di Laplace; notoriamente questa assegna forza magnetica infinita a distanza nulla da un elemento di corrente, ma per ragione di simmetria tale forza dovrebbe esservi nulla.

d) Metodo per risolvere il problema del profilo a minima resistenza, quando la sezione data della bobina mobile, non è più infinitesima.

Il concetto esposto nella nota preliminare, cioè che foggiando la sezione dei rocchetti fissi secondo le curve meridiane luogo dei punti a componente radiale costante, si otterranno profili a sensibilità massima per data resistenza, è generale, cioè applicabile anche se la sezione assegnata alla bobina mobile non è più piccolissima. Però la distribuzione delle componenti radiali delle forze magnetiche svolte dalla corrente in una bobina a sezione qualsiasi è nota soltanto in qualche caso e con limitazioni restrittive. Ad esempio, G. M. Minchin (*The Magnetic Field close to the Surface of a Wire conveying an Electrical Current*, " Philosophical Magazine ", *35*, Agosto 1893, pagina 201) svolge il caso della sezione circolare, ma ne studia gli effetti soltanto nei punti del campo molto vicini alla superficie del filo.

Ecco un metodo approssimato, che può servire a trovare tali componenti per sezioni date qualsiasi:

Il contorno $U =$ cost. preso dalla tavola allegata, ovvero ingrandito da essa omoteticamente, non è più contorno a minima resistenza, quando la sezione della bobina mobile non è nulla ed a forma arbitraria. La tavola però può servire a trovare tale contorno, almeno teoricamente, cioè a prescindere dalla eccessiva complicazione del metodo.

Basta scegliere entro la sezione mobile un certo numero di punti x_m, y_m equabilmente ripartiti, che rappresentino ciascuno,

a criterio, una concentrazione fittizia della corrente convogliata da una piccola area circostante, con che l'area totale dovrebbe prima essere opportunamente suddivisa. Per ciascun punto (x_m, y_m) si riprodurrebbero le corrispondenti curve $U = \text{cost.}$ sovrapponendole e ciò avverrebbe semplicemente per ognuno, con lo spostare il disegno [1] di un intervallo $\pm x_m$ nel senso delle ascisse e riprodurlo ingrandito in tale nuova posizione (p. es., meccanicamente, con pantografo) nel rapporto $\frac{y_m}{R_0}$, dove $R_0 = 20\ cm$, raggio supposto nella tavola. Dopo, sul disegno unico occorrerebbe riunire insieme tutti i punti del piano nei quali ΣU avrebbe un medesimo valore e si avrebbe così una schiera dei contorni desiderati. Un'area qualunque del disegno assunta come sezione meridiana di bobina darebbe poi una forza ponderomotrice rappresentata dal suo momento statico, con peso specifico superficiale ΣU in ogni punto, moltiplicato per $2\pi i_m c_f$.

Un quesito più radicale e, per così dire, complementare sarebbe quello di cercare quale contorno arbitrario di bobina mobile (per dato volume di rame da impiegare in essa) sia tale che cercandone col metodo precedente il corrispondente fisso (rame dato) risulti una sensibilità massima.

e) Azione di sezioni fisse qualsiasi su sezioni mobili assegnate e non più infinitesime.

In quanto segue, abbandoniamo il problema testè enunciato, supponendo alla bobina mobile sezione assegnata e finita e cerchiamo, senza costruire le curve del § precedente, quale azione assiale sviluppa su di essa un rocchetto con sezione data arbitraria, per esempio a minima resistenza. Con ciò ci poniamo in grado di fare confronti tra sezioni di differenti rocchetti fissi, che impieghino lo stesso rame, ma non passeremo a confronti numerici di sezioni effettivamente usate. Essi potranno essere oggetto di una prossima nota, considerandosi come scopo della presente, di conoscere teoricamente le curve $U = \text{cost.}$

1° Cominciamo col trovare la forza ponderomotrice sviluppata da una sezione, a contorno t dato arbitrario, su una

---

[1] Supposto ricondotto alla vera grandezza.

bobina mobile piatta avente spessore dp infinitesimo ed indipendente da y, raggio esterno R'' ed interno R'.

Sia $R \neq R_0$ il raggio variabile di una spira mobile, pel quale vogliamo utilizzare la tavola costruita per R_0. Chiamiamo x_0, y_0 le coordinate sul disegno, per ricordare che esse riguardano il valore R_0.

Diminuiamo dapprima R nel rapporto $\frac{R_0}{R}$ e insieme omoteticamente (con centro di omotetia nell'origine) il contorno t, calcolando poi coi valori di U portati dal disegno e pei punti (x_0, y_0) omologhi di (x, y), l'espressione:

$$2\pi\, i_m\, c_f \int_{t_0} U_0\, y_0\, (dx_0 \cdot dy_0),$$

dove l'integrale di superficie è fatto entro il contorno t_0.

Poi restituiamo R e t alla grandezza, forma e posizione primitiva. Poichè passiamo ora da uno strumento ad un altro geometricamente simile, avremo il nuovo valore della forza moltiplicando il precedente per il quadrato $\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$ del rapporto delle dimensioni omologhe; otteniamo cioè:

$$\frac{2\pi\, i_m\, c_f}{R_0^2} \int_{t_0} U_0\, y_0\, R^2\, (dx_0 \cdot dy_0),$$

dove x_0, y_0 sono funzioni anche di R.

Se poi ad i_m sostituiamo $c_m \,.\, dp \,.\, dR$, otteniamo:

$$\frac{2\pi\, c_m\, c_f\, dp}{R_0^2} \int_{R'}^{R''} dR \int_{t_0} U_0 \cdot y_0\, R^2\, (dx_0 \cdot dy_0) \tag{4}$$

azione complessiva sulla bobina piatta.

In pratica, sostituiremo a queste integrazioni tre sommatorie discontinue, prendendo piccoli uguali incrementi Δx_0, Δy_0, ΔR delle variabili e ottenendo così:

$$\frac{2\pi\, c_m\, c_f}{R_0^2}\, dp \cdot \Delta R \sum_{R'}^{R''} (\Delta x_0\, \Delta y_0) \sum_{t_0} U_0\, y_0\, R^2 \tag{4 bis}$$

dove, per ogni valore di R, da predisporre nella finca di una tabella (a), occorre cercare il contorno t_0 corrispondente e fare

tutti i valori che prende la sommatoria di destra ed il suo prodotto per $\Delta x_0 \Delta y_0$. Poi si farà la sommatoria a sinistra.

2° Passiamo al caso di una bobina mobile simmetrica a sezione rettangolare lunga $2l_1$ e spessa $(R'' - R')$. Separiamo dapprima una spirale piatta sottile, mediante due piani normali all'asse x; in generale questa non starà sull'asse y, ma ne disterà di una distanza che chiameremo $\pm l$. La forza esercitata su di essa è la medesima che se essa stesse sull'asse y, ma si spostasse invece parallelamente a se stessa la sezione del rocchetto fisso, di una quantità $\mp l$, calcolando poi sempre la corrispondente forza ponderomotrice mediante la (4). Potrà con ciò avvenire che alcuni termini della sommatoria (4*bis*) cambino segno; se dunque facciamo variare l da $-l_1$ a $+l_1$, abbiamo:

$$2\pi \frac{c_m c_f}{R_0^2} \int_{-l_1}^{+l_1} dl \int_{R'}^{R''} dR \int_{t_0} (\pm U_0)\, y_0\, R^2\, (dx_0 \cdot dy_0)\,,$$

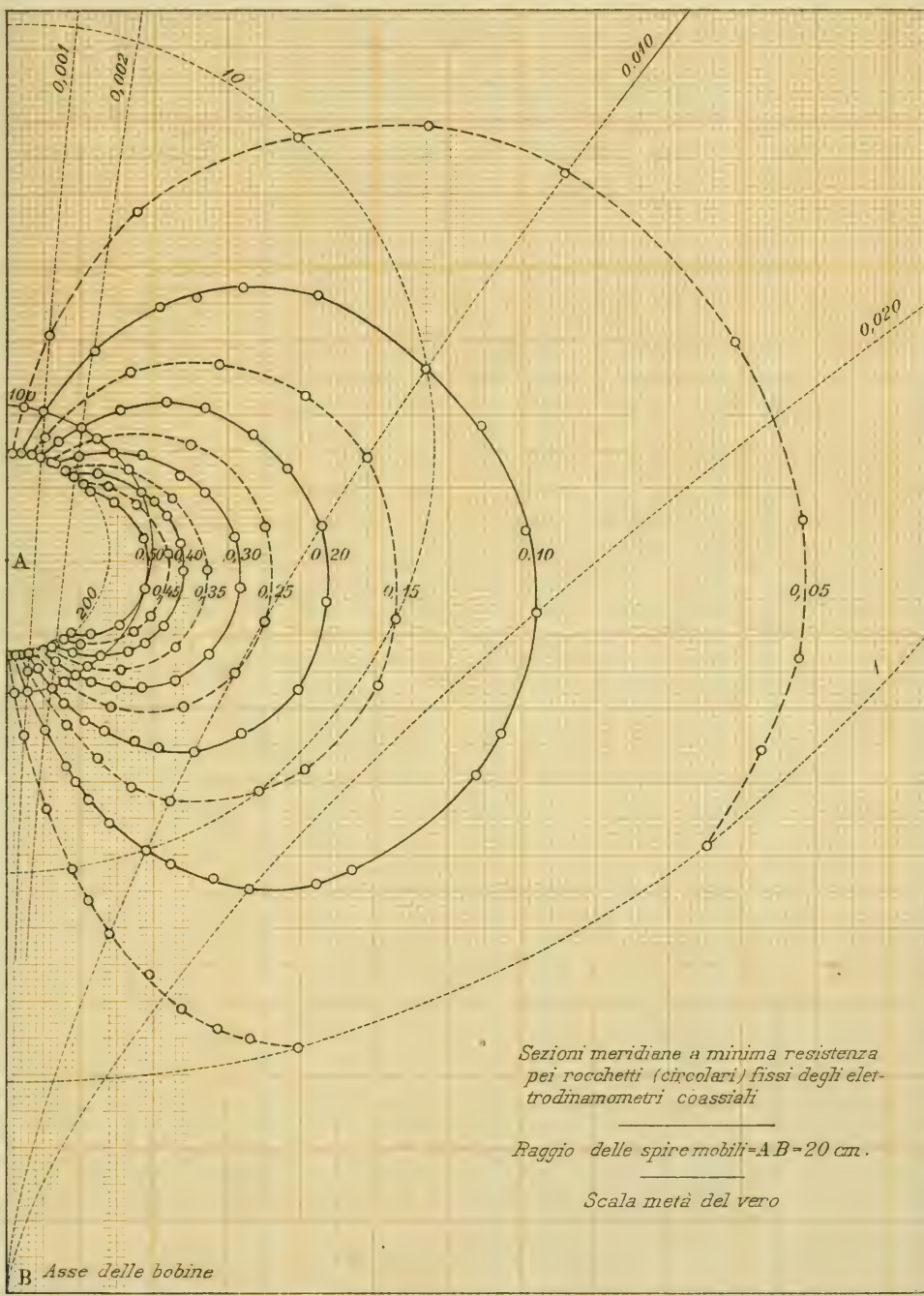
dove, per ogni valore di l e di R occorre disegnare il corrispondente contorno omotetico t_0. I termini della sommatoria che hanno cambiato segno essendo quelli pei quali la nuova x_0 è negativa (giacchè per essi U, come la componente radiale da cui proviene, è negativa, trattandosi di punti a sinistra dell'asse delle y), ne fu tenuto conto avvertendo il doppio segno di U_0.

Al solito, praticamente, sostituiremo gli integrali con sommatorie, prenderemo tanti incrementi successivi Δl uguali tra di loro e redigeremo una tabella riassuntiva, che in corrispondenza ai successivi valori di l riproduca i risultati finali di tante tabelle come quella (a) vista precedentemente; dopo faremo la sommatoria. Il metodo riesce alquanto complicato.

3° Per R' ed R'' indipendenti da x, si ha il caso della sezione rettangolare; se invece sono funzioni di x si ha il caso di forma qualsiasi.

I sistemi di tre carrucole per le sospensioni bifilari, attribuiti nella nota preliminare a Maxwell, furono, anteriormente a lui, usati da W. Weber, il quale ne emise l'idea nel 1837 e la realizzò nel 1846 e 1848 (*Opere*, vol. 2°, pag. 48 e vol. 3°, pag. 39 e 221).

Torino, 21 Ottobre 1916.

Lit. Salussolia Torino.

Intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi.

Nota di FILIPPO SIBIRANI (a Pavia).

1. Oggetto della Nota. — Un punto P_1 attira un punto P_2 e P_2 respinge P_1 con forza d'intensità direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente al quadrato delle distanze. Se la massa repellente è minore dell'attraente, e sotto speciali condizioni iniziali, determinate nel § 2, P_1 e P_2 ruotano uniformemente intorno ad un punto fisso O. In quest'ipotesi, un punto P, di massa tanto piccola rispetto a quelle di P_1 e P_2 da potersi trascurare la sua azione su P_1 e P_2, si muove sotto l'attrazione di P_1 e la repulsione di P_2. È questo un problema analogo, come ognun vede, al problema ristretto dei tre corpi: una realizzazione fisica è suggerita nella Relazione del recente Concorso alla Cattedra di Meccanica razionale al Politecnico di Torino (*).

Chiamando centri di librazione le posizioni d'equilibrio relativo di P rispetto al moto di rotazione di P_1 e P_2, si dimostra l'esistenza di cinque centri di librazione: due L_1, L_2 sono i vertici di due triangoli equilateri costruiti sul segmento $P_1 P_2$ nel piano di rotazione di P_1 e P_2 stessi; uno L_3 sulla retta $P_1 P_2$ dalla banda della massa attraente e due L_4, L_5 nel piano per $P_1 P_2$ perpendicolare a quello di rotazione (**). La determinazione di codesti centri di librazione è stata oggetto di un lavoro di E. Daniele (***); ma si vedrà l'opportunità di averla qui ripresa in esame.

(*) " Bollettino della Pubbl. Istruzione ", fasc. 13 aprile 1916.

(**) Anche nel problema ristretto dei tre corpi sono cinque i centri di librazione, ma tutti nel piano della rotazione delle due grandi masse.

(***) *Sui centri di librazione in un problema più generale di quello ristretto dei tre corpi*, " Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino ", vol. XLVII (1912).

Nel caso del problema ristretto dei tre corpi è stato fatto lo studio dei moti che mantengono l'asteroide nelle vicinanze dei centri di librazione ed in particolar modo dei moti periodici (*). Simile studio è qui fatto per il nostro problema che, per analogia a quanto si usa per quello ristretto dei tre corpi, si può dire *piano* se si suppone che P debba muoversi nel piano di rotazione di P_1 e P_2, e *spaziale* se si prescinde da questa restrizione.

In vicinanza dei due centri di librazione $L_1\, L_2$ esistono, nel caso piano, moti periodici a traiettorie ellittiche, qualunque sia il rapporto μ fra la massa repellente e l'attraente (**); sono possibili moti non periodici che mantengono P in vicinanza di L_1, L_2 le cui traiettorie tendono assintoticamente ad un'ellisse di centro L_1 (o L_2) e godono di questa proprietà: esiste una direzione tale che, condotte due rette di questa direzione per due punti dell'anzidetta ellisse, gli infiniti archi di traiettorie compresi nella striscia determinata dalle due rette sono tutti percorsi da P in tempi uguali. Se poi P occupa inizialmente una posizione P_0 sulla retta di codesta direzione uscente da L_1 (o da L_2) ed ha un'opportuna velocità iniziale nella direzione e verso di $P_0 - L_1$ (o $P_0 - L_2$), P ha un moto rettilineo assintotico a L_1 (o L_2). Nel caso spaziale, al primo tipo di moti corrispondono moti periodici se un certo rapporto, funzione di μ, è razionale, mentre se è irrazionale la traiettoria di P ha i suoi punti uniformemente densi in una porzione di cilindro ellittico; al secondo tipo corrispondono traiettorie i cui punti si addensano verso una porzione di superficie di un ci-

(*) Oltre a ciò che è raccolto in *Die Mechanik des Himmels* di CHARLIER (Leipzig, 1907, vol. II, cap. IX), si può vedere: HAPPELL, *Über die Lösungen beim Dreikörperproblem in der Nähe der Librationszentra*, " Mathem. Annalen ", vol. 71; BURGATTI, *Sopra una classe particolare di soluzioni asintotiche nel problema ristretto dei tre corpi*, " Rendic. R. Accad. delle Scienze di Bologna ", 1911; SIBIRANI, *Intorno ad alcune soluzioni del problema ristretto dei tre corpi*, " Rendic. dell'Istit. Lombardo di Sc. e Lettere ", 1916.

(**) A differenza di quanto avviene nel problema dei tre corpi, in cui l'esistenza di codesti moti è subordinata all'essere il rapporto della massa minore alla maggiore inferiore a $\frac{1}{2}(25 - \sqrt{621})$.

lindro ellittico (*); al terzo tipo corrisponde un moto piano sinusoidale che tende ad un moto armonico.

Per i moti che mantengono P in vicinanza di L_3 bisogna distinguere quando il rapporto μ fra la massa repellente e l'attraente è minore o maggiore di 0,11873849... Quando è verificata la prima ipotesi, sono possibili, nel caso piano, moti periodici ellittici, e se un certo rapporto (funzione di μ) è razionale sono possibili altri moti periodici la cui traiettoria pur non essendo ellittica è tuttavia una curva algebrica; se il detto rapporto è irrazionale, il moto non è periodico e la traiettoria ha i suoi punti uniformemente densi in una certa regione; nel caso spaziale, se due certi rapporti (funzioni di μ) sono razionali esistono moti periodici e la traiettoria è una curva algebrica; se uno di essi è irrazionale, la traiettoria di P ha i suoi punti uniformemente densi in certe porzioni di superficie, se entrambi sono irrazionali, in una certa porzione di spazio. Quando μ è maggiore di 0,11873849..., nel caso piano, sono possibili moti assintotici a L_3 e nel caso spaziale moti che tendono ad un moto armonico di centro L_3 sopra una retta per L_3 normale al piano di rotazione di P_1 e P_2.

In vicinanza di L_4 e L_5 sono possibili moti periodici ellittici in un piano per L_4 (o L_5); almeno per speciali valori di μ sono possibili moti piani secondo spirali che tendono assintoticamente a L_4 (o L_5); o moti che tendono al tendere di t a $+\infty$ ai moti ellittici precedenti.

2. Condizioni sotto le quali le masse m_1, m_2 ruotano uniformemente intorno ad un punto fisso. — Il punto P_1 di massa m_1 attiri P_2 di massa m_2 con la forza d'intensità $f\frac{m_1 m_2}{r^2}$, posto $r = \mathrm{mod}\,(P_1 - P_2)$, ed il punto P_2 respinga P_1 con forza di uguale intensità. Prendendo un'opportuna unità di tempo, si può supporre $f = 1$, onde le equazioni (vettoriali) del moto di P_1 e P_2 sono

$$(1) \qquad P_1'' = \frac{m_2}{r^3}(P_1 - P_2), \qquad P_2'' = \frac{m_1}{r^3}(P_1 - P_2).$$

(*) Nel senso che i punti della porzione di cilindro sono tutti punti limiti per l'insieme dei punti della traiettoria di P.

Se O è il punto definito da

$$m_1 (P_1 - O) = m_2 (P_2 - O),$$

dalle (1) si deduce facilmente

$$O'' = 0;$$

onde O è immobile durante il moto se lo è inizialmente, cioè se

$$m_1 P_1'^{(0)} = m_2 P_2'^{(0)}, \tag{2}$$

ove $P_1'^{(0)}$, $P_2'^{(0)}$ sono le velocità di P_1 e P_2 al tempo $t = 0$. Il punto O è sulla retta $P_1 P_2$, esterno al segmento $P_1 P_2$ e dalla banda della massa maggiore.

Posto

$$r_1 = \text{mod}\,(P_1 - O), \qquad r_2 = \text{mod}\,(P_2 - O),$$

le (1) divengono

$$P_1'' = \mp \frac{m_2^3}{(m_1 - m_2)^2} \cdot \frac{P_1 - O}{r_1^3},$$

$$P_2'' = \mp \frac{m_1^3}{(m_1 - m_2)^2} \cdot \frac{P_2 - O}{r_2^3},$$

ove vale il segno $-$ se $m_1 > m_2$, il segno $+$ se $m_1 < m_2$.

Il moto di P_1 (o di P_2) è quello di un punto attratto o respinto dal punto fisso O con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Se $m_2 > m_1$, le traiettorie di P_1 e P_2 sono *iperboli*, mentre sono *cerchi* se

$$m_1 > m_2, \tag{3}$$

cioè *se la massa attraente è maggiore della repellente*, e se

$$(P_1'^{(0)})^2 - \frac{2k}{\text{mod}\,(P_1^{(0)} - O)} = - \frac{k^2}{[(P_1^{(0)} - O) \wedge P_1'^{(0)}]^2} \tag{4}$$

$$k = \frac{m_2^3}{(m_1 - m_2)^2} \text{ (*)}.$$

(*) Nella citata Nota del Prof. E. DANIELE è ritenuto (§ 1, 2ª parte) che sia sufficiente la nostra condizione (2) perchè i due punti P_1, P_2 ruotino

In questo caso il moto è uniforme di velocità angolare

$$(5) \qquad \frac{\sqrt{m_1 - m_2}}{r_0^{3/2}}$$

ove è

$$r_0 = \mathrm{mod}\,(P_1^{(0)} - P_2^{(0)}),$$

cioè r_0 è la distanza iniziale dei due punti P_1 e P_2.

Concludendo:

le condizioni sotto le quali P_1 *e* P_2 *ruotano uniformemente intorno ad un punto fisso sono le* (2), (3), (4).

3. Equazioni del moto di una piccolissima massa sotto l'azione di m_1 e m_2. — Nell'ipotesi che P_1 e P_2 abbiano il moto circolare uniforme intorno ad O dianzi definito, si supponga che un punto P. di massa tanto piccola rispetto a m_1 e m_2 da ritenere nulla l'azione sua sopra P_1 e P_2, sia attratto da P_1 e respinto da P_2 secondo l'indicata legge.

Prendiamo per unità di massa la massa di P_1 e indichiamo con μ ($\mu < 1$) la massa di P_2; per unità di lunghezza prendiamo la distanza di P_1 da P_2. Riferiamo il moto ad una terna di assi ortogonali, aventi origine nel punto fisso O, l'asse x coincidente con la retta $P_1 P_2$ e col senso positivo da P_1 a P_2, il semiasse positivo y sia quello che si ottiene ruotando di un angolo retto il semiasse positivo x nel senso della rotazione della retta $P_1 P_2$; l'asse z abbia per senso positivo quello secondo cui la rotazione della $P_1 P_2$ apparisce avvenire da sinistra a destra.

Il potenziale delle forze agenti sull'unità di massa di P è

$$u = \frac{1}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}$$

uniformemente intorno al punto O, quando siano sollecitati da forze d'attrazione o di repulsione secondo la indicata legge. Invece il baricentro delle due masse (dotate di segno) può essere fisso ed i punti P_1, P_2 muoversi secondo coniche diverse dal cerchio e con moto non uniforme: basta osservare che il moto di P_1 (o di P_2) si riduce a quello di un punto attratto o respinto dal baricentro fisso con forza proporzionale inversamente al quadrato della distanza.

ove

$$(6)\qquad \begin{aligned}\rho_1 &= \mathrm{mod}\,(P - P_1) = \sqrt{\left(x - \frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 + y^2 + z^2}\,;\\ \rho_2 &= \mathrm{mod}\,(P - P_2) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{1-\mu}\right)^2 + y^2 + z^2}\,.\end{aligned}$$

Osservando che per la (5) la velocità angolare della rotazione di $P_1\,P_2$ intorno ad O è $\sqrt{1-\mu}$, le equazioni del moto relativo di P rispetto alla terna di assi rotanti, sono

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{dy}{dt} - (1-\mu)\,x = \frac{\partial u}{\partial x}\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{dx}{dt} - (1-\mu)\,y = \frac{\partial u}{\partial y}\\ &\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial z}\,.\end{aligned}\right.$$

Mediante le (6) si trae facilmente

$$(1-\mu)\,(x^2+y^2) = \rho_1{}^2 - \mu\rho_2{}^2 - (1-\mu)\,z^2 - \frac{\mu}{1-\mu}\,,$$

di guisa che ponendo

$$(8)\qquad w = -\frac{1-\mu}{2}\,z^2 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1{}^2}{2}\right) - \mu\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_2{}^2}{2}\right),$$

le equazioni del moto prendono la forma

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{dy}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{dx}{dt} = \frac{\partial w}{\partial y}\\ &\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial w}{\partial z}\,.\end{aligned}\right.$$

Di questo sistema esiste l'integrale primo

$$(9)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2w - C,$$

con C costante.

Se nelle (7′) si suppone $z = 0$, si hanno le equazioni nel caso del moto piano; si deve allora porre $z = 0$ nelle (6), (8) e (9).

4. Centri di librazione. — I punti di equilibrio relativo per P sono definiti dalle equazioni

$$(10) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

La terza equivale a

$$z\left(\frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right) = 0 ,$$

soddisfatta da

$$(11) \qquad z = 0 ,$$

o da

$$(12) \qquad \frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} = 0 .$$

Se è $z = 0$, i centri di librazione sono a cercarsi sul piano xy. Poichè le due prime equazioni si possono scrivere

$$(10') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial \rho_2}{\partial y} = 0 , \end{cases}$$

se

$$D = \frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_2}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial y}$$

è diverso da zero, il sistema (10') è soddisfatto solo da $\frac{\partial w}{\partial \rho_1} = \frac{\partial w}{\partial \rho_2} = 0$, cioè da

$$\rho_1 = \rho_2 = 1 .$$

Ciò mostra che

sono centri di librazione i vertici L_1, L_2 *dei due triangoli equilateri costruiti sopra il segmento* $P_1 P_2$ *nel piano di rotazione di* P_1, P_2.

Se poi $D = 0$, delle due (10') l'una è conseguenza dell'altra, e quindi basta soddisfare ad una di esse: la condizione $D = 0$ equivale a $y = 0$, cioè gli ulteriori punti del piano xy che possono essere centri di librazione sono sulla retta $P_1 P_2$.

Se supponiamo che P sia sulla $P_1 P_2$ dalla banda di P_2, si ha:

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \qquad \rho_1 = x - \frac{\mu}{1-\mu}, \qquad \rho_2 = x - \frac{1}{1-\mu},$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 1,$$

onde la prima delle (10′) diviene

$$(1-\mu)\rho_2^5 + (3-2\mu)\rho_2^4 + (3-\mu)\rho_2^3 + \mu\rho_2^2 + 2\mu\rho_2 + \mu = 0,$$

la quale equazione, avendo tutti i coefficienti positivi, non ha radici positive (*): da ciò discende

non esiste alcun centro di librazione sulla retta P$_1$ P$_2$ *dalla banda della massa repellente.*

Se supponiamo P dalla banda di P_1, è

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \qquad \rho_1 = \frac{\mu}{1-\mu} - x, \qquad \rho_2 = \frac{1}{1-\mu} - x,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -1,$$

e la prima equazione delle (10′) diviene

$$(1-\mu)\rho_1^5 + (2-3\mu)\rho_1^4 + (1-3\mu)\rho_1^3 - \rho_1^2 - 2\rho_1 - 1 = 0,$$

la quale equazione, presentando una sola variazione di segno qualunque sia $\mu < 1$, ha una sola radice positiva. Poichè il

---

(*) Nella Nota del DANIELE la equazione fondamentale segnata col numero (10) non è esatta, essendo ottenuta dall'accoppiamento della (8) in cui r e ρ sono numeri essenzialmente positivi con due altre formole in cui r e ρ sono numeri con segno. La (10) deve tradurre che la risultante delle azioni di S e J su P fa equilibrio alla forza di strascinamento. Nell'ipotesi del problema ristretto, la (10) dà

$$r - \mu\rho = \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{\rho^2};$$

il primo membro rappresenta la forza di strascinamento, il secondo non rappresenta la risultante delle attrazioni se non quando P è in mezzo a S e J.

primo membro è negativo tanto per $\rho_1 = 0$ che per $\rho_1 = 1$, la radice positiva è maggiore di 1. Si conchiude:

esiste sulla $P_1 P_2$ *e dalla banda della massa attraente un sol centro di librazione* L_3; *esso dista da* P_1 *di una lunghezza maggiore del segmento* $P_1 P_2$.

Supponiamo P fra P_1 e P_2; sull'unità di massa di P agisce la forza d'intensità

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{\mu}{(1-\rho_1)^2} > 1 + \mu ;$$

d'altra parte la forza di strascinamento, diretta in senso contrario alla precedente, è in valor assoluto

$$(1-\mu)\left(\frac{\mu}{1-\mu} + \rho_1\right) < 1 ;$$

codeste due forze non possono mai equilibrarsi e perciò:

sulla retta $P_1 P_2$ *non v'ha alcun centro di librazione fra le due masse.*

Supponiamo ora verificata la (12), cioè

$$\rho_2 = \rho_1 \sqrt[3]{\mu} . \tag{12'}$$

Se sostituiamo nelle prime due, abbiamo

$$y = 0 , \qquad \rho_1^3 x (1-\mu) = 1 , \tag{13}$$

la prima delle quali mostra che gli eventuali centri di librazione debbono cercarsi nel piano xz.

Nel piano xz prendiamo un sistema di coordinate polari con il polo in P_1 ed il semiasse polare coincidente con la $P_1 P_2$; detto r il raggio vettore, ϑ l'anomalia, si ha

$$\rho_1 = r, \quad \rho_2^2 = r^2 - 2r\cos\vartheta + 1 , \quad x = \frac{\mu}{1-\mu} + r\cos\vartheta .$$

L'equazione del cerchio (12') diviene

$$r^2 (1 - \sqrt[3]{\mu^2}) - 2r\cos\vartheta + 1 = 0 \tag{12''}$$

e la (13) diventa

$$(13') \qquad r^4 (1-\mu) \cos \vartheta + \mu r^3 - 1 = 0 .$$

Il cerchio ha P_1 esterno e P_2 interno; la curva di equazione (13') passa per P_2 giacchè la (13') è soddisfatta da $r=1$, $\vartheta = 0$; per ogni ϑ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ la (13') ha una radice positiva in r che è funzione continua di ϑ; ciò mostra che la curva (13') incontra il cerchio. I punti di incontro sono simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$, data la simmetria delle due curve intersecantisi rispetto alla stessa retta.

Eliminando ϑ fra (12'') e (13') si ha l'equazione in r

$$r^5 (1-\mu)(1-\sqrt[3]{\mu^2}) + r^3 (1+\mu) - 2 = 0$$

che ha una sola radice positiva. E poichè il primo membro è negativo per $r=1$ e positivo per $r = 1 : \sqrt[3]{\mu}$, la radice (cioè il ρ_1 corrispondente ai punti d'incontro) è compresa fra 1 e $1 : \sqrt[3]{\mu}$ ed allora ρ_2 è compreso fra $\sqrt[3]{\mu}$ ed 1; di più per la (13) è

$$\frac{\mu}{1-\mu} < x < \frac{1}{1-\mu} .$$

Si può allora concludere:

qualunque sia $\mu\,(<1)$ *esistono sul piano per* $P_1 P_2$ *normale a quello di rotazione di* P_1 *e* P_2 *stessi due centri di librazione* L_4, L_5 *simmetrici rispetto alla* $P_1 P_2$; *la congiungente* $L_4 L_5$ *taglia il segmento* $P_1 P_2$ (*).

5. Equazioni dei moti che mantengono P nelle vicinanze dei centri di librazione. — Se a, b, c sono le coordinate di un centro di librazione, poniamo

$$x = a + \xi , \qquad y = b + \eta , \qquad z = c + \zeta ;$$

(*) Ciò non concorda con quanto è asserito nel § 6 della citata Nota del Daniele, ove è detto che è necessario per l'esistenza di codesti due centri di librazione che μ sia prossimo ad 1.

il punto P si muoverà nelle vicinanze del centro di librazione se ξ, η, ζ, sono funzioni del tempo che si mantengono sufficientemente piccole. Al sistema differenziale (7′) si sostituirà il sistema approssimato che si ottiene trascurando nei secondi membri delle stesse equazioni (7′) le potenze di ξ, η, ζ, superiori alla prima, una volta fatte le indicate sostituzioni di variabili.

Indicando con $\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial a\, \partial b}$, ... i valori di $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}$, ... per $x = a$, $y = b$, $z = c$, le equazioni del moto sono

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial a^2}\,\xi + \dfrac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial b}\,\eta + \dfrac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial c}\,\zeta \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial b\,\partial a}\,\xi + \dfrac{\partial^2 w}{\partial b^2}\,\eta + \dfrac{\partial^2 w}{\partial b\,\partial c}\,\zeta \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial c\,\partial a}\,\xi + \dfrac{\partial^2 w}{\partial c\,\partial b}\,\eta + \dfrac{\partial^2 w}{\partial c^2}\,\zeta. \end{cases}$$

Saranno soluzioni del sistema (7′) legittimamente accettabili nell'ordine di approssimazione in cui ci siamo messi quelle soluzioni del sistema (14) che si mantengono, al variare del tempo, sufficientemente piccole.

6. Moti in vicinanza di L_1, L_2; caso piano. — Se i centri di librazione sono i due L_1, L_2 le equazioni (14) divengono

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{3}{4}(1-\mu)\,\xi \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\,\eta \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\xi}{dt} = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\,\xi + \dfrac{9}{4}(1-\mu)\,\eta \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -(1-\mu)\,\zeta, \end{cases} \quad (15')$$

giacchè è

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \frac{3}{4}(1-\mu), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = \frac{9}{4}(1-\mu), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial b} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\ (*)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = -(1-\mu), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial c} = \frac{\partial^2 w}{\partial b\,\partial c} = 0.$$

(*) Del doppio segno il superiore vale in vicinanza di L_1 posto nel semipiano delle η positive, l'inferiore in vicinanza di L_2.

Le prime due equazioni si integrano a parte; così pure la terza, la quale ammette per integrale generale

$$(16) \qquad \zeta = \zeta_0 \cos \sqrt{1-\mu}\, t + \frac{\zeta_0'}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{sen} \sqrt{1-\mu}\, t,$$

indicando con ζ_0 e ζ_0' i valori di ζ e ζ' al tempo $t = 0$. Se inizialmente il punto P si trova nel piano $\xi\eta$, lungo il quale è diretta la velocità iniziale, allora P seguita a muoversi sempre nel detto piano: le equazioni differenziali del moto nel caso piano sono dunque le prime due delle (15) che indicheremo con (15′). Cominciamo a studiare il caso piano.

Se si pone

$$\xi = A\, e^{\lambda t}, \qquad \eta = B\, e^{\lambda t}$$

con A, B, λ costanti, si sostituisce in (15′) e si elimina A e B, si ha l'equazione

$$(17) \qquad 4\lambda^4 + 4(1-\mu)\lambda^2 - 27\mu = 0\,,$$

le cui radici in λ^2 sono

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\mu - 1 \pm \sqrt{\mu^2 + 25\mu + 1}\right),$$

delle quali l'una positiva e l'altra negativa; sicchè in λ due radici sono immaginarie pure $i\alpha$, $-i\alpha$, due sono reali β, $-\beta$, posto

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \mu + \sqrt{1 + 25\mu + \mu^2}\right),$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\left(\mu - 1 + \sqrt{1 + 25\mu + \mu^2}\right).$$

L'integrale generale del sistema (15′) è della forma

$$\xi = A_1 \cos \alpha t + A_2 \operatorname{sen} \alpha t + A_3\, e^{-\beta t} + A_4\, e^{\beta t}$$

$$\eta = B_1 \cos \alpha t + B_2 \operatorname{sen} \alpha t + B_3\, e^{-\beta t} + B_4\, e^{\beta t}$$

ove fra le 8 costanti $A_1, A_2, \dots B_3, B_4$ passano le 4 relazioni

$$
(18) \quad \begin{cases}
\left[\alpha^2 + \frac{3}{4}(1-\mu)\right] A_1 = \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu) B_1 - 2\sqrt{1-\mu}\,\alpha B_2 \\
\left[\alpha^2 + \frac{3}{4}(1-\mu)\right] A_2 = 2\sqrt{1-\mu}\,\alpha B_1 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu) B_2 \\
\left[\beta^2 - \frac{3}{4}(1-\mu)\right] A_3 = \left[-2\sqrt{1-\mu}\,\beta \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\right] B_3 \\
\left[\beta^2 - \frac{3}{4}(1-\mu)\right] A_4 = \left[\quad 2\sqrt{1-\mu}\,\beta \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\right] B_4 .
\end{cases}
$$

Il termine $e^{\beta t} (\beta > 0)$ tende a $+\infty$ al tendere di t a $+\infty$, onde esso non può comparire nelle soluzioni che si mantengono in valore assoluto abbastanza piccole.

Fra i moti che mantengono P nelle vicinanze di L_1, L_2 è a notare il moto periodico

$$
(19) \quad \begin{cases}
\xi = A_1 \cos \alpha t + A_2 \operatorname{sen} \alpha t \\
\eta = B_1 \cos \alpha t + B_2 \operatorname{sen} \alpha t
\end{cases}
$$

ove fra le costanti A_1, A_2, B_1, B_2 passano le prime due relazioni (18).

Se con ξ_0, η_0 indichiamo le coordinate di P al tempo $t=0$ e con ξ_0', η_0' le componenti della sua velocità iniziale, è

$$
(18') \quad A_1 = \xi_0, \quad B_1 = \eta_0, \quad \alpha A_2 = \xi_0', \quad \alpha B_2 = \eta_0';
$$

e se si prendono come costanti arbitrarie ξ_0, η_0 (che si supporranno sufficientemente piccole) dovrà essere

$$
(20) \quad \begin{aligned}
\xi_0' &= \frac{1}{2\sqrt{1-\mu}} \left[\left\{ \alpha^2 + \frac{9}{4}(1-\mu) \right\} \eta_0 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\,\xi_0 \right] \\
\eta_0' &= \frac{-1}{2\sqrt{1-\mu}} \left[\left\{ \alpha^2 + \frac{3}{4}(1-\mu) \right\} \xi_0 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\,\eta_0 \right].
\end{aligned}
$$

Le traiettorie periodiche di P sono le ellissi, col centro nel centro di librazione,

$$
(21) \quad \begin{aligned}
&(4\alpha^2 + 3(1-\mu))(\xi^2 - \xi_0^2) + \\
&+ (4\alpha^2 + 9(1-\mu))(\eta^2 - \eta_0^2) \pm 3\sqrt{3}(1+\mu)(\xi\eta - \xi_0\eta_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Uno degli assi dell'ellisse è inclinato sulla retta $P_1 P_2$ dell'angolo θ definito da

$$\operatorname{tg} 2\theta = \pm \sqrt{3}\,(\mu - 1) : (\mu + 1).$$

Al variare di μ, un asse dell'ellisse che ha il centro in L_1 si sposta nell'angolo di 30° formato dalla $P_1 L_1$ e dalla parallela per L_1 alla $P_1 P_2$.

Il tempo impiegato da P a percorrere l'ellisse (21) è

$$\tau = 2\pi \sqrt{2} : \sqrt{1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 25\mu + 1}}\,;$$

e poichè il tempo impiegato da P_1 e P_2 a compiere una rotazione è $T = 2\pi : \sqrt{1 - \mu}$, il rapporto fra i due tempi è

$$\tau : T = \sqrt{2\,(1 - \mu)} : \sqrt{1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 25\mu + 1}}\,,$$

rapporto che è sempre minore di 1 e tende, crescendo, ad 1 al tendere di μ a zero.

Altre soluzioni particolari del sistema (15') da notarsi sono

$$(22) \qquad \begin{cases} \xi = A_1 \cos \alpha t + A_2 \operatorname{sen} \alpha t + A_3\, e^{-\beta t} \\ \eta = B_1 \cos \alpha t + B_2 \operatorname{sen} \alpha t + B_3\, e^{-\beta t} \end{cases}$$

quando fra le sei costanti $A_1, \ldots B_3$ passano le prime tre relazioni (18); le tre costanti arbitrarie si determinano poi in funzione delle condizioni iniziali mediante le relazioni

$$\xi_0 = A_1 + A_3\,, \qquad \eta_0 = B_1 + B_3\,,$$
$$\xi_0' = \alpha A_2 - \beta A_3\,, \qquad \eta_0' = \alpha B_2 - \beta B_3\,,$$

ove delle ξ_0, η_0, ξ_0', η_0' tre sole possono prendersi arbitrariamente.

Mediante opportune condizioni iniziali, ξ e η si mantengono in modulo abbastanza piccole, per t variabile in $0 \dashv +\infty$.

Poichè per t che tende a $+\infty$, $e^{-\beta t}$ tende a zero, la traiettoria di P tende assintoticamente all'ellisse

$$(23) \qquad (B_2 \xi - A_2 \eta)^2 + (A_1 \eta - A_1 \xi)^2 = (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2.$$

Dal tempo $t=0$ in poi la traiettoria è tutta compresa nella regione che codesta ellisse copre subendo la traslazione per cui il suo centro dall'origine passa nel punto di coordinate A_3, B_3.

Le posizioni di P ad intervalli di tempo $2\pi:\alpha$ sono tutte allineate su rette che hanno la comune direzione di coefficiente angolare

$$B_3 : A_3 = [4\beta^2 - 3(1-\mu)] : [-8\sqrt{1-\mu}\,\beta \pm 3\sqrt{3}\,(1+\mu)].$$

Infatti se poniamo

$$a = A_1 \cos\alpha\tau + A_2 \operatorname{sen}\alpha\tau$$
$$b = B_1 \cos\alpha\tau + B_2 \operatorname{sen}\alpha\tau$$

ai tempi

$$t_k = \tau + \frac{2k\pi}{\alpha},$$

con k intero qualunque, il punto P occupa posizioni (ξ_k, η_k) per cui è

$$\frac{\eta_k - b}{\xi_k - a} = \frac{B_3}{A_3} \quad (*).$$

In altre parole, una retta di coefficiente angolare $B_3 : A_3$ condotta per un punto qualunque dell'ellisse (23) incontra la traiettoria in infiniti punti; il tempo che P impiega a passare da uno di codesti punti al successivo è costante (e precisamente $2\pi:\alpha$). Di qui segue che mandate due rette di coefficiente angolare $B_3 : A_3$ per due punti qualunque dell'ellisse (23), gli infiniti archi di traiettoria compresi nella striscia formata dalle due rette e aventi gli estremi su queste sono percorsi in tempi uguali.

Infine, sempre nel caso piano, è a notarsi un possibile moto rettilineo. Se al tempo $t=0$ è $P_0(\xi_0, \eta_0)$ la posizione di P, se $L_1 - P_0$ ha modulo sufficientemente piccolo e la dire-

(*) Se si osserva che (a, b) è un punto dell'ellisse (23) e che

$$\lim_{k=\infty} \xi_k = a, \qquad \lim_{k=\infty} \eta_k = b,$$

è visto subito come la traiettoria di P tenda assintoticamente all'ellisse (23).

zione di coefficiente angolare $B_3 : A_3$ e la velocità iniziale è uguale a $\beta(L_1 - P_0)$, allora P si muove del moto definito da

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{-\beta t};$$

P percorre il segmento $L_1 P_0$ e tende assintoticamente ad L_1.

7. Moti in vicinanza di L_1, L_2: caso spaziale. — Per la speciale forma già notata del sistema (15), se al tempo $t = 0$ è $\xi = \eta = \xi' = \eta' = 0$, sono soluzioni del sistema stesso

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \zeta_0 \cos\sqrt{1-\mu}\, t + \frac{\zeta_0'}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{sen}\sqrt{1-\mu}\, t,$$

ove si supporranno ζ_0, ζ'_0 sufficientemente piccoli per mantenerci nell'indicato ordine d'approssimazione. Dunque:

se al tempo $t = 0$, P *si trova sulla normale in* L_1 (*o* L_2) *al piano di rotazione di* P_1 *e* P_2 *ed ha velocità nulla o diretta secondo la detta normale, il moto di* P *è armonico, di centro* L_1, *e di periodo uguale alla durata di una rivoluzione di* P_1 *e* P_2.

Non verificate queste condizioni iniziali, *ogni soluzione del caso piano, accoppiata alla* (16), *costituisce una soluzione del caso spaziale.*

Per i moti di P definiti dalle due (19) e dalla (16) vale la proposizione

se $\alpha : \sqrt{1-\mu}$ *è un numero razionale, la traiettoria di* P *è chiusa ed il moto è periodico; se è irrazionale, i punti della traiettoria di* P *sono uniformemente densi nella porzione di superficie cilindrica che ha per direttrice la ellisse* (21) *e per generatrici delle parallele a* ζ, *compresa fra i due piani*

$$\zeta = \pm\sqrt{\frac{\zeta_0'^2 + (1-\mu)\zeta_0^2}{1-\mu}} \quad (*). \tag{24}$$

(*) Dicendo che i punti della traiettoria sono uniformemente densi in una superficie Σ intendiamo che in ogni intorno di un punto di Σ, appartenente a Σ stessa, esiste qualche punto della traiettoria. Per la dimostrazione dell'enunciato vedi la mia citata Nota, § 3.

La traiettoria chiusa del moto periodico non è piana, giacchè si dimostra che

fra i moti definiti dalle (19) *e* (16) *sono piani solamente gli ellittici nel piano* $\xi\eta$ *e l'armonico sull'asse* ζ *già segnalati.*

Infatti il wronskiano delle tre derivate delle funzioni ξ, η, ζ definite da (19) e (16) è, tenuto conto delle (18'),

$$\alpha^2 [\alpha^2 - (1-\mu)] (\xi_0 \eta_0' - \eta_0 \xi_0') (\zeta_0' \cos \sqrt{1-\mu}\, t - \sqrt{1-\mu}\, \zeta_0 \operatorname{sen} \sqrt{1-\mu}\, t);$$

ora α^2 e $\alpha^2 - (1-\mu)$ non sono manifestamente nulli: il fattore $\xi_0 \eta_0' - \eta_0 \xi_0'$ per le (20) è, prescindendo da un fattore non nullo,

$$\left[\alpha^2 + \frac{3}{4}(1-\mu)\right] \xi_0^2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}(1+\mu)\, \xi_0 \eta_0 + \left[\alpha^2 + \frac{9}{4}(1-\mu)\right] \eta_0^2$$

che non si annulla per altri valori reali di $\xi_0 \eta_0$ che per $\xi_0 = \eta_0 = 0$; l'ultimo fattore è identicamente nullo solo se $\zeta_0 = \zeta_0' = 0$. Il wronskiano non è nullo, onde l'asserto è provato.

Sono soluzioni del sistema (15) le (22) accoppiate alla (16): per codeste soluzioni vale la proposizione:

se il rapporto $\alpha : \sqrt{1-\mu}$ *è irrazionale, ogni punto della porzione di superficie cilindrica che ha per direttrice l'ellisse* (23) *e generatrici parallele a* ζ, *compresa fra i due piani* (24), *è punto limite dell'insieme dei punti della traiettoria di* P.

Invero, comunque piccolo sia il numero positivo ϵ, si può trovare un valore τ di t tale che per $t > \tau$, sia

$$|A_3 e^{-\beta t}| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |B_3 e^{-\beta t}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Preso un punto qualunque (ξ_1, η_1, ζ_1) della porzione anzidetta di superficie cilindrica, v'ha sempre un valore $\tau_1 > \tau$ per cui

$$\zeta_0 \cos \sqrt{1-\mu}\, \tau_1 + \frac{\zeta_0'}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{sen} \sqrt{1-\mu}\, \tau_1 = \zeta_1 .$$

Vi sono poi infiniti valori interi di k per cui

$$\left| \xi_1 - \left[A_1 \cos\alpha\left(\tau_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{1-\mu}}\right) + A_2 \operatorname{sen}\alpha\left(\tau_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{1-\mu}}\right)\right]\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left| \eta_1 - \left[B_1 \cos\alpha\left(\tau_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{1-\mu}}\right) + B_2 \operatorname{sen}\alpha\left(\tau_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{1-\mu}}\right)\right]\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

ed allora ai tempi

$$t = \tau_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{1-\mu}}$$

in cui k prende gli infiniti detti valori, le coordinate ξ, η, ζ di P soddisfano alle condizioni

$$|\xi - \xi_1| < \epsilon, \qquad |\eta - \eta_1| < \epsilon, \qquad \zeta = \zeta_1,$$

ciò che dimostra il teorema.

Infine notiamo un possibile moto piano, in un piano normale a quello di rotazione di P_1 e P_2. Supponiamo che al tempo $t = 0$, P abbia tal posizione che la sua proiezione sul piano ξ, η e la proiezione della sua velocità iniziale sullo stesso piano soddisfino alle condizioni cui abbiamo supposto soddisfi la posizione e la velocità iniziale di P nell'ultimo moto rettilineo segnalato nel paragrafo precedente. Allora P ha il moto

$$\xi = \xi_0\, e^{-\beta t}, \qquad \eta = \eta_0\, e^{-\beta t},$$
$$\zeta = \zeta_0 \cos\sqrt{1-\mu}\, t + \frac{\zeta_0'}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{sen}\sqrt{1-\mu}\, t$$

che è un moto sinusoidale nel piano $\xi\eta_0 = \eta\xi_0$, il quale moto al tendere di t a $+\infty$ tende al moto armonico di centro L_1 sulla normale al piano di rotazione di P_1 e P_2

$$\zeta = \zeta_0 \cos\sqrt{1-\mu}\, t + \frac{\zeta_0'}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{sen}\sqrt{1-\mu}\, t.$$

8. **Moti in vicinanza di L_3.** — Nel centro di librazione L_3 è

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = 1 - \mu + 2\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = 1 - \mu - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = \frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial^2 w}{\partial a\,\partial c} = \frac{\partial^2 w}{\partial b\,\partial c} = 0,$$

ove ρ_1 e ρ_2 sono legati dalle relazioni

$$\rho_2 = \rho_1 + 1 , \qquad \frac{1}{\rho_1^2} - \rho_1 = \mu \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \rho_2 \right) . \tag{25}$$

Il sistema (14) è allora

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{d\eta}{dt} = \left[1 - \mu + 2\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]\xi \\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\frac{d\xi}{dt} = \left[1 - \mu - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]\eta \\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \left(\frac{\mu}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right)\zeta ; \end{aligned} \right. \tag{26}$$

(le prime due equazioni costituiscono il sistema (26′))

le prime due sono le equazioni nel caso piano.

L'equazione analoga alla (17) è qui

$$\lambda^4 + \lambda^2\left(2(1-\mu) - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right) + \tag{17′}$$
$$+ \left[1 - \mu + 2\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]\left[1 - \mu - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right] = 0 .$$

Ora osserviamo che è

$$1 - \mu + 2\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) > 0 ,$$

e per le (25)

$$(1-\mu) - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) = \frac{\rho_1^3 - 1}{\rho_1^2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right),$$

e quindi, per essere $\rho_1 > 1$,

$$(1-\mu) - \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) > 0 ;$$

onde il termine noto dell'equazione (17′) è positivo.

Se il discriminante della (17′), considerata come equazione di 2° grado in λ^2, è positivo e se il coefficiente di λ^2 è positivo, le radici saranno ambedue negative, altrimenti sono complesse o positive entrambe.

Perchè le radici in λ^2 siano entrambe negative è necessario e basta dunque che

$$(27) \qquad 2(1-\mu)-\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right)>0\,,$$

$$(28) \qquad \left[2(1-\mu)-\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]^2-$$
$$-4\left[1-\mu+2\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]\left[1-\mu-\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right)\right]>0\,.$$

Quest'ultima equivale, sopprimendo il fattore positivo

$$\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\,,$$

all'altra

$$(28') \qquad 9\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right)-8(1-\mu)>0\,.$$

Dalle (25) si ricava

$$\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}=\frac{1+\rho_1^4}{\rho_1^3(1+\rho_1)}-\mu\,,$$

e sostituendo nelle (27) e (28′) si ha

$$2-\mu>\frac{1+\rho_1^4}{\rho_1^3(1+\rho_1)}>\frac{8+\mu}{9}\,.$$

La prima disuguaglianza è sempre soddisfatta, perchè $2-\mu>1$ e $\frac{1+\rho_1^4}{\rho_1^3(1+\rho_1)}$ è minore di 1 per essere $\rho_1>1$ (§ 4); da ciò segue intanto che, essendo verificata la (27), se le radici in λ^2 sono reali sono entrambe negative e se le radici sono complesse le loro parti reali sono negative.

La seconda disuguaglianza non è sempre soddisfatta. Invero dalle (25) si trae

$$\mu=\frac{\rho_1^5+2\rho_1^4+\rho_1^3-\rho_1^2-2\rho_1-1}{\rho_1^5+3\rho_1^4+3\rho_1^3}\,,$$

epperò dovrà essere

$$(29) \qquad -4\rho_1^5-12\rho_1^4-12\rho_1^3+6\rho_1^2+15\rho_1+14>0\,.$$

Il primo membro di (29) è un polinomio che ha una sola radice positiva $\bar{\rho}_1$ e solo se $\rho_1 < \bar{\rho}_1$ conserva il segno positivo.

Per ρ_1 si trova la limitazione

$$1{,}07871911 < \bar{\rho}_1 < 1{,}07876169\,;$$

si deduce che dev'essere

$$(30) \qquad \mu < \frac{\bar{\rho}_1^5 + 2\bar{\rho}_1^4 + \bar{\rho}_1^3 - \bar{\rho}_1^2 - 2\bar{\rho}_1 - 1}{\bar{\rho}_1^5 + 3\bar{\rho}_1^4 + 3\bar{\rho}_1^3} = 0{,}11873849\ldots$$

Se la (30) è verificata e dette $-\beta^2$, $-\gamma^2$ le due radici della (17') in λ^2, le soluzioni generali del problema piano (cioè del sistema (26')) sono

$$(31) \qquad \begin{cases} \xi = A_1 \cos \beta t + A_2 \operatorname{sen} \beta t + A_3 \cos \gamma t + A_4 \operatorname{sen} \gamma t \\ \eta = B_1 \cos \beta t + B_2 \operatorname{sen} \beta t + B_3 \cos \gamma t + B_4 \operatorname{sen} \gamma t\,, \end{cases}$$

ove, assumendo A_1, A_2, A_3, A_4 come costanti arbitrarie, e posto, per brevità,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = \mathsf{H}\,,$$

le costanti B_1, B_2, B_3, B_4 sono date da

$$2\sqrt{1-\mu}\,\beta B_1 - (\beta^2 + \mathsf{H}) A_2 = 0, \qquad 2\sqrt{1-\mu}\,\beta B_2 + (\beta^2 + \mathsf{H}) A_1 = 0,$$
$$2\sqrt{1-\mu}\,\gamma B_3 - (\gamma^2 + \mathsf{H}) A_4 = 0, \qquad 2\sqrt{1-\mu}\,\gamma B_4 + (\gamma^2 + \mathsf{H}) A_3 = 0;$$

di guisa che le (31) possono scriversi

$$(31') \qquad \begin{cases} \xi = A_1 \cos \beta t + A_2 \operatorname{sen} \beta t + A_3 \cos \gamma t + A_4 \operatorname{sen} \gamma t \\ \eta = \dfrac{\beta^2 + \mathsf{H}}{2\sqrt{1-\mu}\,.\,\beta} (A_2 \cos \beta t - A_1 \operatorname{sen} \beta t) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\gamma^2 + \mathsf{H}}{2\sqrt{1-\mu}\,\gamma} (A_4 \cos \gamma t - A_3 \operatorname{sen} \gamma t). \end{cases}$$

Per esprimere poi le costanti d'integrazione mediante le

coordinate ξ_0, η_0 di P al tempo $t=0$ e le componenti ξ_0', η_0' della velocità iniziale, valgono le formole

$$\begin{aligned}
(\gamma^2-\beta^2)A_1 &= \xi_0(\gamma^2+H)+2\sqrt{1-\mu}\,\eta_0' \\
H(\beta^2-\gamma^2)A_2 &= \beta[\xi_0'(\gamma^2+H)-2\sqrt{1-\mu}\,\gamma^2\eta_0] \\
(\beta^2-\gamma^2)A_3 &= \xi_0(\beta^2+H)+2\sqrt{1-\mu}\,\eta_0' \\
H(\gamma^2-\beta^2)A_4 &= \gamma[\xi_0'(\beta^2+H)-2\sqrt{1-\mu}\,\beta^2\eta_0].
\end{aligned}$$

È facile vedere che

se e solo se il rapporto $\beta:\gamma$ *è razionale le* (31′) *sono soluzioni periodiche del problema piano; in questo caso la traiettoria è una curva algebrica.*

Infatti se $\beta:\gamma=p:q$ con p e q interi, posto $\beta=p\omega$, $\gamma=q\omega$, $\cos\omega t=\sigma$ i secondi membri delle (31′) divengono razionali interi negli argomenti σ, $\sqrt{1-\sigma^2}$ epperò l'eliminazione di σ fra le (31′) porta ad un'equazione razionale in ξ, η.

Le equazioni

$$\begin{aligned}
\xi &= A_1\cos\beta t + A_2\,\mathrm{sen}\,\beta t \\
\eta &= \frac{\beta^2+H}{2\sqrt{1-\mu}\,\beta}(A_2\cos\beta t - A_1\,\mathrm{sen}\,\beta t)
\end{aligned} \tag{32}$$

rappresentano una ellisse E_1 di centro L_3 e di assi paralleli ai coordinati; le equazioni

$$\begin{aligned}
\xi &= A_3\cos\gamma t + A_4\,\mathrm{sen}\,\gamma t \\
\eta &= \frac{\gamma^2+H}{2\sqrt{1-\mu}\,\gamma}(A_4\cos\gamma t - A_3\,\mathrm{sen}\,\gamma t)
\end{aligned} \tag{33}$$

rappresentano un'ellisse E_2 concentrica e coassiale ad E_1. Si considerino tutte le ellissi uguali ad E_2, cogli assi paralleli a quelli di E_2 e col centro nei punti di E_1; esse coprono nel loro insieme un'area che indichiamo con $\mathfrak{a}$. Orbene sussiste la proposizione:

nel caso piano, se il rapporto $\beta:\gamma$ *è irrazionale, la traiettoria di* P *ha i suoi punti uniformemente densi in* $\mathfrak{a}$ (*).

(*) Per la dimostrazione, assai semplice, vedi la citata mia Nota, § 4.

Come moti particolari sono possibili i due moti periodici definiti dalle (32) o dalle (33): la equazione cartesiana della traiettoria ellittica è

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

ove

$$a^2 = \frac{\xi_0^2 (\delta^2 + H)^2 + 4(1-\mu)\,\delta^2 \eta_0^2}{(\delta^2 + H)^2}, \qquad b^2 = \frac{\xi_0^2 (\delta^2 + H)^2 + 4(1-\mu)\,\delta^2 \eta_0^2}{4\,\delta^2 (1-\mu)},$$

ed è $\delta = \beta$ per l'ellisse (32) e $\delta = \gamma$ per la (33).

Tenendo conto della (17') è facile vedere che

$$\left(\delta^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\right)\left(\delta^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}\right) = 4\delta^2 (1-\mu).$$

ed essendo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} > \frac{\partial^2 w}{\partial b^2}$$

risulta

$$(\delta^2 + H)^2 > 4\delta^2 (1-\mu);$$

epperò gli assi focali delle due ellissi sono perpendicolari alla retta $P_1 P_2$. Ed essendo $\delta < \sqrt{1-\mu}$, risulta ancora che la durata delle rivoluzioni di P intorno ad L_3 sono maggiori della durata delle rivoluzioni di P_1 e P_2 intorno ad O (*).

Quando sempre si supponga verificata la (30), le soluzioni generali o particolari del problema nel caso spaziale (cioè le soluzioni del sistema (26)) si ottengono accoppiando le soluzioni generali o particolari del caso piano con la

$$(34) \qquad \zeta = \zeta_0 \cos \omega t + \frac{\zeta_0'}{\omega} \operatorname{sen} \omega t\,,$$

soluzione della terza equazione delle (26), avendo posto

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\,.$$

Sussistono le proposizioni

a) *se i rapporti* $\beta : \omega$ *e* $\gamma : \omega$ *sono razionali, le* (31') *e* (34) *soluzioni generali del sistema* (26) *sono periodiche: la traiettoria di* P, *chiusa, è una curva algebrica. Soluzioni particolari periodiche sono le* (32) *e* (34) *oppure le* (33) *e* (34);

(*) Nei moti ellittici in vicinanza di L_1 e L_2 avviene, come abbiamo visto, il contrario.

b) *se il rapporto* $\beta : \gamma$ *è razionale, mentre è irrazionale il rapporto* $\beta : \omega$, *la traiettoria di* P *definita dalle* (31′) *e* (34) *ha i suoi punti uniformemente densi nella porzione di superficie cilindrica a generatrici parallela a* ζ *avente per direttrice nel piano* $\xi\eta$ *la curva algebrica di cui le equazioni parametriche sono le* (31′), *porzione limitata dai due piani*

$$(35) \qquad \zeta = \pm \frac{\sqrt{\zeta_0^2 \omega^2 + \zeta_0'^2}}{\omega} \; (*).$$

In particolare:

c) *se il rapporto* $\beta : \omega$ *è irrazionale, la traiettoria di* P *definita dalle* (32) *e* (34) *ha i suoi punti uniformemente densi nella porzione di cilindro ellittico di direttrice l'ellisse* (32) *e generatrici parallele a* ζ, *compresa fra i due piani* (35).

La curva storta che ha per equazioni parametriche le (32) e (34) se il rapporto $\beta : \omega$ è razionale è una curva chiusa Ω che si proietta nell'ellisse E_1 dianzi considerata; l'insieme delle ellissi uguali ad E_2 con gli assi paralleli a quelli di E_2 e coi centri nei punti di Ω costituiscono una superficie Σ. Orbene vale la proposizione:

d) *se il rapporto* $\beta : \omega$ *è razionale e* $\beta : \gamma$ *è irrazionale, la traiettoria di* P *definita dalle* (31′) *e* (34) *ha i suoi punti uniformemente densi sulla superficie* Σ (**).

E sussiste ancora la proposizione:

e) *Se i rapporti* $\beta : \omega$, $\gamma : \omega$ *sono entrambi irrazionali la traiettoria di* P *ha i suoi punti uniformemente densi nella porzione di spazio limitata dai due piani* (35) *e dalla superficie cilindrica a generatrici parallele a* ζ *che ha per direttrice il contorno di* $\mathfrak{A}$ (***).

Finora si era supposta verificata la (30); supponiamo ora verificata la disuguaglianza opposta: in tal caso le due radici in λ^2 dell'equazione (17′) sono complesse coniugate a parte reale negativa. Estraendo le radici quadrate dai due valori di λ^2, due valori saranno complessi coniugati a parte reale negativa e due pure complessi coniugati a parte reale positiva. Indi-

---

(*) Per la dimostrazione vedi la citata mia Nota, § 4.

(**) Come sopra, § 5.

(***) Per la dimostrazione vedi: Sibirani, *Addizione alla Nota: Intorno ad alcune soluzioni del problema ristretto dei tre corpi*, in “ Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere „, 1916.

cando con $-\alpha^2 + i\beta$, $-\alpha^2 - i\beta$, $\alpha^2 + i\beta$, $-\alpha^2 - i\beta$ le quattro radici in λ della (17'), le soluzioni generali del caso piano, cioè del sistema (26'), sono

$$\xi = (A_1 \cos\beta t + A_2 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{-\alpha^2 t} + (A_3 \cos\beta t + A_4 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{\alpha^2 t}$$
$$\eta = (B_1 \cos\beta t + B_2 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{-\alpha^2 t} + (B_3 \cos\beta t + B_4 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{\alpha^2 t}$$

ove fra le otto costanti A_1, A_2, ... B_4 passano quattro relazioni che si determinano immediatamente.

I termini in $e^{\alpha^2 t}$ non restano finiti al tendere di t a $+\infty$, onde dovranno mancare nelle soluzioni che mantengono P nelle vicinanze di L_3; restano a considerarsi le soluzioni particolari

$$\text{(36)} \qquad \begin{aligned} \xi &= (A_1 \cos\beta t + A_2 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{-\alpha^2 t} \\ \eta &= (B_1 \cos\beta t + B_2 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{-\alpha^2 t} \end{aligned}$$

ove fra le quattro costanti A_1, A_2, B_1, B_2 passano le relazioni

$$(\alpha^4 - \beta^2 - \mathrm{H})\, A_1 - 2\alpha^2\beta A_2 = 2\sqrt{1-\mu}\,(\alpha^2 B_1 + \beta B_2)$$
$$(\alpha^4 - \beta^2 - \mathrm{H})\, A_2 + 2\alpha^2\beta A_1 = -2\sqrt{1-\mu}\,(\alpha^2 B_2 + \beta B_1).$$

La traiettoria di P è la curva a spirale

$$(B_2\xi - A_2\eta)^2 + (A_1\eta - B_1\xi)^2 = (A_1 B_2 - B_1 A_2)^2\, e^{-\frac{2\alpha^2}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{A_1\eta - B_1\xi}{B_2\xi - A_2\eta}},$$

la quale tende assintoticamente al centro di librazione L_3.

Nel caso spaziale sono soluzioni che mantengono P in vicinanza di L_3 le (36) accoppiate alla (34). La traiettoria compresa fra i due piani (35), a cui è infinite volte tangente, tende al segmento rettilineo dell'asse ζ compreso fra i detti piani e di conseguenza:

il moto di P *al tendere di* t *a* $+\infty$ *tende al moto armonico sull'asse* ζ *definito da* (34).

9. Moti in vicinanza di L_4 e L_5. — In L_4 e L_5 è

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = 1 - \mu + \frac{3z^2}{\rho_1^5}\left(\mu^{-\frac{2}{3}} - 1\right), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} = 1 - \mu,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial a\, \partial b} = \frac{\partial^2 w}{\partial b\, \partial c} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial c^2} = -\frac{3z^2}{\rho_1^5}\left(\mu^{-\frac{2}{3}} - 1\right),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial a\, \partial c} = \frac{3z}{(1-\mu)\,\rho_1^5}\left[\frac{1}{\rho_1^3}\left(1 - \mu^{-\frac{2}{3}}\right) + \mu^{-\frac{2}{3}} - \mu\right],$$

ove ρ_1 soddisfa all'equazione

$$\rho_1^5 (1-\mu)(1-\mu^{\frac{2}{3}}) + \rho_1^3 (1+\mu) - 2 = 0$$

e

$$z^2 = \rho_1^2 - \frac{(1-\mu\,\rho_1^3)^2}{(1-\mu)^2\,\rho_1^6}\,.$$

Il sistema (7′) diviene allora

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\eta}{dt} = \left[1-\mu+\dfrac{3z^2}{\rho_1^5}(\mu^{-\frac{2}{3}}-1)\right]\xi + \\ \qquad + \dfrac{3z}{(1-\mu)\,\rho_1^5}\left[\dfrac{1}{\rho_1^3}(1-\mu^{-\frac{2}{3}}) + \mu^{-\frac{2}{3}} - \mu\right]\eta \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\sqrt{1-\mu}\,\dfrac{d\xi}{dt} = (1-\mu)\,\eta \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \dfrac{3z}{(1-\mu)\,\rho_1^5}\left[\dfrac{1}{\rho_1^3}(1-\mu^{-\frac{2}{3}}) + \mu^{-\frac{2}{3}} - \mu\right]\xi + \\ \qquad + 3z^2(1-\mu^{-\frac{2}{3}})\,\eta\,. \end{cases}$$

Se si pone $\xi = Ae^{\lambda t}$, $\eta = Be^{\lambda t}$, $\zeta = Ce^{\lambda t}$ con A, B, C, λ costanti da determinare, si sostituisce in (37) e si eliminano A, B, C, si trova l'equazione

$$(38)\qquad \lambda^6 + 2(1-\mu)\,\lambda^4 + Q\lambda^2 + R = 0\,,$$

ove è

$$Q = (1-\mu)^2 - \frac{9z^4}{\rho_1^{10}}\,\frac{(1-\mu^{\frac{2}{3}})^2}{\mu^{\frac{4}{3}}} + 9(1-\mu)\,\frac{z^2}{\rho_1^5}(\mu^{-\frac{2}{3}}-1) - $$
$$- \frac{9z^2}{\mu^{\frac{4}{3}}(1-\mu)\,\rho_1^{10}}\left[\frac{1}{\rho_1^3}(\mu^{\frac{2}{3}}-1) + 1 - \mu^{\frac{5}{3}}\right]^2$$

$$R = \frac{9z^2}{\rho_1^{10}(1-\mu)}\left\{\frac{1-\mu^{-\frac{2}{3}}}{\rho_1^3} - \mu + \mu^{-\frac{2}{3}}\right\}^2 + $$
$$+ \frac{3z^2}{\rho_1^5}(\mu^{-\frac{2}{3}}-1)(1-\mu)\left\{1-\mu+\frac{3z^2}{\rho_1^5}(\mu^{-\frac{2}{3}}-1)\right\}.$$

Poichè $R > 0$, il prodotto delle radici in λ^2 della (38) è negativa, quindi *una* almeno delle tre radici è negativa. Indicandola con $-\alpha^2$, sono soluzioni (particolari) del sistema (37)

$$(39)\qquad \xi = A_1\cos\alpha t + A_2\,\mathrm{sen}\,\alpha t\,,\qquad \eta = B_1\cos\alpha t + B_2\,\mathrm{sen}\,\alpha t\,,$$
$$\zeta = C_1\cos\alpha t + C_2\,\mathrm{sen}\,\alpha t\,,$$

ove fra le costanti $A_1, A_2, \ldots C_2$ passano quattro relazioni che subito si determinano. Le soluzioni (39) sono manifestamente periodiche; la traiettoria è un'ellisse nel piano

$$(B_1 C_2 - B_2 C_1)\,\xi + (C_1 A_2 - C_2 A_1)\,\eta + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\,\zeta = 0.$$

L'equazione (38) ha, almeno per speciali valori di μ (*), radici complesse coniugate in λ^2; chiamando $-\beta^2+\gamma i$, $-\beta^2-\gamma i$ i due valori di λ complessi coniugati a parte reale negativa, sono possibili i moti definiti da

$$\begin{aligned}
\xi &= e^{-\beta^2 t}[H_1 \cos\gamma t + K_1 \operatorname{sen}\gamma t]\\
\eta &= e^{-\beta^2 t}[H_2 \cos\gamma t + K_2 \operatorname{sen}\gamma t]\\
\zeta &= e^{-\beta^2 t}[H_3 \cos\gamma t + K_3 \operatorname{sen}\gamma t],
\end{aligned}$$

ove delle sei costanti $H_1, K_1, \ldots K_3$ due sole sono indipendenti. La traiettoria di P è piana, è fatta a spirale e tende assintoticamente a L_4 o L_5.

E sono ancora possibili i moti definiti da

$$\begin{aligned}
\xi &= A_1 \cos\alpha t + A_2 \operatorname{sen}\alpha t + e^{-\beta^2 t}[A_3 \cos\gamma t + A_4 \operatorname{sen}\gamma t]\\
\eta &= B_1 \cos\alpha t + B_2 \operatorname{sen}\alpha t + e^{-\beta^2 t}[B_3 \cos\gamma t + B_4 \operatorname{sen}\gamma t]\\
\zeta &= C_1 \cos\alpha t + C_2 \operatorname{sen}\alpha t + e^{-\beta^2 t}[C_3 \cos\gamma t + C_4 \operatorname{sen}\gamma t],
\end{aligned}$$

essendo

$$i\alpha, \qquad -i\alpha, \qquad -\beta^2+\gamma i, \qquad -\beta^2-\gamma i$$

quattro radici in λ dell'equazione (38); delle dodici costanti quattro sole sono indipendenti. Al tendere di t a $+\infty$ il moto tende al moto ellittico

$$\xi = A_1 \cos\alpha t + A_2 \operatorname{sen}\alpha t, \qquad \eta = B_1 \cos\alpha t + B_2 \operatorname{sen}\alpha t,$$
$$\zeta = C_1 \cos\alpha t + C_2 \operatorname{sen}\alpha t.$$

(*) L'ho constatato, ad es., per $\mu = \frac{1}{64}$, $\mu = \frac{1}{242}$.

Studio sull'uniformità di movimento dei motori a combustione a 6 e 8 cilindri.

Nota dell'Ing. Dr. ENRICO PISTOLESI.

(Con 1 Tavola).

Il metodo che di solito trovasi esposto nei trattati di Meccanica per la ricerca del grado di irregolarità di una motrice suppone costante la velocità della motrice nella determinazione dei lavori delle forze d'inerzia, ed in ciò è affetto da un vizio fondamentale, ritenendosi costante la velocità prima di sapere se le condizioni del problema consentono di farlo con sufficiente approssimazione.

Un metodo esatto è invece quello dovuto ad F. Wittenbauer (*), riportato con qualche semplificazione e con alcune pratiche applicazioni dal Tolle nel suo libro *Die Regelung der Kraftmaschinen*. Le applicazioni che si trovano nella citata opera del Tolle si limitano a motrici ad un sol cilindro e a pompe a semplice o doppio effetto. Il presente studio è diretto a mostrare quali particolarità presenti l'applicazione del metodo ai motori a più cilindri e ad eseguire di fatto tale applicazione in un caso particolarmente interessante, qual'è quello dei motori Diesel per la marina; interessante perchè la limitazione imposta nello spazio e nel peso fa desiderare l'abolizione, o almeno, la riduzione al minimo del volano, organo destinato, come ognun sa, ad aumentare la regolarità del movimento.

È necessario pertanto che esponiamo in breve il metodo del Wittenbauer, prima di passare alle applicazioni che formano l'oggetto proprio di questa Nota.

(*) F. Wittenbauer, *Graphische Dynamik der Getriebe*, “ Zeitschrift für Mathematik und Physik „, Bd. 50, 1904.

***

Il teorema delle forze vive, applicato ad un meccanismo in movimento, ci dice che il lavoro compiuto in un determinato tempo dalle forze applicate ai varî organi del meccanismo uguaglia l'incremento subìto dalla forza viva del meccanismo nello stesso periodo di tempo. Se perciò indichiamo con f la forza applicata generica e con α l'angolo che la sua direzione fa colla velocità del suo punto d'applicazione, con s lo spazio percorso da questo punto d'applicazione nell'intervallo di tempo considerato, con E_0 ed E_1 la forza viva complessiva di tutti gli organi del meccanismo, rispettivamente agli istanti iniziale e finale del moto, potremo scrivere la nota formula:

$$[1] \qquad \Sigma \int_{s_0}^{s} f \cos \alpha \, ds = E - E_0$$

essendo la sommatoria estesa a tutte le forze applicate.

Se il meccanismo preso in esame ha una sola libertà di movimento, la sua configurazione sarà funzione dello spazio $\mathbf{s}$ percorso, a partire da una posizione iniziale, da un punto del sistema (convenientemente scelto) che chiameremo *punto di riduzione.*

Si sostituisca ora ad ogni forza f una forza $\mathbf{f}$ applicata al punto di riduzione e avente in ogni istante la direzione del moto di quel punto, colla condizione che il lavoro compiuto dalla nuova forza $\mathbf{f}$ sia costantemente uguale a quello compiuto dall'effettiva forza f. La forza $\mathbf{f}$ si chiamerà *forza ridotta* e la sua intensità si ricaverà dall'eguaglianza

$$\mathbf{f}\, d\mathbf{s} = f\, ds$$

fra i lavori elementari. Dette $\mathbf{v}$ e v le velocità possedute in un determinato istante dal punto di riduzione e dal punto d'applicazione della forza f, otteniamo subito

$$[2] \qquad \mathbf{f} = f \frac{v}{\mathbf{v}} \, .$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\int_{s_0}^{s} (\Sigma f)\, \mathbf{ds} = E - E_0$$

e ponendo:

$$\mathbf{F} = \Sigma f$$

avremo infine:

[3] $$\int \mathbf{F}\, \mathbf{ds} = E - E_0 .$$

Per quanto riguarda poi la forza viva E, essa è data in ogni istante da:

$$\int \frac{1}{2}\, v^2\, dm$$

essendo l'integrale esteso a tutte le masse mobili del meccanismo.

Come per le forze, così per le masse, sostituiamo in ogni istante ad ogni massa elementare dm una *massa ridotta* $\mathbf{dm}$, da supporsi concentrata nel punto di riduzione e tale che sia:

$$1/2\, v^2\, dm = \frac{1}{2}\, \mathbf{v}^2\, \mathbf{dm}\, ,$$

ossia

[4] $$\mathbf{dm} = dm\, \frac{v^2}{\mathbf{v}^2}\, ,$$

talchè la forza viva complessiva delle masse ridotte uguagli quella delle masse effettive. Indicata con $\mathbf{M}$ la somma delle masse ridotte elementari, che chiameremo *massa ridotta* del meccanismo (variabile colla posizione del punto di riduzione). avremo infine, dalla (3):

[5] $$\int_{s_0}^{s} \mathbf{F}\, \mathbf{ds} = 1/2\, \mathbf{M}\, \mathbf{v}^2 - 1/2\, \mathbf{M}_0\, \mathbf{v}_0^2 .$$

Questa formula mostra come sia possibile, note per ogni posizione del punto di riduzione le forze applicate e nota altresì la velocità iniziale e quindi la forza viva iniziale, determinare la forza viva $^1/_2\, \mathbf{M}\mathbf{v}^2$ (e quindi la velocità del punto di riduzione) per ogni posizione del meccanismo.

Dalla velocità del punto di riduzione si deduce facilmente la velocità di ogni altro punto del sistema.

*
* *

La ricerca della velocità del punto di riduzione in ogni sua posizione richiede pertanto: 1° la determinazione delle forze ridotte e la costruzione dell' $\int Fds$; 2° la determinazione della massa ridotta per ogni posizione del meccanismo.

Nel caso del manovellismo di spinta (fig. 1) che è quello che ci interessa, il punto di riduzione che conviene scegliere è il bottone di manovella. Quanto alle forze ridotte, quella proveniente dalla forza motrice o resistente applicata allo stan-

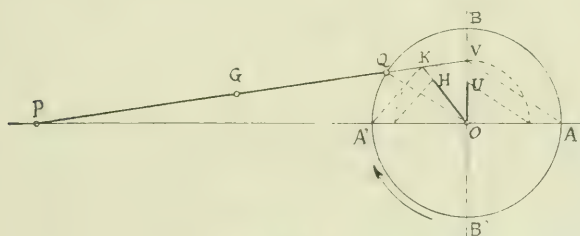



Fig. 1.

tuffo, e quindi al piede biella, si deduce dal valore di questa forza, moltiplicandola per il rapporto $\frac{OV}{OB}$, che è notoriamente uguale al rapporto fra la velocità del punto P e quella del punto Q. Vi è poi la forza ridotta che proviene dalla coppia resistente applicata all'albero motore, e si ottiene dividendo il valore di questa coppia per il raggio della manovella. Coi valori così trovati si può costruire un diagramma avente per ascisse gli spazi percorsi dal bottone di manovella (limitati ad un periodo della motrice) e per ordinate i corrispondenti valori della forza ridotta. Il diagramma integrale del diagramma così costruito ci darà l' $\int Fds$ per ogni posizione del manovellismo.

Talvolta è ignoto il valore della coppia resistente; ma se questa può supporsi costante, il diagramma integrale relativo alla forza ridotta che ne dipende è rettilineo, e può descriversi congiungendo con un segmento i punti estremi del diagramma

integrale relativo alle forze motrici, esteso ad un periodo completo della motrice. È chiaro infatti che il lavoro complessivo compiuto durante un periodo dalle forze applicate ad una motrice in condizione di regime è nullo.

La determinazione della massa ridotta delle parti mobili di un meccanismo si eseguisce facilmente quando si riesca a sostituire alla massa diffusa di ogni organo mobile del meccanismo reale un numero finito di punti pesanti, aventi in ogni condizione di moto la stessa forza viva dell'organo considerato. Quei punti li chiameremo *punti di concentrazione*. Se li indichiamo con $P_1\ P_2 \ldots$ e chiamiamo $m_1\ m_2 \ldots, v_1\ v_2 \ldots$ le loro rispettive masse e velocità, avremo

$$[6] \qquad M = \Sigma\, m_n \left(\frac{v_n}{v}\right)^2.$$

La ricerca dei punti di concentrazione è un problema indeterminato, ma diviene determinato quando si stabilisca, sulle orme del Wittenbauer, che siano in numero di 4, fissi in posizione rispetto al mobile cui si riferiscono; e precisamente tre arbitrarî ed uno situato nel centro di gravità. Se non si imponesse la invariabilità di posizione, il loro numero potrebbe essere ridotto a tre. I tre punti che possiamo scegliere arbitrariamente conviene collocarli nei tre punti di unione dell'elemento ai rimanenti del meccanismo; in tal modo il numero totale dei punti di concentrazione risulterà notevolmente diminuito. Nel caso, che più ci interessa, di un moto piano, si possono adoperare tre soli punti di concentrazione, purchè uno sia il baricentro e gli altri due siano allineati con esso. Basterebbero due punti, se non obbligati di posizione.

L'impiego di tre soli punti di concentrazione nel caso del moto piano torna specialmente utile quando l'organo che si considera è articolato a cerniera in due punti allineati col baricentro, com'è il caso di una biella, potendosi allora collocare i rimanenti due punti di concentrazione nei centri delle due cerniere.

Se i due punti di concentrazione diversi dal baricentro si chiamano A e B, e si indicano inoltre: con a e b le loro distanze dal baricentro, con m_a e m_b le masse che si debbono con-

centrare in essi, con m_0 la massa da concentrare nel baricentro, con I_0 il momento polare d'inerzia del corpo considerato rispetto ad un asse baricentrico normale al piano del movimento, con l la distanza $a + b$ dei punti A e B, si trova, con un facile calcolo, per il quale rimandiamo alle opere citate:

$$[7] \qquad m_a = \frac{I_0}{al}\,; \qquad m_b = \frac{I_0}{bl}\,; \qquad m_0 = m - (m_a + m_b) = m - \frac{I_0}{ab}\,.$$

Ciò premesso, la ricerca della massa ridotta nel caso del manovellismo e la costruzione del relativo diagramma non presentano difficoltà.

Basterà cumulare nel bottone di manovella: 1° la massa ridotta di tutti gli organi rotanti, che si otterrà dividendo il loro momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione per il quadrato del raggio di manovella; sia $\boldsymbol{m}_1$; 2° la parte m_1' della massa della biella che si è concentrata nel bottone di manovella. Nel piede di biella dovremo supporre concentrate: 1° la massa m_2 dello stantuffo e delle altre masse alterne; 2° la parte m_2' della massa della biella che si è concentrata nel piede di biella. Dalla somma $m_2 + m_2'$ si otterrà la massa ridotta $\boldsymbol{m}_2$ per ogni posizione del meccanismo, moltiplicando tale somma per il quadrato del rapporto esistente fra la velocità del piede di biella e la velocità $\boldsymbol{v}$ del perno di manovella, cioè (fig. 1) per $\left(\frac{OV}{OB}\right)^2 = \frac{OU}{OA}$. Questo prodotto può effettuarsi graficamente in uno dei vari modi che sono noti dal calcolo grafico. Finalmente nel baricentro G della biella è da ritenersi concentrata una massa m_0, alla quale corrisponderà una massa ridotta che si otterrà moltiplicando m_0 per il quadrato del rapporto fra la velocità del punto G e la velocità del punto Q, cioè per $\left(\frac{OK}{OA'}\right)^2 = \frac{OH}{OA}$, essendo K un punto tale che $\frac{QK}{KV} = \frac{GQ}{PG}$.

Si può semplificare la costruzione del diagramma delle masse usando un metodo approssimato, dovuto al Tolle (cfr. opera citata), il quale, con un semplice calcolo per il quale rimandiamo all'opera originale, ha mostrato che alla massa della biella si possono sostituire con sufficiente approssimazione, per quanto riguarda il calcolo delle masse ridotte, due sole masse;

l'una m_1'' concentrata nel bottone di manovella, l'altra, m_2'', concentrata nel piede di bella, espresse dalle formule seguenti:

$$[8] \qquad m_1'' = \frac{I_2}{l^2} \qquad m_2'' = m - m_1''$$

dove I_2 indica il momento d'inerzia della biella rispetto al piede P, l la lunghezza ed m la massa della biella. Con questa semplificazione si vengono in ultima analisi a considerare le masse seguenti:

nel bottone di manovella: $M_1 = \boldsymbol{m}_1 + m_1''$
nel piede di biella: $M_2 = m_2 + m_2''$.

Determinata, nel modo che abbiamo visto, la massa ridotta corrispondente ad M_2, basterà sommarla con M_1 per avere il valore $\boldsymbol{M}$ della massa ridotta per ogni posizione della manovella e tracciare quindi il relativo diagramma.

* * *

Dai due diagrammi, del lavoro e delle masse ridotte, se ne deduca un terzo, avente come ascisse le masse ridotte e come ordinate le corrispondenti forze vive. Poichè il diagramma del lavoro ci dà solo la *variazione* della forza viva, è necessario conoscere la forza viva in una posizione iniziale del sistema, che è quanto dire la velocità iniziale. Trattandosi di una motrice a regime, il diagramma forze vive-masse è una linea chiusa; sia, per esempio, quella rappresentata nella fig. 2. Congiuntone un punto qualunque coll'origine O, detto α l'angolo che la OP fa coll'asse delle masse, avremo:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \boldsymbol{M} \boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2.$$

Se perciò sechiamo la OP coll'ordinata condotta per il punto H di ascissa 2, avremo $HP' = \boldsymbol{v}^2$.

Ne dedurremo $\boldsymbol{v}$, velocità del punto di riduzione, con un'estrazione di radice, che si può, volendo, eseguire anche con ovvi metodi grafici.

Condotte da O le tangenti estreme OM, Om e detti M' ed m' le rispettive intersezioni coll'ordinata del punto H, avremo in HM' e Hm' i quadrati della massima e della minima velocità, v_M e v_m. Potremo così, se si tratta di un motore, cono-

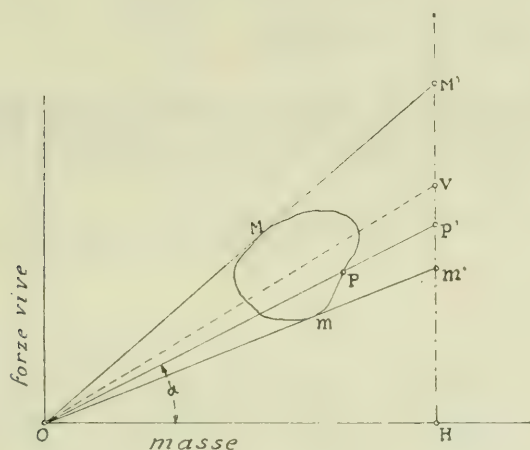



Fig. 2.

scere il *grado di irregolarità* i, secondo la formula comunemente ammessa:

$$i = \frac{v_M - v_m}{\frac{v_M + v_m}{2}} .$$

Si osservi che se prendiamo HV uguale al quadrato della velocità $\bar{v}$ essendo

$$\bar{v} = 1/2\,(v_M + v_m)$$

il rapporto $M'm'/HV$ è il doppio dell'irregolarità i. Questa osservazione può tornare utile per un giudizio pratico di prima approssimazione, essendo V di poco discosto, nei casi pratici, dal punto medio di $M'm'$.

Il diagramma forze vive-masse può servire, oltre che a calcolare il grado di irregolarità di una motrice, a trovare il momento d'inerzia del volano che è necessario applicare alla motrice, affinchè le competa un grado d'irregolarità i prefissato.

Costruito il diagramma (fig. 3) col supporre una forza viva iniziale qualunque (per es.: zero) e condotta l'ordinata di ascissa 2, si prenda su di essa:

$$HM' = \overline{v}^2 (1 + i/2)^2$$
$$Hm' = \overline{v}^2 (1 - i/2)^2.$$

Si congiungano M' ed m' coll'origine O' degli assi e si conducano quindi le tangenti alla curva parallele ad $O'M'$ e $O'm'$.

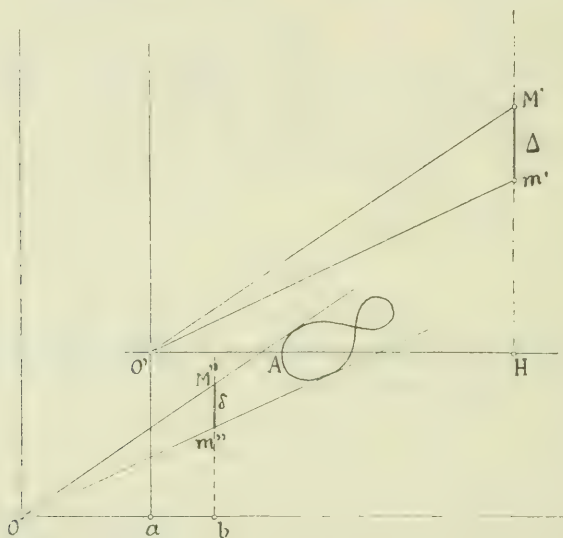



Fig. 3.

Detto O il punto di loro intersezione, sarà manifestamente Oa la massa ridotta del volano e sarà aO' la forza viva iniziale.

Contro questo metodo grafico del Wittenbauer si può peraltro obiettare che, in pratica, le due tangenti fanno un angolo molto piccolo e quindi la posizione del punto O risulta assai incerta. È preferibile per conseguenza *calcolare* l'ascissa del punto O rispetto ad O' (che è la massa ridotta del volano), la qual cosa non presenta difficoltà. Segate infatti le due tangenti con una ordinata qualunque di ascissa ab nota, detto δ il

segmento compreso fra i punti d'intersezione M'' ed m'' e posto $m'M' = \Delta$, si ha manifestamente:

$$Oa = Ob - ab,$$

dove:

$$Ob = \frac{2\delta}{\Delta} \qquad \text{od anche} \qquad Ob = \frac{\delta}{i\,\overline{v}^2}.$$

Dalla massa ridotta del volano se ne deduce il momento d'inerzia, moltiplicando il valore della massa ridotta per il quadrato del raggio di manovella.

Vediamo ora come i procedimenti accennati possano applicarsi alle motrici a più cilindri.

Il diagramma delle forze ridotte, nel caso di una motrice a più cilindri, si ottiene sovrapponendo e sommando i diagrammi relativi ai varî cilindri, *convenientemente spostati* l'uno rispetto all'altro, in guisa che sulla stessa ordinata stieno le forze ridotte relative ad una medesima posizione di quello dei bottoni di manovella che si è scelto come punto di riduzione. Analogamente per le masse ridotte.

Si osservi che il periodo di una motrice a più cilindri può essere una frazione di giro, ciò che non accade peraltro nei motori Diesel di cui intendiamo occuparci, a cagione del compressore.

A più cilindri fra loro in fase si può sostituire, per ciò che riguarda le masse ridotte, un unico cilindro; e lo stesso può farsi anche per il calcolo delle forze ridotte quando anche i rispettivi cicli termici siano concordanti. In ciò che segue supporremo eseguita una tale sostituzione, in guisa che dicendo *motore ad* n *manovelle* intenderemo che esse siano disposte a $(360/n)^\circ$ l'una rispetto all'altra.

Calcolo della massa ridotta nel caso di un numero rilevante di cilindri. — Quando il numero dei cilindri è rilevante (6 o più) si trova che la somma delle masse ridotte è sensibilmente *costante*. Di questo fatto diamo una dimostrazione,

che ci permetterà anche di determinare il *valore* costante di quella somma e di risparmiare, per conseguenza, la laboriosa costruzione dei diagrammi.

Sviluppiamo in serie di Fourier la quantità $(v_p/v)^2$ essendo v_p la velocità che compete al piede di biella quando si faccia costante e uguale a v quella del bottone di manovella. Eseguiremo lo sviluppo seguendo un metodo analogo a quello adoperato dal Macalpine (*) per lo sviluppo in serie della velocità e dell'accelerazione del piede di biella.

È noto che il rapporto v_p/v è dato da:

$$\frac{v_p}{v} = \operatorname{sen}\alpha + \frac{\lambda \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

essendo α l'angolo (fig. 1) di cui ha ruotato la manovella a partire dalla posizione OA, e λ il rapporto OQ/PQ fra il raggio della manovella e la lunghezza della biella.

Elevando a quadrato, otteniamo:

$$[9] \qquad \left(\frac{v_p}{v}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha}{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{2\lambda \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} .$$

Sviluppando in serie di Taylor la quantità $(1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha)^{-1}$ avremo:

$$(1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha)^{-1} = 1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \lambda^4 \operatorname{sen}^4\alpha + \lambda^6 \operatorname{sen}^6\alpha + \ldots$$

Moltiplicando per $\lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha$ e ponendo $1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ invece di $\cos^2\alpha$, avremo:

$$\lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha / (1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha) =$$
$$= \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha + (\lambda^4 - \lambda^2) \operatorname{sen}^4\alpha + (\lambda^6 - \lambda^4) \operatorname{sen}^6\alpha + \ldots$$

e infine:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha / (1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha) =$$
$$= (1 + \lambda^2) \operatorname{sen}^2\alpha + (\lambda^4 - \lambda^2) \operatorname{sen}^4\alpha + (\lambda^6 - \lambda^4) \operatorname{sen}^6\alpha + (\lambda^8 - \lambda^6) \operatorname{sen}^8\alpha + \ldots$$

(*) *Analysis of the inertia forces of the moving parts of an engine*, " Engineering ", vol. 64, 22-29 oct. 1897.

Ricordando le formule che permettono di esprimere le potenze di $\operatorname{sen}\alpha$ in funzione dei coseni degli archi multipli, e cioè:

$$
[10] \qquad
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\alpha &= 1/2 - 1/2 \cos 2\alpha \\
\operatorname{sen}^4\alpha &= 3/8 - 1/2 \cos 2\alpha + 1/8 \cos 4\alpha \\
\operatorname{sen}^6\alpha &= 5/16 - 15/32 \cos 2\alpha + 3/16 \cos 4\alpha - \\
&\qquad - 1/32 \cos 6\alpha \\
\operatorname{sen}^8\alpha &= 35/128 - 11/32 \cos 2\alpha - 7/32 \cos 4\alpha - \\
&\qquad - 1/16 \cos 6\alpha + 1/128 \cos 8\alpha \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

avremo:

$$
[11] \qquad
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2\alpha + \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha / (1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha) = \\
&\quad = (1/2 + 1/8\ \lambda^2 + 1/16\lambda^4 + 5/128\lambda^6 + \ldots) \\
&\quad - (1/2 + 1/32\lambda^4 + 1/8\ \lambda^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots) \cos 2\alpha \\
&\quad - (1/8 + 1/16\lambda^4 + 1/32\lambda^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots) \cos 4\alpha \\
&\quad + (1/32\lambda^4 + 1/32\lambda^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \cos 6\alpha + \ldots
\end{aligned}
$$

in ciascuna parentesi essendo racchiusa una serie numerica rapidamente convergente, della cui somma i termini scritti danno, per i pratici valori di λ, un valore di un'approssimazione più che sufficiente.

Sviluppiamo ora in serie di Taylor la quantità $(1-\lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}$. Avremo:

$$
(1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} \lambda^4 \operatorname{sen}^4\alpha + \\
+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \lambda^6 \operatorname{sen}^6\alpha + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \lambda^8 \operatorname{sen}^8\alpha + \ldots
$$

Moltiplicando dapprima per $2\lambda \operatorname{sen}^2\alpha$ e applicando nuovamente le [12]; moltiplicando poi per $\cos\alpha$ e tenendo conto dell'identità trigonometrica

$$
2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)
$$

avremo infine:

$$[12] \quad \begin{aligned} 2\lambda \,\text{sen}^2\alpha \cos\alpha / \sqrt{1-\lambda^2 \,\text{sen}^2\alpha} = \\ = (1/2\lambda + 1/8\ \lambda^3 + 15/256\lambda^5 + 65/1024\lambda^7 + \ldots)\cos\alpha \\ -(1/2\lambda + 3/16\lambda^3 + 27/256\lambda^5 + 5/128\ \lambda^7 + \ldots)\cos 3\alpha \\ +(1/16\lambda^3 + 15/256\lambda^5 + 25/512\ \lambda^7 + \ldots)\cos 5\alpha \\ -(3/256\lambda^5 + 35/2048\lambda^7 + \ldots)\cos 7\alpha + \ldots \end{aligned}$$

Dalla [11] e dalla [12] ricaviamo facilmente:

$$[13] \quad (v_p/v)^2 = a_0 + a_1 \cos\alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \cos 3\alpha + + a_4 \cos 4\alpha + a_5 \cos 5\alpha + \ldots$$

essendo $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ i coefficienti che moltiplicano, nella [13] e nella [14], le potenze di esponente 0, 1, 2, ... di $\cos\alpha$.

Supponiamo ora che la motrice abbia 6 cilindri e indichiamo con M_2 la massa applicata al piede di ogni biella. Le masse ridotte relative alle 6 bielle saranno espresse, in un medesimo istante, dalle 6 formule seguenti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_2' &= M_2(a_0 + a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha + \ldots) \\ \boldsymbol{M}_2'' &= M_2(a_0 + a_1\cos(\alpha + 2\pi/6) + a_2\cos 2(\alpha + 2\pi/6) + \ldots) \\ \boldsymbol{M}_2''' &= M_2(a_0 + a_1\cos(\alpha + 3\pi/6) + a_2\cos 2(\alpha + 3\pi/6) + \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{M}_2^{\text{VI}} &= M_2(a_0 + a_1\cos(\alpha + 5\pi/6) + a_2\cos 2(\alpha + 5\pi/6) + \ldots). \end{aligned}$$

Perciò la massa ridotta totale S_2, somma delle precedenti, sarà:

$$[14] \quad \boldsymbol{S}_2 = M_2(6a_0 + 6a_6\cos 6\alpha + 6a_{12}\cos 12\alpha + \ldots)$$

essendo nulle le somme delle quantità che sono moltiplicate dai coefficienti a_1, a_2 ecc., il cui indice non è multiplo di 6.

Il secondo termine della quantità entro parentesi, nella formula [14], risulta in pratica trascurabile, e a maggior ragione i termini successivi; sicchè alla [14] si potrà sostituire la seguente formula approssimata:

$$[15] \quad \boldsymbol{S}_2 = 6M_2a_0.$$

1° Es. $\lambda = 1/5$:

$$a_0 = 1/2 + 1/8\,\lambda^2 + 1/16\,\lambda^4 + 5/128\,\lambda^6 + \ldots = 0{,}505102\ldots$$
$$a_6 = 1/32\,\lambda^4 + 1/32\,\lambda^6 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}000052\ldots$$

e quindi:

[16] $$S_2 = (3{,}030615 + 0{,}000312 \cos 6\alpha \ldots)\, M_2$$

2° Es. $\lambda = 1/4$

$$a_0 = 0{,}50805667\ldots \qquad a_6 = 0{,}000129699\ldots$$

e quindi

$$S_2 = (3{,}04834 + 0{,}0007782 \cos 6\alpha \ldots)\, M_2.$$

Si veda come in ambedue i casi il coefficiente di $\cos 6\alpha$ sia trascurabile.

Se invece di 6 avessimo 8 cilindri, giungeremmo ad un risultato analogo e la somma S_2 potrebbe farsi uguale a $8\,M_2 a_0$; e cioè:

per $\lambda = 1/5$ $\qquad S_2 = 4{,}040816\, M_2$
per $\lambda = 1/4$ $\qquad S_2 = 4{,}064453\, M_2$

risultando trascurabili i coefficienti di $\cos 8z$, $\cos 16z$, ecc.

Caso di tre soli cilindri. — Per un numero minore di cilindri occorrerà, in generale, considerare più di un termine nella formula esprimente S_2.

Si abbiano, ad es., 3 cilindri. Avremo:

$$S_2 = M_2\,(3a_0 + 3a_3 \cos 3\alpha + 3a_6 \cos 6\alpha + \ldots).$$

I termini dopo il secondo sono certamente trascurabili, ma il secondo non lo è.

Valga qualche esempio:

$\lambda = 1/5 \qquad a_3 = -(\lambda/2 + 3/16\,\lambda^3 + 27/256\lambda^5 + 5/128\,\lambda^7 + \ldots) =$
$\qquad\qquad\qquad = -0{,}1015342\ldots$

$\lambda = 1/4 \qquad a_3 = -0{,}128037$

e quindi :

$\lambda = 1/5 \qquad S_2 = (1{,}515306 - 0{,}304603 \cos 3\alpha) M_2$

$\lambda = 1/5 \qquad S_2 = (1{,}52417 \quad - 0{,}384111 \cos 3\alpha) M_2 .$

In questo caso il diagramma della massa ridotta S_2 può costruirsi col semplice tracciamento di una sinussoide.

Massa ridotta media. — Le ricerche precedenti ci forniscono il modo di calcolare il valor medio della massa ridotta relativa al piede di biella, durante un giro. Tale valore sarà da adoperarsi quando si voglia sostituire al momento d'inerzia variabile degli organi mobili della motrice un momento d'inerzia costante medio.

Indicando con $(\boldsymbol{M}_2)$ la suddetta massa ridotta media, avremo:

$$(\boldsymbol{M}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{M}_2 \, d\alpha ,$$

ossia, poichè

$$\boldsymbol{M}_2 = M_2 (a_0 + a_1 \cos\alpha + a_2 \cos 2\alpha + \ldots)$$

sarà:

$$(\boldsymbol{M}_2) = a_0 M_2$$

essendo nulli gli integrali di tutti i termini della serie, eccetto il primo.

Es.: $\lambda = 1/5 \qquad (\boldsymbol{M}_2) = 0{,}505102 \, M_2$

$\lambda = 1/4 \qquad (\boldsymbol{M}_2) = 0{,}50805667 \, M_2$ (*).

(*) Se avessimo preso come valore di v_p/v quello che si suole adoperare comunemente:

$$v_p/v = \operatorname{sen}\alpha + \lambda \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

avremmo trovato:

$$(v_p/v)^2 = (1/2 + 1/8\,\lambda^2) + \lambda/2 \cos\alpha - 1/2 \cos 2\alpha + \lambda/2 \cos 3\alpha + \lambda^2/8 \cos 4\alpha$$

e ne avremmo potuto dedurre, come valore della massa ridotta media, l'espressione:

$$(1/2 + 1/8\,\lambda^2)\, M_2$$

che, per $\lambda = 1/5$, è uguale a $0{,}505\, M_2$ e per $\lambda = 1/4$ a $0{,}5078125\, M_2$. Si vede che la differenza fra questi ed i veri valori aumenta, com'è naturale, al crescere di λ.

***

Nell'applicare ai casi pratici le cose precedenti occorre tener presente che il metodo, rigoroso in sè, è tuttavia soggetto a errori dipendenti da varie cause, come l'inesattezza inerente a tutti i procedimenti grafici e le ipotesi semplificative che si è costretti ad introdurre per non rendere il metodo praticamente inapplicabile. Così, ad esempio, si deve, per evitare complicazioni insuperabili, supporre costante il momento resistente, il che non è vero, sia per la presenza di resistenze variabili connesse col funzionamento del motore (pompe, distribuzione, ecc.) sia eventualmente per la natura stessa del carico.

Quando poi le ricerche debbano effettuarsi sopra un progetto, anzichè sopra un motore già costruito, altra sorgente di errore è il calcolo dei momenti d'inerzia delle masse rotanti ed alterne, che può eseguirsi soltanto con larga approssimazione. Trattandosi invece di motori già costruiti, il calcolo del momento d'inerzia della biella può farsi coll'esperimento pendolare.

Nonostante le precedenti osservazioni, che ci vietano di riporre nel metodo del Wittenbauer una eccessiva fiducia, si può giustamente ritenere che questo metodo è capace di fornire con approssimazione praticamente sufficiente il grado di irregolarità di una motrice e un criterio per giudicare della necessità o meno del volano.

Esempio I.

Motore " Diesel „ a 6 cilindri. a 4 tempi, tipo marino, con 2 compressori a 2 fasi (M. A. N.).

Le sei manovelle motrici sono disposte a 120°, essendo concordanti le manovelle equidistanti dalla mezzeria dell'albero motore.

Le due manovelle dei compressori sono a 180° l'una rispetto all'altra.

Dati:		
Numero dei giri al minuto		450
Diametro del cilindro motore	mm.	400
Corsa dello stantuffo motore	„	400
Lunghezza della biella	„	800

Rapporto fra il raggio della manovella e la lunghezza della biella	$\lambda = 1/4$
Diametro del cilindro B.P. del compressore	mm. 270
„ „ „ A.P. „ „	„ 86
Corsa del compressore	„ 260
Lunghezza della biella del compressore .	„ 780
Rapporto fra il raggio della manovella e la lunghezza della biella del compressore	$\lambda' = 1/6$.

In base ai cicli dei cilindri motori e a quelli del compressore si costruiscono i diagrammi delle forze ridotte e quelli del lavoro (variazione della forza viva), prendendo come unità di lavoro il Kgm. e riferendoci al cm^2 di area dello stantuffo motore, la cui area è cm^2 1256. Per il compressore tali diagrammi sono stati costruiti nel caso di funzionamento a pieno e nel caso di funzionamento a carico ridotto.

Si procede quindi alla costruzione dei diagrammi delle masse ridotte riferite esse pure al cm^2 di area dello stantuffo motore.

Questa costruzione si fa in base alle quantità seguenti, calcolate prendendo come unità di massa la massa di $g = 9{,}81$ kg, cioè la massa a cui la forza di 1 kg imprime l'accelerazione di 1 m/sec^2.

Parte della massa di una biella motrice da ritenersi concentrata nel bottone di manovella .	13,37
Parte della massa di una biella motrice da ritenersi concentrata nel piede di biella . . .	8,03
Massa ridotta di una biella motrice	27,75
Parte della massa di una biella di compressore da ritenersi concentrata nel proprio bottone di manovella	5,71
C. s. nel piede di biella	3,57
Massa ridotta di una manovella del compressore	2,60
„ „ dell'albero motore	6,30
Massa dello stantuffo motore col suo perno .	29,80
„ „ „ di un compressore col suo perno	9,68.

Si costruiscono finalmente i diagrammi forze vive-masse, che si vedono riprodotti nella tavola.

In base ad essi si giunge ai risultati seguenti:

Per funzionamento a pieno dei compressori e senza volano:

velocità max. $v_M = 9{,}59$ m/sec. velocità min. $v_m = 9{,}27$ m/sec.
velocità media $\overline{v} = 1/2\,(9{,}59 + 9{,}27) = 9{,}43$ m/sec.
grado d'irregolarità $i = (v_M - v_m) : \overline{v} = 0{,}32/9{,}43 = \sim 1/29{,}5$.

Con la costruzione e il calcolo visti a suo luogo si determina la massa ridotta M' del volano da applicarsi al motore perchè il suo grado di irregolarità scenda ad 1/50. Nella fig. I della tavola i punti M' ed m' corrispondono alle velocità massima e minima che debbono ottenersi perchè sia $i = 1/50$ ed M'' e m'' i punti in cui le tangenti parallele alle rette OM ed Om' intersecano l'ordinata su cui si misurano i quadrati delle velocità.

Si trova

$$M' = 272{,}6\,,$$

massa che può realizzarsi con un volano la cui corona abbia una sezione di 180 cm² (ad es.: mm. 150 di larghezza e mm. 120 di spessore) ed un raggio medio di m. 0,50.

Se, lasciando inalterata la sezione, aumentassimo il raggio medio della corona portandolo a m. 0,55, troveremmo che il grado di irregolarità discende ad 1/58, sufficiente in pratica.

Per funzionamento ridotto dei compressori e senza volano:

$v_M = 9{,}59$ m/sec. $v_m = 9{,}26$ m/sec. $\overline{v} = 9{,}425$ m/sec. $i = \sim 1/28{,}6$.

Si trovano inoltre per il volano gli stessi risultati del caso precedente.

Senza volano, supposti non esistenti i compressori:

$v_M = 9{,}59$ m/sec. $v_m = 9{,}29$ m/sec. $\overline{v} = 9{,}42$ m/sec. $i = \sim 1/31$.

Se si tenesse conto dei compressori soltanto nel calcolo dei lavori o soltanto nel calcolo delle masse ridotte, troveremmo per i valori superiori al vero e poco approssimati; ciò toglie ogni interesse ai relativi diagrammi dal punto di vista di una semplificazione del procedimento.

Senza volano, supposta una massa ridotta costante media: $(M) = 0{,}306$

$$i = \sim 1\ 17.$$

In tal caso il diagramma forze vive-masse diviene un segmento rettilineo parallelo all'asse delle ordinate e per calcolare il grado di irregolarità non è necessario costruire il diagramma, bastando un semplice calcolo aritmetico, che omettiamo per la sua semplicità.

Si noti che il valore di i trovato in tal modo è molto lontano dal vero, il che toglie ogni pratica importanza a questo metodo, che si raccomanderebbe per la sua speditezza.

Esempio II.

Motore " Diesel „ per sottomarini, a 6 cilindri, a due tempi, con un compressore a 2 fasi (F. I. A. T. — S. Giorgio).

Le sei manovelle motrici sono disposte a 60° l'una dall'altra e si seguono nell'ordine indicato in fig. 4 (b). Questa disposizione,

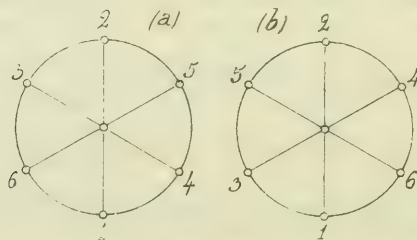



Fig. 4.

che si discosta dalla disposizione classica dei motori a 6 manovelle, in cui sono concordanti le manovelle equidistanti dal piano medio della motrice, ha lo scopo di ottenere una mag-

giore uniformità di movimento. Da questo punto di vista essa è molto razionale, come vedremo; è certo invece che ne scapita il bilanciamento della motrice, come può verificarsi prendendo in esame le forze rotanti. Le tre paia di manovelle 1-2, 3-4, 5-6 dànno luogo a tre coppie aventi i loro assi-momenti a 60° l'uno rispetto all'altro e che perciò si sommano in una coppia risultante doppia di quella dovuta ad un solo paio di manovelle.

Si osservi che adottando, invece della precedente disposizione, quella della fig. 4 (*a*) si ottiene ugualmente l'intento di aumentare la regolarità di movimento, e di più si ottiene il *perfetto equilibramento delle forze rotanti*, perchè gli assi-momenti delle coppie risultano a 120° l'uno rispetto all'altro. L'equilibramento delle forze rotanti trae seco, com'è noto, l'equilibramento delle forze d'inerzia di 1° ordine, e si vedrebbe facilmente che, colla disposizione della fig. 4, *anche quelle di 2° ordine sono bilanciate.*

Sembra adunque che questa seconda disposizione sia senz'altro preferibile alla prima, a giustificare la quale non possono avere sufficiente peso ragioni costruttive (*).

Il *lavaggio* è ottenuto mediante uno *stantuffo differenziale* per ogni cilindro motore.

Dati:	Numero dei giri al minuto		500
	Diametro del cilindro motore . . .	mm.	250
	Corsa dello stantuffo motore . . .	„	270
	Lunghezza della biella motrice . . .	„	675
	Rapporto fra il raggio della manovella e la lunghezza della biella . . .		$\lambda = 1/5$
	Diametro del cilindro B.P. del compress.	mm.	250
	„ „ „ A.P. „	„	75
	Corsa dello stantuffo del compressore	„	180
	Lunghezza della biella „	„	430
	Rapporto fra il raggio della manovella e la lunghezza della biella del compressore		$\lambda' = 9/43$
	Diametro dello stantuffo di lavaggio .	mm.	390.

(*) È quasi superfluo notare come la disposizione delle manovelle a 60° l'una rispetto all'altra non potrebbe essere adottata nei motori a 4 tempi.

Nella costruzione dei diagrammi in questo secondo esempio si sono seguìti gli stessi criterî che nel 1° esempio. Peraltro i diagrammi relativi al compressore sono stati tracciati per la sola condizione normale di funzionamento.

Per il calcolo delle masse ridotte valgono le seguenti quantità:

Parte della massa di una biella motrice da supporsi concentrata nel perno della manovella	3,150
C. s. nel piede di biella	1,340
Parte della massa della biella del compressore da supporsi concentrata nel *proprio* bottone di manovella	1,760
C. s. nel piede di biella	0,690
Massa ridotta di una manovella motrice . .	4,875
„ „ della manovella del compressore	3,270
„ „ dell'albero motore	3,150
Massa di uno stantuffo motore con perno . .	6,940
Massa dello stantuffo del compressore col perno	3,880.

Quanto alle pompe di lavaggio, esse non hanno alcuna apprezzabile influenza.

Costruito il diagramma forze vive-masse che si vede riprodotto nella tavola, si ottengono i seguenti risultati:

velocità max $v_M = 7{,}37$ m/sec. velocità min. $v_m = 6{,}78$ m/sec.
velocità media $\bar{v} = 1/2\,(v_M + v_m) = 7{,}075$ m/sec.
grado di irregolarità $i = (v_M - v_m) : \bar{v} = \mathbf{1/12}$.

Se alla massa ridotta variabile sostituiamo una massa *ridotta costante media* (**M**) che si trova essere uguale a 0,166 unità di massa, si ottiene:

$$i = \mathbf{1/11{,}3},$$

valore poco discosto da 1/12. Tale sensibile coincidenza, che non si aveva nell'esempio precedente, è conseguenza della minore variabilità delle masse ridotte. Essa ci autorizza a servirci

della massa media per trovare il valore di i quando la macchina sia provvista del suo volano, il quale ha le dimensioni seguenti:

Diametro esterno della corona	. . . .	mm.	1000
„ interno „ „	. . .	„	790
Larghezza „ „	. . .	„	140.

La sua massa ridotta è:

$$M' = 0{,}79\,.$$

e perciò la nuova massa ridotta media è:

$$(M)' = (M) + M' = 0{,}956.$$

In base ad essa si calcola il grado di irregolarità:

$$i = 1/65$$

che è appunto quello che compete ai motori di questo tipo.

Se, utilizzando la massa ridotta media, facciamo astrazione dal compressore, si ottiene per l'irregolarità il valore

$$i = \sim 1/41$$

assai discosto dal vero, il che prova *avere il compressore influenza preponderante sulla regolarità del movimento.*

Per vedere quale influenza possano avere sul valore di i la specie e il numero dei compressori, abbiamo fatto i casi seguenti (alcuni dei quali corrispondono ad effettive modificazioni introdotte in motori di costruzione più recente), istituendo opportuni calcoli per ciò che riguarda i cicli e le masse ridotte:

Motore con 2 compressori a 2 fasi (manovelle a 180° fra loro, concordanti con due manovelle motrici)

$v_M = 7{,}16$ m/sec. $\quad v_m = 6{,}96$ m/sec. $\quad i = \sim 1/35{,}3$

Motore con 2 compressori a 2 fasi (manovelle a 180° fra loro, disposte secondo la bisettrice dell'angolo formato da due manovelle motrici che siano fra di loro a 60°)

$v_m = 7,165$ m/sec. $v_m = 6,965$ m/sec. $i = \sim$ **1/35,33.**

Motore con 2 compressori a 3 fasi (manovelle a 180°, concordanti con due manovelle motrici)

$v_M = 7,16$ m/sec. $v_m = 6,95$ m/sec. $i = \sim$ **1/33,6.**

Resta da questi esempi confermata la precedente conclusione sull'influsso preponderante del compressore. In questi casi non sarebbe lecito sostituire alla massa ridotta variabile una media, perchè si otterrebbero per i valori assai maggiori del vero (1/24 ÷ 1/27).

È interessante, infine, sapere quale valore si otterrebbe per i se le 6 manovelle fossero disposte in 3 coppie a 120° l'una rispetto all'altra. Il valore enorme ($i = \sim 1/3$) che si troverebbe dimostra l'irrazionalità (in queste condizioni) di una tale disposizione.

Esempio III.

Motore " Diesel " a 8 cilindri, a due tempi, con due compressori a 2 fasi.

Ad eccezione del numero dei cilindri e della portata dei compressori (che, naturalmente, deve essere aumentata in proporzione dell'aumentato numero dei cilindri motori), tutti i dati e tutte le dimensioni sono quelle dell'esempio II, nell'ipotesi di due compressori.

Questo caso, trattato in modo alquanto sommario, tanto per avere indicazioni di massima, conduce ai risultati seguenti:

$v_M = 7,106$ m/sec. $v_m \doteq 7,036$ m/sec. $i = \sim$ **1/100.**

Se ne deduce che, quando si potesse fare sicuro assegna-

mento pel funzionamento simultaneo degli 8 cilindri, si potrebbe *fare a meno del volano*.

Anche in questo caso si verifica l'*influsso preponderante dei compressori*. Se questi non vi fossero, troveremmo $i = 1:300$.

CONCLUSIONE

Sebbene gli esempi trattati siano particolari, è chiaro che se ne possono dedurre conclusioni valevoli abbastanza in generale, e cioè per tutti i motori affini per genere e per costruzione, a quelli considerati e funzionanti, come quelli, a velocità piuttosto elevate (400 ÷ 500 giri al minuto). Ecco pertanto tali conclusioni:

Motori a 6 cilindri a 4 tempi, 2 compressori.

Non possono funzionare regolarmente senza volano, ma il volano può avere dimensioni non molto grandi.

Si può, in un calcolo largamente approssimato, non tener conto dei compressori; si ottiene generalmente una irregolarità minore della vera.

Non è lecito sostituire alla massa ridotta variabile una massa ridotta costante media.

Scarsa influenza sulla regolarità dell'andatura ha il regime dei compressori; peraltro il loro funzionare con carico nullo o troppo ridotto nuoce alla regolarità.

Motori a 6 cilindri a 2 tempi, con manovelle a 60°.

Il volano è necessario, sia con un compressore, sia con due; le sue dimensioni risultano peraltro relativamente piccole.

I compressori hanno influenza preponderante sulla regolarità di movimento: cosicchè uno studio razionale del loro numero e della loro disposizione è, da questo punto di vista, della massima importanza (*).

(*) Un compressore per ogni cilindro sarebbe senza dubbio l'ideale; buona è pure la disposizione a stella usata da alcuni costruttori per motori stazionarî.

Scarsa influenza hanno la specie dei compressori (se a 2 o a 3 fasi) e l'angolo di calettamento delle loro manovelle (supposte sempre a 180° fra di loro).

Le pompe di lavaggio (stantuffo differenziale) non hanno influenza apprezzabile.

In un calcolo approssimativo e quando vi sia un solo compressore si può far uso della massa ridotta media, ottenendosi per i un valore superiore al vero; non si può invece quando si abbiano due compressori.

Per motori a grande velocità, tipo leggero, è sconsigliabile nel modo più assoluto la disposizione delle manovelle due a due concordanti.

Motori a 8 cilindri a 2 tempi, 2 compressori.

Possono funzionare regolarmente senza volano, purchè si possa fare sicuro assegnamento pel funzionamento regolare e simultaneo degli otto cilindri.

I compressori hanno influsso preponderante sulla regolarità di movimento.

Con una disposizione razionale dei compressori è possibile ottenere una rilevante uniformità di movimento.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

II
III
14
22
6
13
21
5
20
4
3
11
19
6
5
4
3

DIAGRAMMI FORZE VIVE - MASSE

I, II, III

I. Motore a 6 cilindri a 4 tempi, compressori a pieno carico.

II. C. s. compressori a carico ridotto.

III. C. s. se non ci fossero i compressori.

IV. Motore a 6 cil. a 2 tempi, un compressore a 2 fasi.

V. C. s. 2 compress. a 2 fasi.

VI. C. s. 2 compress. a 2 fasi, con diverso calettamento delle manovelle dei comp.

VII. C. s. 2 compr. a 3 fasi.

VIII. Motore a 8 cilindri, a 2 tempi, 2 compressori a 2 fasi.

Kgm 15, 14, 13, 12, 11, Kgm 10, 9, 8

0,1 (unità di massa = 9,81 Kg) 0,2 0,25 0,3 0,35 0,4

Tip. Vincenzo Bona - Torino. (76055)

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Novembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Pizzi, D'Ercole, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci: Chironi Vicepresidente della Accademia, S. E. Boselli Direttore della Classe, Manno, Carle, S. E. Ruffini, Brondi, Schiaparelli e Prato.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 18 giugno u. s.

Il Presidente Camerano è dolente di dover aprire il nuovo anno accademico della Classe annunziando la morte dell'insigne Socio nazionale residente Carlo Cipolla, avvenuta a Tregnago il giorno 23 corr. alle ore 22,45 dopo lunghe sofferenze. Aggiungendo poche parole sugli alti meriti scientifici del compianto Socio, dà l'incarico della commemorazione al Socio Sforza con l'unanime consenso dei presenti. Il Socio Sforza accetta. Notifica inoltre il Presidente che, non appena si ebbe notizia della morte, furono telegrafate le condoglianze dell'Accademia alla Contessa Cipolla, e fu con telegramma incaricato il Sindaco di Tregnago di rappresentare l'Accademia ai funerali.

Il Socio Segretario Stampini dà lettura dei telegrammi e delle lettere pervenute alla Presidenza in risposta all'ordine del giorno redatto da lui, in forma di epigrafe latina, e approvato con acclamazione nella seduta del 18 giugno u. s. Sono i telegrammi di S. E. Boselli e di S. E. Ruffini. Le lettere sono del Tenente Generale Brusati, a nome di S. M. il Re; di S. A. R. Luigi di Savoia, e di S. E. Antonio Salandra. Poscia dà lettura dei telegrammi di S. M. il Re, del Duca degli Abruzzi, di S. E. Boselli, di S. E. Ruffini, di S. E. il Generale Cadorna, in risposta ai telegrammi spediti dal Presidente Camerano per unanime deliberazione presa dall'Accademia nella sua prima adunanza a classi riunite il giorno 19 corrente. Dà inoltre comunicazione del telegramma di condoglianza da lui inviato, a nome dell'Accademia, alla *Académie des Inscriptions et Belles-Lettres* per la morte del nostro Socio straniero Gastone Maspero, e della risposta telegrafica ricevuta dal Presidente Maurice Croiset di quell'insigne sodalizio.

Si legge il Decreto Luogotenenziale che approva la elezione del Socio S. E. Boselli a Direttore della Classe, e del Socio Stampini a Segretario, per il triennio dal 20 aprile 1916 al 19 aprile 1919.

Il Socio Segretario Stampini presenta quindi alla Classe le seguenti pubblicazioni pervenute in omaggio alla Accademia: dal Socio Sforza il volume intitolato *Il dittatore di Modena Biagio Nardi e il suo nepote Anacarsi* (Milano ecc., Albrighi Segati e C., 1916), e la monografia estratta dal " Nuovo Archivio Veneto „ dal titolo *Il generale Giovanni Durando e la campagna nel Veneto del 1848 (Nuovi documenti)*; dal Socio corrispondente Zuccante le monografie *I Cirenaici* (Pubblicazione dell' " Atene e Roma „, Milano) e *Antistene nei dialoghi di Platone* (Estratto dai " Rendiconti „ del Reale Istituto Lombardo); dal Prof. Pietro Rasi lo studio *L'Iscrizione metrica sepolcrale di Fulgenzio* (Estratto dagli " Atti „ del Reale Istituto Veneto); dal Conte Nicolò

Papadopoli Aldobrandini lo scritto *Il ducato d'oro di Deodato di Gozon* (Estr. dagli " Atti „ del Reale Istituto Veneto); dal Prof. Ireneo Sanesi il volume primo dell'opera *La Commedia* (Milano, Fr. Vallardi, 1911) che fu premiato dalla nostra Accademia; dalla R. Accademia Peloritana di Messina il volume *Il Vendidad reso italiano sul testo zendico di C. F. Geldner* da Francesco Adolfo Cannizzaro, corredato di una introduzione e di note dal nostro Socio Italo Pizzi; dalla Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti il volume di Corrado Ricci che ha per titolo *D. Calandra scultore,* con prefazione di Oreste Mattirolo (Editori Alfieri e Lacroix di Milano). — La Classe vivamente ringrazia i donatori per le pregevoli pubblicazioni.

Inoltre il Socio Stampini, dopo aver fatto omaggio alla Classe di un suo recente volume *Studi di letteratura e filologia latina con una appendice di iscrizioni ed altri scritti in lingua latina* (Torino, Fratelli Bocca), presenta pure in omaggio un esemplare di una sua nuovissima epigrafe latina. Quale autore della proposta, accolta a voti unanimi dal Consiglio Accademico della R. Università di Torino e approvata dal Governo, che fosse conferita la laurea *ad honorem* agli studenti morti per la Patria i quali avessero compiuto gli anni di studi prescritti per il conseguimento del diploma dottorale, egli aveva preparato, in forma di epigrafe latina, il diploma di laurea; ma, in seguito alla deliberazione ministeriale prescrivente un modulo unico per tutte le Università, lo trasformò, d'accordo col Rettore e col Consiglio Accademico, in un attestato d'onore che l'Università di Torino rilascerà alla memoria di tutti i suoi studenti morti per la Patria, così a quelli che saranno laureati, come a quelli che non poterono raggiungere gli anni prescritti per conseguire la laurea. L'epigrafe latina si chiude con due distici elegiaci in cui è sviluppato il pensiero Leopardiano " morendo Si sottrasse da morte il santo stuolo „. — La Classe ringrazia.

Il Socio Vidari presenta, per la pubblicazione negli *Atti*, una seconda *Nota* della Dottoressa Giuseppina Bientinesi, dal titolo *Vincenzo di Beauvais e Pietro Dubois considerati come pedagogisti*. Sarà pubblicata.

Il Socio Stampini, notando come questa sia la prima adunanza della Classe che si tiene dopo la chiamata del nostro Socio nazionale non residente Vittorio Scialoja a far parte del Ministero nazionale, propone — e la Classe unanime approva — che siano inviate all'illustre uomo le congratulazioni e gli augurî dei Colleghi.

In fine la Classe prega il Presidente di far pervenire ai Soci Manno e Schiaparelli i suoi fervidi voti per la loro guarigione. — L'adunanza è tolta.

La Classe, riunitasi in adunanza privata, udita la relazione composta dal Socio Vidari e sottoscritta da lui e dai Soci Einaudi e Patetta, componenti la Commissione nominata nell'adunanza del 18 giugno u. s. e incaricata di esaminare la pubblicazione, diffamatoria per il nostro Paese, del Socio corrispondente Roberto Davidsohn, sulla proposta del Socio Stampini delibera a voti unanimi che il predetto signor Roberto Davidsohn sia cancellato dal novero dei Soci corrispondenti della nostra Accademia.

LETTURE

VINCENZO DI BEAUVAIS e PIETRO DUBOIS considerati come pedagogisti.

Nota II della dt.[sa] GIUSEPPINA BIENTINESI.

Non dalla molteplicità delle materie d'insegnamento, ma da un sistema armonico, punto complesso e difficile, si può ricavare un vantaggio didattico non indifferente; a questo aveva pensato Dubois senza che i suoi tentativi avessero approdato ad effetti concreti e realizzabili, mentre Beauvais in poche linee era riuscito a tracciare un piano di studî in tutto e per tutto corrispondente all'alta condizione degli educandi.

Ed a chi fra' due scrittori spetta il vanto maggiore per la struttura del trattato pedagogico?

Se ben si consideri, arrise al frate la fortuna di comporre il trattato sotto gli auspicî della regina Margherita e d'altra parte il pubblicista volle sollecitare i favori del re a suo riguardo col *De recuperatione Terre Sancte*, dove in mezzo a ricordi della vecchia scolastica pulsa segnatamente il palpito di una vigorosa corrente di pensiero, non bene fusa, tratteggiata, colorita, se vogliamo, ma dove appare l'ardore, l'irrequietudine, l'animazione straordinaria dello scrittore a far palese la nuova dottrina. Al contrario nel *De eruditione filiorum regalium* risulta evidente l'assenza di ogni cura nella disposizione del materiale, il disordine fra la teoria e la pratica, tanto da riconoscere trattarsi di un lavoro di relativa importanza, di un saggio soltanto di un'opera ideata con intendimenti più vasti e con fini altrettanto elevati (1).

(1) " Opus quoddam universale de statu principis, ac de totius regalis " curiae sive familiae, nec non et de reipublicae administratione, ac totius

Il primato dell'originalità spetta quindi a Dubois che ammira i propugnatori dell'esperienza e del metodo induttivo, si ribella contro le regole fisse e matematiche della scolastica, contro le teorie basate su intricati sofismi e su minute disquisizioni, aspira anch'egli a nuove conquiste, ma riconosce l'incapacità propria; ci tiene a non passare da conservatore e perciò rimane abbagliato dal gran fascio di luce, che emana dalle innovazioni di Sigieri, di Bacone e di Lullo: sarà l'ortolano " che toglierà le ortiche, le spine ed i rovi prima di seminare „ (1), tuttavia nello studio attento, nella giustezza incomparabile dell'analisi circa la dottrina de' grandi filosofi farà vibrare indiscussa la sua potente genialità.

Trarrà partito dall'autorità di Sigieri di Brabante (2) per consigliarne le *Quaestiones naturales*, anzi, ridendosi degli stolti pregiudizî de' suoi tempi, ricorrerà, oltre che ad Alberto Magno, all'opera di Tomaso di Aquino (3). Dubois molto spesso sarebbe tacciato d'incoerenza, se l'esame delle sue opere non facesse risaltare la sua strana e fino ad un certo punto inesplicabile figura. Egli nutre per ambedue i filosofi venerazione profonda, dovuta particolarmente a ricordi della sua gioventù, e possiede inoltre la ferma certezza di non cadere in piena contraddizione, quando pensa di adottare una tolleranza più che scusabile, accomunando le contrapposte dottrine per l'incremento degli studi. E seguendo sempre le orme di Sigieri vorrà la ricerca accurata e, direi quasi, affannosa della verità mediante la dimostrazione e la persuasione fondate su basi incrollabili, e, interpretando a suo modo la dottrina di Bacone (4), prediligerà l'attività pratica, che per mezzo delle cognizioni apprese e delle prove subite conduce all'esperienza, tanto importante allo sviluppo ulteriore delle dottrine scientifiche.

" regni gubernatione, non solum ex divinis Scripturis, verum etiam ex doc-
" torum catholicorum sententiis; insuper etiam ex philosophicis et poeticis
" confectum „. Friedrich, p. 6 sgg.

(1) *De recuperatione*, § 80, p. 66.

(2) Zeck, *Der Publizist Pierre Dubois*, pp. 119-129; Mandonnet, *Siger de Brabant et l'Averroïsme latin au XIII^e^ siècle*, II^e^ partie. Louvain, Institut supérieur de philos. de l'Université.

(3) *De recuperatione*, § 72, p. 61.

(4) Zeck, op. cit., pp. 129-142.

È Bacone che spinge il legista ad annettere seria importanza allo studio delle lingue orientali, ad impartire tanto a giovani che a giovinette la stessa istruzione: è vero però che Dubois modifica non poco le idee del *doctor mirabilis*, perchè vuole far comprendere il vantaggio immenso ritratto dalle missioni e dalla Chiesa, una volta che tale mezzo corrispondesse efficacemente ne' suoi risultati.

Ma chi ha indotto il pubblicista a tratteggiare nel *De recuperatione Terre Sancte* una riforma completa dell'istruzione femminile equiparandola o per lo meno rendendola simile a quella maschile, chi è riuscito ad inspirargli una grande fede nella potente influenza del sapere sugl'infedeli per mezzo di donne, la cui missione avrebbe coadiuvato saggiamente l'opera d'incivilimento morale ed intellettuale, propugnata dagli altri adepti della " provisione „?

Raimondo Lullo senza dubbio (1), di cui il legista, pur non approvando la teoria avversa alla dottrina di Averroè (2), adotta senz'altro la pratica e non si avvede che la smania preponderante di accogliere, di disporre e di sistemare i progetti più inattuabili, le idee più fantastiche, lo fa cadere in un ridicolo ottimismo, vantando, come fa, l'infallibilità delle sue riforme, l'eccellenza del suo metodo (3). Più pratico però del filosofo catalano, Dubois vuole appoggiare su salde basi la propaganda del Cristianesimo, stabilendo una sapiente organizzazione di stretti legami fra coloro che dovranno agire e l'onnipotente protezione del papa, cui va unito, e non in secondo ordine, il valido appoggio del re di Francia.

Quindi nelle idee del pubblicista si riscontrano ombre e luci variamente disposte, che rendono il quadro non monotono ma interessante nell'infinita diversità di colori e di sfumature più o meno perfette, che rivelano la mano esperta se non di un eccellente artista, almeno di uno che cerca di rielaborare, di confutare ed anche di combattere l'opera di più grandi maestri.

(1) Zeck, op. cit., pp. 129-142.
(2) Renan E., *Averroès et l'Averroïsme*, Paris, Durand, 1852, pp. 203 sgg.
(3) *De recuperatione*, § 80, p. 66.

Non così Beauvais, che ricorre spesso non a geniali rifacimenti, ma ad imitazioni servili, sicchè la materia non acquista un'impronta caratteristica, personale, mostrando sotto le modificazioni e talvolta sotto le alterazioni delle stesse teorie, non l'arguta dottrina dell'enciclopedico, bensì l'incauta inesperienza del copista. Come si può adunque spiegare il fatto che esistono sorprendenti somiglianze fra la disciplina de' novizî di Ugo di San Vittore (1) e quella destinata a' principi dal Beauvais? Va bene che il frate in alcuni punti ne mitiga i rigori, riconosce altresì che i suoi allievi non possono vivere isolati, ma devono contrarre buone e scelte amicizie per governare coscienziosamente, mercè gli ottimi insegnamenti ricevuti, il popolo (2).

Dove però si mostra evidente la fedele riproduzione di uno de' passi dell'*Eruditionis didascalicae* (3) è al principio del corso di studî e precisamente là dove espone le doti precipue dell'educando (4). Apparirà infatti strano l'assegnare lo *scrutinium tacitum* (5) sia pure ad un giovinetto, che, mancandogli un lungo lavorìo di preparazione, non si è ancora formato un esatto concetto della meditazione profonda, del singolare raziocinio su un dato ordine d'idee. E tanto più incoerente sembrerà il pensiero del frate quando pretende dagli scolari la povertà e la terra straniera: ora parlare di " terra aliena „ a figli di re, dal momento che non avrebbero avuto il permesso di lasciare la reggia per paura di soffrire nella loro dignità, è evidentemente un assurdo non tanto quanto richiedere loro la " povertà „ ovvero la semplicità di costumi, che concordava pienamente con le idee di Luigi IX il Santo. Aveva quest'ultimo, in due specie di *vade-mecum*, raccomandato alle figlie Bianca (o Margherita) e ad Isabella la modestia, l'onestà, le ispirazioni gentili, obbedendo più ad un impulso del cuore paterno che a

---

(1) Migne, *Patrologia latina*, tomus CLXXVI; Hugonis de S. Victore, *Opera mystica. De institutione novitiorum*, col. 925 sgg.

(2) Friedrich, p. 16.

(3) Migne, *Patrologia latina*, tomus CLXXVI; Ugonis de S. Victore, *Opera dogmatica*, pars II, *Eruditionis didascalicae*, liber III, cap. XIII, 773.

(4) Friedrich, p. 16.

(5) Migne, *Patrologia. Erud. didascal.*, libri VII, col. 739 sg.; *De arte meditandi*, col. 993 sgg.; *De modo dicendi et meditandi libellus*, col. 875 sgg.

deliberato proposito di scrivere un opuscolo pedagogico e menomare in tal modo l'opera del suo protetto (1).

Ad Ugo di San Vittore spetta quindi una parte non indifferente nel successo del *De eruditione*, perchè da Beauvais riconosciuto competente più degli altri scolastici nell'arte di educare; a' Padri della Chiesa ed agli altri scrittori ecclesiastici e in minor numero a quelli pagani ed arabi il merito de' passi, delle citazioni e delle sentenze, di cui è fiorettata l'esposizione (2): ciò rivela pure la illuminata dottrina e la costante pazienza del frate nel compilare le diverse teorie, le idee contrapposte, tolte a proposito dalla immensa congerie di materiale, che aveva sotto mano, mentre stava componendo la Quadruplice opera.

Non sarà poi fare dell'ipercritica, quando si asserisca che i due trattati in questione offrono tale diversità d'intenti, se non di metodi e di programmi, particolarmente di fini morali e politici, che si possono stabilire soltanto rapidi e brevi confronti.

Anzi tutto il dovere dello scolaro di dimenticare la propria famiglia e conseguentemente l'influenza presso che nulla de' genitori sopra i figli, una volta che incominci l'opera del maestro; la riconosciuta validità del metodo ripetitivo, esercitato individualmente e più ancora la grande efficacia del sistema dialogico degenerante, entro i giusti limiti, in disputa; l'accurata scelta de' testi e il fastidio dell'eccesso nelle cose; l'ottimo provvedimento preso riguardo agli educandi più tardi per intelligenza o per condizioni fisiche, e la soluzione, diversa invero, del problema dell'educazione femminile; il sentimento dell'amor di patria, variamente esplicato, rivolgendosi l'uno a migliorare i capi e l'altro a preparare la maggior grandezza della Francia, e il vivo desiderio del bene comune; ecco in che cosa possono paragonarsi Beauvais e Dubois.

Si potrà in seguito ricavare tanto dal *De recuperatione Terre Sancte* che dal *De eruditione filiorum regalium* non un giudizio sintetico e complessivo, ma un'idea semplice e ben de-

---

(1) Hentsch, op. cit., p. 80 sgg. (nn. 80-81).
(2) Friedrich, p. 41.

lineata ne' suoi tratti caratteristici del concetto e del fine dell'istruzione.

Si osservi pertanto nel trattato di Pietro Dubois l'occupazione continua che non concede tregua di sorta, tolte le ore destinate al riposo notturno (1), sebbene per essere ragionevoli occorra pensare a qualche intervallo concesso nella lunga giornata de' giovani studiosi ; non si parla però esplicitamente di un orario diviso per materie, a cui l'autore accenna quasi per incidenza (2), fissando lo svolgimento del programma didattico consistente in una cultura strettamente religiosa estesa ad una più larga e bene intesa istruzione professionale.

Non vi è però assenza di metodo, perchè vi si nota il passaggio graduale dal facile al difficile, dal noto all'ignoto, la ripartizione del lavoro assai proporzionata e concorde, dato rimarchevole dal momento che le materie astruse si alternavano con quelle che concedevano un po' di svago mentale (si ricordino le ore destinate al canto, allo studio de' poeti (3), il grande profitto tratto dall'applicazione su' libri (4) (anche i " libri portativi pauperum „! (5)), la pratica decisione di adottare estratti (6) più o meno indovinati e ben compilati, che sostituivano i libri costosi, risparmiavano agli scolari di prendere appunti e per la loro chiarezza rendevano veri e segnalati servigi, specialmente quando il testo era scorretto e malsicura la interpretazione delle glosse.

Lo scolaro però si abituerà ugualmente a riassumere brevemente (7) con maggiore o minore eleganza, secondo l'età e la disposizione naturale, i libri letti, mandati a memoria (8), esercitazioni queste che molto probabilmente non dovevano differire dalle solite, infarcite di materiale retorico, ritenuto come mezzo sicuro dagli stessi maestri per abbuiare l'argomento e renderlo irriconoscibile.

---

(1) *De recuperatione*, § 71, p. 59.

(2) *Ibid.*, § 71, pp. 58-59; § 72, pp. 60-61; § 74, p. 62.

(3) *Ibid.*, § 71, pp. 58-59.

(4) *Ibid.*, § 75, pp. 62-63.

(5) *Ibid.*, § 76, p. 63.

(6) *Ibid.*, § 72, pp. 60-61; § 73, p. 61; § 76, p. 63.

(7) *Ibid.*, § 71, p. 59; v. Appendice.

(8) *Ibid.*, § 71, p. 59; v. Appendice.

Perciò quello che offre il pubblicista nel *De recuperatione Terre Sancte* non è ammasso informe d'insegnamenti senza connessione di sorta, non insignificante predicozzo sull'istruzione de' suoi tempi, bensì una pacata revisione di tutte le riforme da proporre; di qui un'arte speciale nel manifestare il proprio pensiero, scusandosi talvolta dell'imperizia manifestata (1), un'antipatia spiccata e, direi quasi, innata contro la specializzazione scientifica, dannosa all'economia pratica-sociale, quando sia disgiunta dall'esperienza (2), una giusta separazione fra la teoria e la pratica, un'avveduta coordinazione fra la istruzione primaria e secondaria. La scuola però dà solo l'indirizzo, istruisce quanto lo permettono i suoi regolamenti: al giovane, o meglio all'uomo di trent'anni (3) consapevole del proprio valore intellettuale, combattere e ascendere per l'aspra via della scienza. Così, finito l'insegnamento de' collegi, egli non può dare un addio definitivo agli studi, giudicando compiuta la sua istruzione, chè non si può considerare mai perfetto, dovendo affinare la mente per la soluzione de' problemi più ardui, per la pratica di alcune rettifiche, a meno che non consenta starsene ignaro del mondo in beata quietudine (4).

Ma riesce proprio difficile intravvedere i difetti nel complesso organismo del sistema pedagogico di Dubois? Certo chi legga superficialmente il trattato non può fermare l'attenzione su molti passi controversi, nè formarsi un concetto esatto sul vario agitarsi del pensiero del pubblicista, come chi ha cercato pazientemente nell'esatta ed accurata interpretazione di vincere le difficoltà del latino medievale. Gravi talora si presentano le incoerenze e le mende, precipitose le soluzioni in parte abborracciate e accomodate da qualche sentenza tratta dal Vangelo o da Aristotele, lampanti riescono gli artifici e gli espedienti per coprire la deficenza de' mezzi. Molto — e questo sia detto a difesa del legista — egli ritrae da' suoi tempi: fra il bello e il brutto egli sa scegliere con fine perspicacia, però non sempre

(1) *De recuperatione*, § 80, p. 66.
(2) *Ibid.*, § 80, p. 66-67.
(3) *Ibid.*, § 76, p. 64.
(4) *Ibid.*, § 78, p. 65.

riesce a trarsi d'impaccio quando si trova alle prese con la vecchia scolastica e mette in atto le idee innovatrici di Sigieri, di Bacone e di Lullo.

Ora dall'esame particolareggiato ed attento risulta che lo studio psicologico dell'educando è alquanto disordinato, ma in compenso, dov'è tracciato, costituisce una delle note più caratteristiche del sistema pedagogico: non aggravare con eccessivo lavoro i fanciulli (1), pretendere maggiore alacrità da' più grandi, che possiedono attitudini per uno sforzo mentale anche superiore alle loro forze, ascrivere a tutti, sia intelligenti o no, robusti o deboli, un compito speciale, chè non va disprezzata l'opera di uno solo, il quale possa o con l'ingegno o con la volontà o con l'attività propria cooperare all'attuazione de' grandi ideali di Dubois.

La mancanza poi di libertà negli studî, a parere del legista, è considerata necessaria, perchè, soffocando fin da principio ogni sviluppo mentale, riduce lo scolaro passivo ad ogni iniziativa personale, lo compenetra dell'alto senso di sgomento e, diciamo pure, di paura a lui ispirato da' maestri e da' capi della “ provisione „ e infine desta in lui il sentimento del dovere, che prepara a poco a poco l'elevatezza intellettuale, nonchè la vittoriosa conquista in Terra Santa.

Una buona memoria è utile per immagazzinare pazientemente tutto il pesante fardello della dottrina del maestro e necessaria si mostrerà specialmente per lo studio delle lingue orientali: studio che, trovandosi in perfetta correlazione col sentimento religioso, va coltivato gradatamente perchè non deve rimanere teorico ornamento di cultura, bensì riuscire strumento pratico e copioso di abbondanti frutti per la missione affidata a' promulgatori futuri della religione di Cristo. Tuttavia al pubblicista dànno seriamente a pensare lo stanziamento di fondi cospicui per tale istruzione, per cui vorrebbe poi fondare una scuola di perfezionamento (2), e il timore che il papa non offra deliberatamente il suo appoggio (3) per un vivo senso di

(1) *De recuperatione,* § 71, p. 59.

(2) *Ibid.,* § 62, p. 52.

(3) *Ibid.,* § 65, p. 55.

ripugnanza al nuovo spirito di libertà di pensiero, effuso per tutta Europa, causa la civiltà araba.

Significativa la grande somiglianza de' programmi didattici ne' collegi misti, dove si accolgono ugual numero di fanciulli e fanciulle specialmente per l'istruzione primaria (1) e originale l'intelligente collaborazione!

Ma un'obiezione salta subito fuori: si potevano trovare fanciulle, o meglio donne dalla tempra così robusta, dalla mente così spregiudicata, dallo spirito così pronto al sacrificio, in tempi in cui l'educazione femminile, salvo rari casi, era trascurata e, quel che è peggio, ridotta a ben poca cosa?

E gli uomini, pur nella diversità de' loro incarichi, considerati come altrettanti strumenti, tutti alla dipendenza della " provisione ", vi avrebbero partecipato in un'unità sintomatica di aspirazioni, con entusiasmo fanatico e con energia di sentimenti, con ampiezza di ideali e sacrificî di vite, dopo la disgraziata spedizione in Terra Santa di Luigi IX? Veramente in mezzo alla malignità continua de' volgari si leva la voce di Dubois più potente di quella de' poveri giullari, che piangono ne' loro carmi sulle sventurate sconfitte ed esortano a non abbandonare a predoni infedeli il sepolcro di Cristo (2). Incita il pubblicista a rimuovere con mezzi adeguati e con sagge disposizioni gli sforzi eroici, gli assalti furiosi, e sa porre bene in rilievo il nuovo accanto al vecchio e cogliere le gemme frammiste a scorie di nessun conto, il tutto connesso col principale scopo, quello di riprender la Palestina.

Tuttavia, più che un'alta finalità etica, il " legista " attribuisce al trattato un fine politico-sociale, derivato in massima dall'atteggiamento fiero e deciso che la Francia aveva preso riguardo alla Chiesa, la cui prepotenza ed intromissione incessante negli affari pubblici e privati aveva stancato, ma non fiaccato gli animi, ne' quali si era ridestato il sentimento della nazionalità. Idea bella e feconda, custode gelosa dell'avvenire,

---

(1) *De recuperatione*, § 60, p. 50.

(2) Vattasso Marco, *Un ritmo sconosciuto sulla caduta di Gerusalemme in mano a Saladino*, " Miscellanea di storia ecclesiastica e di teologia positiva ", n. 5, 1904.

che portò a soluzioni gravi e ad eccessi penosi, ma fine nobile ed alto perchè animato da un unico pensiero: l'affermarsi e il consolidarsi del potere regio coadiuvato dal popolo francese, che nel re riconosceva il suo capo e lo strenuo suo difensore. Non sappiamo se Dubois abbia concorso, come gli altri pubblicisti, alla preparazione dell'opinione pubblica; certo è che, se egli non esercitò qualche azione sull'animo di Filippo il Bello, non tralasciò occasione per dare il proprio giudizio e per mettere in mostra e ripetere a sazietà i suoi più o meno utopistici piani riformatori. Grandissimi i vantaggi da ritrarsi dalla crociata, fra' quali due degni di nota: le terre conquistate si manterrebbero da loro stesse senza necessità di sostenere spese rilevanti e, cessati i pericoli del mare, pacificata la regione, si avvierebbero frequenti relazioni commerciali, che sempre rendono più agevole lo scambio de' prodotti e più stretti i vincoli fra popoli di razza diversa (1). — E tutto ad un tratto si mostra al legista l'immensità prodigiosa del suo sogno tradotto in realtà, la sintesi per così dire de' suoi progetti: virtuosi ed istruiti, uniti e forti i cattolici avrebbero una sola divisa, l'ubbidienza, a cui va unita l'opera benefica della filosofia, la quale più che la forza violenta de' popoli vincitori porterebbe all'incremento non solo dello stato ma al mutarsi di esso in monarchia del mondo (2).

Ad un fine poi moralmente cristiano tende l'opera della crociata, perchè il pubblicista, non volendo lasciare nella completa ignoranza gl'infedeli, escogita il mezzo di redimerli e renderli partecipi della civiltà europea. Saranno i predicatori e le donne ad effettuare questa parte del piano pedagogico: allo zelo indefesso dovranno unire il benefico influsso del predominio morale per modificarne energicamente il carattere; tuttavia lavoreranno di comune accordo con gli altri membri della " provisione ", cooperando alla missione grandiosa, che estenderà il suo dominio sugli stati circostanti e sulle terre lontane (fino l'Egitto!).

Aspre battaglie si dovran superare non per amor di gloria

---

(1) *De recuperatione*, § 67, p. 56.

(2) *Ibid.*, § 70, pp. 57-58.

e per l'utile proprio, si dovrà combattere per il rapido evolversi dell'umanità: sarà la legge di Cristo che impererà su quelle terre abbandonate ed assicurerà col lavoro paziente e indefesso un'azione profondamente riformatrice. E l'autore si mostra tanto sicuro dell'universale approvazione de' suoi ideali, che ha piena fiducia nella riuscita; sarà per altro pronto ad accettare modificazioni e critiche anche spietate, ma s'infiammerà di nobile sdegno se i suoi piani saranno avversati dagl'incompetenti in materia, che badano a denigrar tutto e travolgere miseramente in rovina, trincerandosi dietro uno schernevole compatimento (1).

Dunque non vigorosa tempra di educatore, ma appassionato ideologo, Pietro Dubois vuole creare una grande educazione sociale, che si ricolleghi a tutte le manifestazioni della vita: non raggiunge l'intento, tuttavia stringato e ardito nelle sue proposte va diritto allo scopo nel discutere e nel difendere le proprie teorie, che convergono tutte verso una sola aspirazione, quella cioè di creare al popolo francese una nuova via di conquista morale e politica, la redenzione della Terra Santa.

Affatto diverso ci si presenta lo spirito analitico di Vincenzo di Beauvais, che per il programma didattico tracciato nel *De eruditione filiorum regalium* non si allontana da' precedenti trattati pedagogici, tutto ispirato com'è al misticismo ed anche al dispotismo proprio della Chiesa, contrario al libero sviluppo mentale.

Istruzione improntata alla massima serietà lo è in quanto addestra l'educando a seguire un determinato e schematico sistema atto a raggiungere la perfezione dell'animo; educazione virile si può denominare dal fatto che cerca d'inculcare le norme speciali per riuscire un perfetto gentiluomo; educazione severa e rigida sopra tutto, perchè ricorre senza tanti indugî a' castighi corporali, con questa differenza però che, mentre in pieno medio evo non si badava a praticare la disciplina con mezzi correzionali alquanto spicci e persuasivi, nel *De eruditione filiorum regalium* spira un senso di umanità e di benigno compatimento per i difetti e le mancanze degli scolari.

---

(1) *De recuperatione*, § 82, p. 67.

Il metodo è facile e piano, accessibile a tutte le menti, debitamente graduale, atto a svegliare a poco a poco il lavorìo incessante del pensiero, ma, ad onta della praticità de' consigli del frate, si può supporre senza grande difficoltà che i poveri scolari fossero più che mai obbligati ad esercitarsi anche da soli alla lettura ed alla spiegazione de' testi sacri per la maggior parte, all'addestramento nella chiarezza sistematica de' compendî e delle composizioni e nella ricerca critica, promossa dalla disputa che allargava sensibilmente gli stretti confini imposti dallo studio delle sette arti.

Il *De eruditione filiorum regalium* perciò non è un semplice abbozzo buttato giù alla meglio e nemmeno un compendio noioso più morale che pedagogico, bensì un trattato in piena regola, che mostra una certa competenza didattica e fa seriamente pensare all'insegnamento del frate nel monastero di Beauvais: ipotesi questa delle più intricate e difficili per la soluzione di uno de' punti oscuri della vita di Vincenzo, ma che offre molti tratti di verisimiglianza, se si ricordi l'incarico affidatogli dalla regina Margherita.

Per altro a quest'argomento se ne contrappone un altro d'indole molto importante: nel trattato in quistione manca uno svolgimento ordinato, concatenato nelle sue parti, sì che, pure armati di pazienza infinita, riesce difficile riunire i frammenti dell'intero sistema pedagogico. Il materiale non fa difetto, ma v'è disordine nell'esposizione, inframezzata da numerose citazioni, non tolte a caso, calzanti a proposito del tema propostosi; v'è un complesso di evidenti contraddizioni, che mostrano, non dirò l'imperizia, quanto l'inettitudine di Vincenzo a lavori pedagogici. È vero che la dialettica ha sorretto in parte i punti deboli ed ha potentemente concorso a che le questioni prese di per se stesse rimangano abbastanza chiare e diano assoluta certezza che in mezzo a' difetti balzi fuori un certo logico ragionamento, una meta quasi sicura da raggiungere. Quasi sicura (1), perchè Beauvais si pente delle sue recise affermazioni ed ammette soltanto la probabilità dell'efficacia della istruzione, come mezzo per redimere l'uomo da tutte le debo-

---

(1) Friedrich, p. 17.

lezze e le miserie terrene; forse se si tien conto dell'educazione morale, parte costitutiva del piano pedagogico, si può esser sicuri di un successo più che soddisfacente.

Uno de' gravi difetti del frate è quello di non aver praticato una netta divisione fra' diritti e i doveri sia del maestro che dello scolaro, di cui per altro s'ignora a quale età cominci l'istruzione (1); sicchè non riuscendo a segnare una vera linea di demarcazione ne viene di conseguenza che all' educando spetta praticare un'elaborazione complicata, un raziocinio troppo sviluppato, e altresì fidare, dopo gl'insegnamenti ricevuti, sull'intelligenza, sul buon senso, sulla cultura, che si è venuta man mano formando. Saggio provvedimento è quello di abituare il giovinetto a tentar da solo i primi conflitti, perchè, una volta ingaggiata la pugna, non indietreggerà, ma animoso si slancerà certo della vittoria; tuttavia in caso d'insuccesso e di scoraggiamento una vigile guida è sempre ritenuta indispensabile anche per sorreggere ne' passi difficili ed incitare ne' più duri cimenti.

Di qui giustamente si potrebbe trar partito a considerare le idee del sistema pedagogico di Beauvais, non molto chiare a dir vero, perchè non si fondano logicamente sopra una sola ripartizione delle materie d'insegnamento, ma traggono la loro origine da' sistemi di Alforabio (2) e di Riccardo di San Vittore (3), non integrandosi a vicenda però, chè si riscontrano le tracce ben distinte dell'uno e dell'altro indirizzo.

Tuttavia nulla vi manca che non possa efficacemente coadiuvare l'opera educativa: egregi maestri e libri sopra tutto costituiscono le salde basi del corso di studi, che nel medio evo non si potevano assai spesso compiere sia per il difficile e costoso acquisto de' trattati e delle opere, sia anche per le disparate qualità degl'insegnanti, alla cui morte sottentrava nella maggior parte de' casi l'oscura ignoranza dopo un periodo di splendore (4). Trattandosi poi di principi, i mezzi energici, per cui Beauvais aveva una rara predilezione, dovevano esser usati

---

(1) Friedrich, p. 26.
(2) Id., p. 28.
(3) Id., p. 29.
(4) Salvioli, op. cit., p. 180.

con molta parsimonia, tanto più che non si trattava di un insegnamento pubblico, dove la disciplina doveva esser mantenuta per la dignità della scuola stessa. Ad avvalorare questa ipotesi giunge in buon punto l'argomento che tra maestro e scolaro spira un senso di familiarità, d'intrinsichezza intellettuale, cui non segue l'identificazione, ma si mantiene la giusta distinzione de' due spiriti. Quale profondo contrasto offre la nobile figura dell'educatore di Vincenzo in confronto de' soliti pedagoghi medievali, avidi di guadagno e pronti a dare il loro cattivo esempio!

In conclusione la pedagogia svolta nel *De eruditione filiorum regalium* segue naturalmente lo sviluppo del corpo e il primo manifestarsi dell'intelligenza, modera a tempo debito la libertà dell'educando e dà piena autorità al maestro, concede con la maturità della mente l'elaborazione autodidattica e considera come fine supremo la perfezione morale.

Fine nobile ed alto, prezzo di molte fatiche, adempimento di generosi ideali! Che sarebbe infatti dell'uomo se non fosse sin dall'infanzia indirizzato al bene, aiutato a non indietreggiare dinanzi agli ostacoli, se non gli fosse insegnato a levar lo sguardo in alto e rivolgersi fidente in Dio, senza un'abile guida, senza un valido appoggio, quale si riscontra nel maestro? E a ben considerare non è l'istruzione un mezzo eccellente per allontanare l'uomo dalla triste abiezione de' vizî, per dissipare col raggio del pensiero la nebbia affannosa della mente, per migliorare e ingentilirne i costumi, spargendo, quasi in un solco interminato di luce, germi di belle e grandi idee! Vi sono, è vero, intelligenze superiori, che senza direzione alcuna possono compiere da loro stesse il laborioso processo dell'apprendere, l'assennata e concettosa riorganizzazione delle dottrine apprese, ma a pochi sono date le glorie dell'ingegno. E chi, non traendo profitto dall'istruzione ricevuta, si darà in preda alla corruzione più sfrenata, mercè la cattiva compagnia, non saprà ritrarsi a tempo dal baratro che gli si apre davanti: forse le conseguenze di una trascurata o falsa disciplina avranno agevolato ed anche affrettato la rovina del giovane, capace di reagire a qualsiasi pressione, a qualunque brusco divieto (1).

(1) Friedrich, p. 15 e segg.

Lo studio psicologico dell'educando è tratteggiato cor grandiosità di linee partendo dal presupposto che una buona e regolare educazione influisca sull'indole più retriva, perchè alla ribellione istintiva per ogni atto o comando contrario al proprio desiderio sottentra la docilità, la umiltà, la subordinazione, il sentimento infine del dovere. È questo compito arduo e difficile, adempiuto prima da' genitori, da cui dipende se il figlio sarà oggetto di biasimo o di lode, sarà amato o tenuto in disparte dalla società (1). Beauvais dovrebbe almeno indicare che è destinata la madre all'educazione del bambino, ad inspirare chiara e distinta la voce della virtù e ad avviare sopra tutto all'insegnamento della dottrina di Cristo, comandando col linguaggio dell'amore (2). Allora non andranno perduti gli ammaestramenti dell'educatore, che susciterà altri pensieri ed affetti generosi ne' cuori degli educandi, rinvigorirà specialmente i virtuosi propositi, conforterà e spingerà a più alti voli la mente, pur intendendo le ansie, le angustie che perturbano l'operosità dell'ingegno, ma che, vinte, preparano il successo glorioso delle battaglie successive (3).

Il *De eruditione filiorum regalium* non può esser libro pensato, atteggiato com'è alla più alta moralità della vita, guardata con fine intento psicologico; è libro veramente vissuto che dà insegnamenti di vita ascetica e nello stesso tempo cerca di far acquistare all'individuo coscienza delle proprie forze, pur non liberandolo dall'obbedienza e dalla disciplina.

***

Accennare allo svolgersi del pensiero di Vincenzo di Beauvais e di Pietro Dubois, ricercare e delineare colla maggiore esattezza possibile l'intricato groviglio delle idee pedagogiche, stabilirne i

(1) Friedrich, p. 17.

(2) Id., pp. 38-39.

(3) Bourgéat, op. cit., p. 20: " Licet iidem pueri... nondum apti sint " ad legendum et intelligendum interim tamen ipsorum didascali, sive " magistri poterunt ex diversis eius capitulis prout eorum discretioni visum " fuerit, accipere et dare materiam litterarum ac versuum; et ipsi quoque " pueri cum aliquantulum in doctrina profecerint, per semetipsos inde po- " terunt addiscendi ac bene vivendi materiae accipere documentum ". Vincentius Bellovacensis, *Prologus ad Tract. de Erud. fil. reg.*

confronti o per lo meno analizzare le singole e sì varie teorie: ecco l'intento del presente lavoro.

Nel *De recuperatione Terre Sancte* la volontà energica, lo studio assiduo e spregiudicato, il vincolo di fratellanza, il principio di libertà sociale, il nobile orgoglio di appartenere ad una potente nazione, superba di un grandioso e indimenticabile avvenire: nel *De eruditione filiorum regalium* invece lo spirito semplice, non basso e pusillanime, scevro da tutte le passioni, che considera la vita non come fine a sè stessa, ma come mezzo per la conquista del cielo e che non sa d'altra parte togliersi interamente dalle meschine controversie umane, perchè deve rivolgere ed esplicare la propria attività a vantaggio del popolo e dello stato. Di qui una profonda contraddizione derivata essenzialmente dal punto di vista monastico-ascetico, da cui parte Beauvais, che per altro non fa dimenticare gli insegnamenti meritevoli sempre di esser meditati, non perchè siano ispirati a novità pedagogiche, ma perchè attingono dalla sua esperienza e da svariate fonti la forza di verità e di praticità nelle giuste osservazioni, riepilogando i punti salienti della cultura di allora e scandagliando nello studioso raccoglimento i secreti e riposti meandri della scienza.

Quando poi si rifletta che in ambedue gli scrittori vibra potente e indiscusso il pensiero di render segnalato servigio alla società, possiamo ritenerli come alti e nobili educatori, anche se al loro tentativo di migliorare i costumi e render possibile la civilizzazione di popoli non abbia corrisposto l'immortalità della fama e il plauso de' posteri.

APPENDICE

Nota 2, p. 3: ***provisio*** = *opera della crociata* secondo il Renan (op. cit., p. 511) ed anche *programma* o *sorta di studî, spedizione.* — Ad ogni modo, per non incorrere in errori di senso, ho adoperato la parola latina.

Nota 2, p. 5: ***provisores*** = *capi della provisione, riformatori preposti agli studî.*

Nota 1, p. 9: ***constructo Breviario....., construatur eis Aurea Legenda Sanctorum.....*** — Credo più opportuno tradurre col verbo *co-*

struire per non falsare il testo e dar luogo ad equivoci. Forse si potrebbe con molte riserve tradurre con *spiegare*, ma è una pura e semplice ipotesi, che non ha alcuna pretesa di sbarazzare il terreno dalle difficoltà presentate a questo punto dal testo.

Solempnibus. — Il Du Cange (*Glossarium mediae et infimae latinitatis*. Niort, Favre, 1883-1887) dà " solempniter = *communitus* = *communiter* „.

Nota 2, p. 11: ***biblice*** = *letteralmente*, cioè *secondo il testo*. — Questo *biblice* è assai curioso per lo meno. Avanzo l'ipotesi del *publice* che mi vien suggerito dal " qui debent esse predicatores „, i quali devono imparare come si espone pubblicamente la Bibbia, materia essenziale di predicazione. Paleograficamente lo scambio del *b* per *p* è possibile.

Nota 1, p. 12: " cerurgia tam hominum quam equorum „. — Non grande differenza doveva passare tra i due diversi rami della chirurgia di fronte alle necessità militari cui tutto Dubois subordina per la considerazione di Terra Santa.

Nota 2, p. 15: " ... quas impensas maritate majoribus etiam omnibus " promittant reddere *viventes*, si poterunt, provisionis predicte; et si non, " vel quatinus *non morientes* (sic), ut provisio sine mensura taliter augeatur „. — Qui mi pare che il miglior partito sia quello di attenersi alla traduzione letterale, perchè interpretando liberamente il testo, ne vien fuori un bisticcio o peggio.

Note 4 e 5, p. 34: ***sexternum***. — Il Du Cange dà " sexternum codex " sex foliorum „: trattasi evidentemente di una specie di quinterno, dove l'alunno scriveva quel che aveva appreso durante il giorno.

..... ***post quem statim toties repetat quod scire videatur***. — Meglio interpretando *quod* = *quoad*: " ripeta tante volte finchè gli sembri " di sapere „.

regimina = *costruzioni*; ***regimina vocum*** = costruzione del nome, dell'aggettivo e del verbo.

Nota 1, p. 1: Il Friedrich non accenna i varî titoli del trattato di Beauvais (*Hist. litt.*, XVIII, p. 466):

" Tractatus de nobilitate et eruditione principum in tres libros " divisus „;

" De eruditione puerorum nobilium „;

" De informatione principum „;

" De institutione regularium (regiorum) puerorum et in quibus libris " potissimum instituendi „.

Tuttavia ritengo che il trattato sia stato scritto appositamente per i principi, riserbandosi l'autore di trattare della vita di corte in un'opera di più vaste proporzioni: intendo parlare dell'*Opus quoddam universale*, ecc., citate a p. 26.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Dicembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente comunica i ringraziamenti inviati da S. M. il Re, da S. A. R. il Duca degli Abruzzi e dalle LL. EE. Boselli, Ruffini e Cadorna per i telegrammi di ossequi e auguri a Loro diretti dall'Accademia nell'ultima adunanza plenaria. Partecipa inoltre la grande perdita fatta del Socio Carlo Cipolla, di cui ricorda l'alto valore scientifico e la squisita gentilezza e bontà d'animo: di lui dirà più ampiamente il Socio Sforza. Infine informa la Classe di un doloroso incidente occorso al Socio Salvadori, in seguito a cui questi non ha potuto intervenire a quest'adunanza. La Classe invia all'egregio e venerato Collega i più caldi auguri di una pronta guarigione.

Il Socio corrispondente Haller ha inviato una lettera di ringraziamento per le condoglianze che gli furon rivolte in seguito alla morte del suo figlio in guerra.

La " Société Chimique de France „ ha trasmesso un invito a una conferenza che si farà a Parigi l'8 corrente per celebrare il centenario di Carlo GERHARDT. Il Socio GUARESCHI propone, e la Classe approva unanime, che l'Accademia invii una lettera di adesione a questa celebrazione.

Vengono presentate per la stampa negli *Atti*, dal Socio JADANZA una sua Nota *Sul calcolo della distanza tra due punti di note posizioni geografiche,* e dal Socio GUIDI una sua, intitolata: *Sollecitazione prodotta nei pali di una conduttura elettrica per strappamento completo di una tesata.*

LETTURE

Sul calcolo della distanza tra due punti di note posizioni geografiche.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Per calcolare la distanza tra due punti A e B le cui coordinate geografiche sono note, vi sono parecchi metodi più o meno facili; tra essi può essere annoverato il seguente, che consiste nel ricavare dalle note serie di LEGENDRE i valori di $s \cos z$ ed $s \operatorname{sen} z$ (s è la distanza, z è l'azimut della geodetica AB).

Indicando con φ e θ le coordinate geografiche di A e con φ' e θ' quelle di B, tra esse e le coordinate geodetiche polari s e z esistono delle relazioni date dalle due serie di Legendre, le quali, limitate ai termini del 3° ordine, sono:

$$(1) \qquad \Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \frac{s \cos z}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \frac{s^2 \operatorname{sen}^2 z}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tg} \varphi - \\ - \frac{3}{2} \frac{e^2}{1-e^2} \cdot \frac{s^2 \cos^2 z}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2\varphi - \frac{s^3 \cos z \operatorname{sen}^2 z}{6\rho N^2 \operatorname{sen} 1''}(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) + \ldots$$

$$(2) \qquad \Delta\theta = \theta' - \theta = \frac{s \operatorname{sen} z}{N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi} + \frac{s^2 \operatorname{sen} z \cos z}{N^2 \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi} \operatorname{tg} \varphi + \\ + \frac{s^3 \operatorname{sen} z \cos^2 z}{3 N^3 \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi}(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) - \frac{s^3 \operatorname{sen}^3 z}{3 N^2 \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi + \ldots$$

In esse si considerano come infinitesimi di 1° ordine le quantità e^2, $\frac{s}{\rho}$, $\frac{s}{N}$; inoltre i punti si considerano abbastanza distanti dal polo in modo che i coefficienti $\operatorname{tg} \varphi$; $1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi$ etc. non abbiano valori talmente grandi da alterare l'ordine dei termini cui appartengono.

Moltiplicando la (1) per $\rho \operatorname{sen} 1''$ e la (2) per $N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi$

dopo aver trascurato i termini di 2° e 3° ordine si ricavano per prima approssimazione per $s \cos z$ e $s \operatorname{sen} z$ i due valori

$$s \operatorname{sen} z = \Delta\theta \, N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi$$
$$s \cos z = \Delta\varphi \, \rho \operatorname{sen} 1''$$

i quali sostituiti nei termini di 2° ordine delle (1) e (2) dànno per $s \cos z$ e $s \operatorname{sen} z$ i valori più approssimati

$$s \cos z = \Delta\varphi \, \rho \operatorname{sen} 1'' + \frac{\Delta\theta^2 N \operatorname{sen}^2 1''}{2} \cos^2 \varphi \, . \operatorname{tg} \varphi$$
$$s \operatorname{sen} z = \Delta\theta \, N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi - \Delta\varphi \, \Delta\theta \, \rho \operatorname{sen}^2 1'' \cos \varphi \, . \operatorname{tg} \varphi$$

e questi sostituiti di nuovo nei termini di 2° e 3° ordine, daranno, dopo facili riduzioni, i valori definitivi seguenti

$$(3) \quad s \cos z = \Delta\varphi \, . \, \rho \operatorname{sen} 1'' \Big[1 + \frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' . \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, . \frac{\Delta\theta^2}{\Delta\varphi} - \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2 \varphi \, . \, \Delta\theta^2 + \frac{3}{4} \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2\varphi \, . \, \Delta\varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 1''}{6} \cos^2 \varphi \, (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) \, \Delta\theta^2 \Big]$$

$$(4) \quad s \operatorname{sen} z = \Delta\theta \, . \, N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi \Big[1 - \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tg} \varphi \, . \, \Delta\varphi - \frac{\operatorname{sen}^2 1''}{6} \operatorname{sen}^2 \varphi \, . \, \Delta\theta^2 - \frac{\rho}{3 N^2} \operatorname{sen}^2 1'' . \, \Delta\varphi^2 \Big] .$$

Per il calcolo numerico conviene adoperare i logaritmi, e quindi ricorrendo alla serie logaritmica si ottiene, dopo facili riduzioni

$$\log s \cos z = \log \Delta\varphi \, . \, \rho \operatorname{sen} 1'' + M \frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' . \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, . \frac{\Delta\theta^2}{\Delta\varphi} + \frac{3}{2} M \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, . \, \Delta\varphi - \frac{M}{2} \left(\frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' \right)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \, . \frac{\Delta\theta^4}{\Delta\varphi^2} - \frac{M \operatorname{sen}^2 1''}{6} (4 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1) \, . \, \Delta\theta^2$$

$$\log s \operatorname{sen} z = \log \Delta\theta \, . \, N \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi - M \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' . \operatorname{tg} \varphi \, . \, \Delta\varphi - M \frac{\rho^2}{N^2} \operatorname{sen}^2 1'' \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \Delta\varphi^2 - \frac{M}{6} \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2 \varphi \, . \, \Delta\theta^2 .$$

Le correzioni ai logaritmi dei primi termini possono essere fatte in unità della 7ª cifra decimale, per cui ponendo:

$$P = 10^7 . M \frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' ,$$

$$P' = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^2}{1-e^2} M \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' . 10^7 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi ,$$

$$P'' = 10^7 \frac{M}{2} \left(\frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' \right)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi ,$$

$$P''' = 10^7 . M \operatorname{sen}^2 1'' \frac{4 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1}{6} .$$

$$Q = 10^7 . M \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' ,$$

$$Q' = 10^7 . M \frac{\rho^2}{N^2} \operatorname{sen}^2 1'' \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] ,$$

$$Q'' = 10^7 . M \frac{\operatorname{sen}^2 1''}{6} \operatorname{sen}^2 \varphi ;$$

si avrà per il calcolo numerico:

$$\log s \cos z = \log \Delta\varphi . \rho \operatorname{sen} 1'' + P . \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\Delta\theta^2}{\Delta\varphi^2} + P' \Delta\varphi - P'' \frac{\Delta\theta^4}{\Delta\varphi^2} - P''' \Delta\theta^2 . \tag{5}$$

$$\log s \operatorname{sen} z = \log \Delta\theta . N \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi - Q . \operatorname{tg} \varphi . \Delta\varphi - Q' \Delta\varphi^2 - Q'' \Delta\theta^2 . \tag{6}$$

Le quantità $\Delta\theta$ e $\Delta\varphi$ debbono essere espresse in secondi. Per facilitare il calcolo numerico abbiamo calcolato i logaritmi dei coefficienti P e Q di 10 primi in 10 primi per tutti i valori di φ compresi da 35° a 47°. Abbiamo anche dato per lo stesso intervallo i valori di $\log \rho \operatorname{sen} 1''$ e di $\log N \operatorname{sen} 1''$. Tutti questi logaritmi si trovano nella tavola annessa.

Esempio numerico.

Punto A $\varphi = 37^\circ\, 57'\, 11'',047$; $\theta = -\,2^\circ\, 33'\, 23'',078$

„ B $\varphi' = 37\;\; 51\;\; 15\;,037$; $\theta' = -\,2\;\; 07\;\; 34\;,024$

$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = -\,356'',010$; $\Delta\theta = \theta' - \theta = 1549'',054$

$\log \operatorname{sen} \varphi = 9,7888862$

$\log \cos \varphi = 9,8968099$

$$\begin{aligned}
\log \Delta\varphi &= 2,5514622\; n \\
\log \rho \operatorname{sen} 1'' &= 1,4889566 \\
\log \rho \operatorname{sen} 1''\, \Delta\varphi &= 4,0404188\; n \\
P \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \frac{\Delta\theta^2}{\Delta\varphi} &= -\,34555 \\
& \; 4,0369633\; n \\
P'\,\Delta\varphi &= -\,36 \\
& \; 4,0369597\; n \\
-\,P'' \frac{\Delta\theta^4}{\Delta\varphi^2} &= -\,137 \\
& \; 4,0369460\; n \\
-\,P'''\,\Delta\theta^2 &= -\,21 \\
\log s \cos z &= 4,0369439\; n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \Delta\theta &= 3,1900665 \\
\log N \operatorname{sen} 1'' &= 1,4907672 \\
\log \cos\varphi &= 9,8968099 \\
\log \Delta\theta \,.\, N \operatorname{sen} 1''.\, \cos\varphi &= 4,5776436 \\
-\,Q \operatorname{tg}\varphi\, \Delta\varphi &= +\,5822 \\
& \; 4,5782258 \\
-\,Q'\,\Delta\varphi^2 &= -\,8 \\
& \; 4,5782250 \\
-\,Q''\,\Delta\theta^2 &= -\,15 \\
\log s \operatorname{sen} z &= 4,5782235
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log P &= 1,0241397 \\
\log \Delta\theta^2 &= 6,3801330 \\
\operatorname{colg} \Delta\varphi &= 7,4485378\; n \\
\log \operatorname{sen}\varphi &= 9,7888862 \\
\log \cos\varphi &= 9,8968099 \\
& \; 4,5385066\; n \\
& \; -\,34555
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log P' &= 9,01066 \\
\log \Delta\varphi &= 2,55146\; n \\
& \; 1,56212\; n \\
& \; -\,36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \frac{\Delta\theta^4}{\Delta\varphi^2} &= 7,65734 \\
\log P'' &= 4,48086 \\
& \; 2,13820 \\
& \; 137
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \Delta\theta^2 &= 6,38013 \\
\log P''' &= 4,94170 \\
& \; 1,32183 \\
& \; 21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log Q &= 1,3215486 \\
\log \operatorname{tg}\varphi &= 9,8920764 \\
\log \Delta\varphi &= 2,5514622\; n \\
& \; 3,7650871\; n \\
& \; -\,5822
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log Q' &= 5,80980 \\
\log \Delta\varphi^2 &= 5,10292 \\
& \; 0,91272 \\
& \; 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log Q'' &= 4,80845 \\
\log \Delta\theta^2 &= 6,38013 \\
& \; 1,18858 \\
& \; 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} z &= 0,5412796\; n \\
z &= 180 - 73^\circ\, 57'\, 25'',79 \\
z &= 106^\circ\, 02'\, 34'',21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log s \operatorname{sen} z &= 4,5782235 \\
\log \operatorname{sen} z &= 9,9827484 \\
\log s &= 4,5954751 \\
s &= 39398^{m},08
\end{aligned}$$

Casi particolari.

1°) $\Delta\theta = 0$.

In questo caso la formola (4) dà $\operatorname{sen} z = 0$ e quindi $z = 0$, e perciò $s \cos z$ non è altro che l'arco di meridiano compreso tra i paralleli le cui latitudini sono φ e φ'; indicandolo con S si avrà:

$$\log S = \log \Delta\varphi\, \rho \operatorname{sen} 1'' + P' \Delta\varphi.$$

2°) $\Delta\varphi = 0$.

In questo caso i punti hanno la stessa latitudine e perciò le formole (3) e (4) dànno:

$$s \cos z = \frac{N}{2} \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \,.\, \Delta\theta^2$$
$$s \operatorname{sen} z = \Delta\theta \,.\, N \operatorname{sen} 1'' \cos \varphi \left[1 - \operatorname{sen}^2 1'' \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{6} \,.\, \Delta\theta^2\right]$$

e pel calcolo numerico:

$$(7) \quad \begin{cases} \log s \operatorname{sen} z = \log \Delta\theta \,.\, N \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi - Q'' \Delta\theta^2 \\ \log s \cos z = \log \Delta\theta \,.\, N \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi + \\ \qquad + \log \Delta\theta \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} \varphi - \log 2. \end{cases}$$

Le formole (7) sono importantissime, esse ci indicano un altro metodo per calcolare la distanza tra due punti le cui coordinate geografiche sono note; ecco in che consiste codesto metodo.

Se A e B sono i due punti le cui coordinate geografiche sono note, si prenda sul meridiano di A il punto C avente la stessa latitudine di B (*) e s'immagini la geodetica $CB = a$; questa ed il suo azimut $PCB = \alpha$ (P è il polo) si calcoleranno mediante le due formole seguenti, che non sono altro che le (7).

$$\log a \operatorname{sen} \alpha = \log \Delta\theta \,.\, N' \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi' - Q'' \Delta\theta^2$$
$$\log a \cos \alpha = \log \Delta\theta \,.\, N' \operatorname{sen} 1'' . \cos \varphi' +$$
$$+ \log \Delta\theta \operatorname{sen} 1'' . \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{colg} 2.$$

(*) Il lettore farà facilmente la figura.

Noto α, sarà noto il suo supplemento $BCA = C$. L'arco di meridiano AC sarà noto mediante la formola:

$$\log AC = \log b = \log (\varphi' - \varphi)\, \rho \operatorname{sen} 1'' + P' \Delta\varphi.$$

Del triangolo sferoidico ACB si conoscono dunque due lati a, b e l'angolo compreso C. Esso si calcolerà come un triangolo rettilineo, essendo noto il suo eccesso sferoidico $\epsilon = \dfrac{ab \operatorname{sen} C}{2 \rho N \operatorname{sen} 1''}$.

Dal calcolo del triangolo rettilineo di lati a, b ed angolo compreso $C - \frac{1}{3}\epsilon$ si dedurrà la distanza $s = AB$ e l'angolo A che aumentato di $\frac{1}{3}\epsilon$ darà l'azimut di B in A.

Esempio numerico.

A:	$\varphi = 37^\circ\, 57'\, 11'',047$;	$\theta = -2^\circ\, 33'\, 23'',078$
B:	$\varphi' = 37\;\, 51\;\, 15\;\, ,037$;	$\theta' = -2\;\, 07\;\, 34\;\, ,024$

$$\Delta\theta = 1549'',054$$
$$\Delta\varphi = -\;356\;,010$$

$\log \Delta\theta . N' \operatorname{sen} 1'' . \cos\varphi' = 4,5782247$	$\log \Delta\theta = 3,1900665$
$\log \Delta\theta = 3,1900665$	$\log N' \operatorname{sen} 1'' = 1,4907648$
$\log \operatorname{sen} 1'' = 4,6855749$	$\log \cos\varphi' = 9,8973934$
$\log \operatorname{sen}\varphi' = 9,7879235$	$\log \Delta\theta . N' \operatorname{sen} 1'' . \cos\varphi' = 4,5782247$
$\operatorname{colg} z = 9,6989700$	$-Q'' \Delta\theta^2 = \quad -15$
$\log a \cos\alpha = 1,9407596$	$\log a \operatorname{sen}\alpha = 4,5782232$
$\operatorname{colg} \cos\alpha = 2,6374648$	$\operatorname{colg} a \cos\alpha = 8,0592404$
	$\log \operatorname{tg}\alpha = 2,6374636$
$\log a = 4,5782244$	$\alpha = 89^\circ\, 52'\, 04'',71$
$\log a \operatorname{sen}\alpha = 4,5782232$	$\log \operatorname{sen}\alpha = 9,9999988$
$\operatorname{colg} \operatorname{sen}\alpha = 0,0000012$	$\log \cos\alpha = 7,3625352$
$\log a = 4,5782244$	
$\log \Delta\varphi = 2,5514622$	$\log a = 4,57822$
$\log \rho \operatorname{sen} 1'' = 1,4889566$	$\log b = 4,04042$
$\log b = 4,0404152$	$\log \operatorname{sen}\alpha = 0,00000$
$4,0404188$	$\log \dfrac{1}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} = 1,40482$
$P' \Delta\varphi = \quad -36$	$0,02356$
$\log b = 4,0404152$	$\epsilon = 1'',0555$
Angolo C del triang. rettilineo ACB	$\frac{1}{3}\epsilon = 0,35$
$C = 89^\circ\, 52'\, 04'',36$	

Calcolando gli altri elementi del triangolo rettilineo di cui sono dati:

$$\log a = 4{,}5782244$$
$$\log b = 4{,}0404152$$
$$C = 89^\circ\, 52'\, 04'',36$$

si ottiene:

$$A = 73^\circ\, 57'\, 25'',45$$
$$B = 16\;\; 10\;\; 30\;\; ,19$$
$$\log c = 4{,}5954750.$$

Azimut z di B in $A = 180^\circ - \left(A + \frac{1}{3}\,\epsilon\right)$, cioè:

$$Z = 106^\circ\, 02'\, 34'',20.$$

Distanza $AB = c = s = 39398^{\mathrm{m}},07.$

La tavola seguente contiene i logaritmi dei coefficienti:

$$P \;= 10^7 .\, M \frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1'' ,$$
$$P' = \frac{3}{2}\; \frac{e^2}{1-e^2}\; \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' .\, 10^7 .\, M .\operatorname{sen}\varphi \,.\, \cos\varphi ,$$
$$P'' = 10^7 .\, \frac{M}{2} \left(\frac{N}{2\rho} \operatorname{sen} 1''\right)^2 \operatorname{sen}^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi ,$$
$$P''' = 10^7\, M \frac{4 \operatorname{sen}^2\varphi - 1}{6} \operatorname{sen}^2 1'' .$$

$$Q \;= 10^7 .\, M\, \frac{\rho}{N} \operatorname{sen} 1'' ,$$
$$Q' = 10^7 .\, M \frac{\rho^2}{N^2} \operatorname{sen}^2 1'' \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2\varphi\right] ,$$
$$Q'' = 10^7 .\, \frac{M}{6} \operatorname{sen}^2 1'' .\, \operatorname{sen}^2\varphi .$$

Per calcolare $\log s \cos z$.

φ	log ρ sen 1″	diff.	log P	diff.	log P′	log P″	log P‴
35°00′	1,4887420		1.0242829		8,99677—10	4.45366—10	4,73042—10
		119		80			
10	7539		2749		8,99769	4.45547	4,74520
		119		80			
20	7658		2669		8,99859	4,45724	4,75952
		120		79			
30	7778		2590		8,99948	4,45898	4,77344
		120		80			
40	7898		2510		9,00035	4,46069	4,78694
		120		81			
50	8018		2429		9.00120	4,46237	4,80006
		121		80			
36 00	1,4888139		1,0242349		9,00204	4,46401	4,81284
		121		80			
10	8260		2269		9,00286	4,46562	4,82524
		120		81			
20	8380		2188		9,00367	4,46719	4,83383
		122		81			
30	8502		2107		9,00445	4.46874	4,84910
		121		81			
40	8623		2026		9,00523	4,47025	4.86060
		121		81			
50	8744		1945		9.00598	4,47173	4,87181
		122		81			
37 00	8866		1,0241864		9,00672	4.47318	4,88276
		122		81			
10	8988		1783		9.00745	4,47460	4,89345
		122		82			
20	9110		1701		9,00816	4,47598	4.90393
		123		81			
30	9233		1620		9,00885	4,47734	4,91415
		122		82			
40	9355		1538		9,00953	4,47866	4.92417
		123		82			
50	9478		1456		9.01019	4,47995	4.93397
		123		82			
38 00	1.4889601		1,0241374		9,01084—10	4,48121—10	4,94474—10

Per calcolare $\log s \operatorname{sen} z$.

φ	$\log N \operatorname{sen} 1''$	diff.	$\log Q$	diff.	$\log Q'$	$\log Q''$
35° 00′	1,4906957		1,3214055		5,76734—10	4,74797—10
		39		80		
10	6996		4135		5,76961	4,75156
		40		79		
20	7036		4214		5,77193	4,75514
		40		80		
30	7076		4294		5,77424	4,75869
		40		80		
40	7116		4374		5,77659	4,76222
		40		80		
50	7156		4454		5,77893	4,76573
		40		81		
36 00	1,4907196		1,3214535		5,78129	4,76922
		41		80		
10	7237		4615		5,78366	4,77269
		40		80		
20	7277		4695		5,78604	4,77613
		40		82		
30	7317		4777		5,78843	4,77956
		41		80		
40	7358		4857		5,79084	4,78296
		40		81		
50	7398		4938		5,79326	4,78635
		41		81		
37 00	1,4907439		1,3215019		5,79569	4,78971
		40		82		
10	7479		5101		5,79812	4,79305
		41		81		
20	7520		5182		5,80056	4,79637
		41		82		
30	7561		5264		5,80304	4,79968
		41		81		
40	7602		5345		5,80552	4,80296
		41		82		
50	7643		5427		5,80800	4,80622
		41		82		
38 00	1,4907684		1,3215509		5,81050—10	4,80947—10

Per calcolare $\log s \cos z$.

φ	$\log \rho$ sen 1″	diff.	$\log P$	diff.	$\log P'$	$\log P''$	$\log P'''$
38°00′	1,4889601		1,0241374		9,01084—10	4,48121—10	4,94474—10
		123		82			
10	9724		1292		9,01147	4,48244	4,95297
		123		82			
20	9847		1210		9,01208	4,48363	4,96219
		124		82			
30	9971		1128		9,01268	4,48479	4,97122
		124		83			
40	1,4890095		1045		9,01326	4,48593	4,98008
		123		82			
50	0218		0963		9,01383	4,48704	4,98879
		124		83			
39 00	1,4890342		1,0240880		9,01438	4,48811	4,99733
		124		82			
10	0466		0797		9,01491	4,48915	5,00571
		125		83			
20	0591		0715		9,01544	4,49016	5,01395
		124		83			
30	0715		0632		9,01595	4,49115	5,02204
		125		83			
40	0840		0549		9,01644	4,49210	5,02999
		124		84			
50	0964		0465		9,01692	4,49302	5,03781
		125		83			
40 00	1,4891089		1,0240382		9,01738	4,49391	5,04550
		125		83			
10	1214		0299		9,01783	4,49476	5,05306
		125		83			
20	1339		0216		9,01826	4,49559	5,06050
		125		84			
30	1464		0132		9,01868	4,49639	5,06782
		126		84			
40	1590		0048		9,01908	4,49716	5,07503
		125		83			
50	1715		1,0239965		9,01946	4,49790	5,08212
		126		84			
41 00	1,4891841		1,0239881		9,01983—10	4,49861—10	5,08911—10

Per calcolare log s sen z.

φ	log N sen 1″	diff.	log Q	diff.	log Q'	log Q''
38° 00′	1,4907684		1,3215509		5,81050—10	4,80947—10
		41		82		
10	7725		5591		5,81301	4,81269
		41		82		
20	7766		5673		5,81554	4.81590
		41		83		
30	7807		5756		5,81807	4,81908
		41		83		
40	7848		5839		5,82062	4,82225
		41		82		
50	7889		5921		5.82318	4,82540
		42		82		
39 00	1,4907931		1,3216003		5,82575	4,82853
		41		83		
10	7972		6086		5.82834	4.83164
		42		83		
20	8014		6169		5.83094	4,83473
		41		83		
30	8055		6252		5,83355	4.83780
		42		83		
40	8097		6335		5,83617	4.84086
		41		83		
50	8138		6418		5,83880	4,84390
		42		83		
40 00	1,4908180		1,3216501		5,84145	4,84692
		41		84		
10	8221		6585		5,84410	4.84992
		42		83		
20	8263		6668		5,84678	4,85290
		42		83		
30	8305		6751		5,84946	4.85587
		42		84		
40	8347		6835		5,85216	4,85882
		41		84		
50	8388		6919		5,85486	4.86175
		42		84		
41 00	1,4908430		1,3217003		5.85759—10	4.86467—10

Per calcolare $\log s \cos z$.

φ	$\log \rho$ sen $1''$	diff.	$\log P$	diff.	$\log P'$	$\log P''$	$\log P'''$
41°00′	1,4891841		1,0239881		9,01983—10	4,49861—10	5,08911—10
		125		84			
10	1966		9797		9,02019	4,49929	5,09599
		126		83			
20	2092		9714		9,02053	4,49993	5,10278
		126		84			
30	2218		9630		9,02086	4,50055	5,10945
		126		84			
40	2344		9546		9,02117	4,50114	5,11604
		126		84			
50	2470		9462		9,02146	4,50170	5,12253
		126		84			
42 00	1,4892596		1,0239378		9,02175	4,50223	5,12893
		126		85			
10	2722		9293		9,02201	4,50273	5,13522
		127		84			
20	2849		9209		9,02226	4,50320	5,14146
		126		84			
30	2975		9125		9,02250	4,50364	5,14760
		126		84			
40	3101		9041		9,02272	4,50405	5,15365
		127		85			
50	3228		8956		9,02293	4,50443	5,15963
		126		84			
43 00	1,4893354		1,0238872		9,02312	4,50478	5,16553
		127		84			
10	3481		8788		9,02330	4,50510	5,17135
		127		85			
20	3608		8703		9,02346	4,50540	5,17709
		126		84			
30	3734		8619		9,02361	4,50566	5,18276
		127		85			
40	3861		8534		9,02374	4,50589	5,18837
		127		84			
50	3988		8450		9,02386	4,50610	5,19388
		127		85			
44 00	1,4894115		1,0238365		9,02397—10	4,50627—10	5,19936—10

Per calcolare $\log s \operatorname{sen} z$.

φ	$\log N \operatorname{sen} 1''$	diff.	$\log Q$	diff.	$\log Q'$	$\log Q''$
41° 00′	1,4908430		1,3217003		5.85759—10	4.86467—10
		42		83		
10	8472		7086		5,86032	4,86757
		42		84		
20	8514		7170		5,86307	4,87045
		42		84		
30	8556		7254		5,86583	4,87331
		42		84		
40	8598		7338		5,86860	4,87616
		42		84		
50	8640		7422		5,87138	4,87899
		42		84		
42 00	1,4908682		1,3217506		5,87418	4,88180
		42		84		
10	8724		7590		5,87699	4,88460
		42		85		
20	8766		7675		5,87982	4,88738
		42		84		
30	8808		7759		5,88266	4,89015
		43		84		
40	8851		7843		5,88551	4,89290
		42		84		
50	8893		7927		5,88836	4,89563
		42		84		
43 00	1,4908935		1,3218011		5,89125	4.89835
		42		85		
10	8977		8096		5,89414	4.90105
		42		85		
20	9019		8181		5,89705	4,90374
		42		84		
30	9061		8265		5,89996	4,90641
		43		84		
40	9104		8349		5,90289	4,90906
		42		85		
50	9146		8434		5,90584	4,91170
		42		84		
44 00	1,4909188		1,3218518		5.90880—10	4.91433—10

Per calcolare $\log s \cos z$.

φ	$\log \rho$ sen 1″	diff.	$\log P$	diff.	$\log P'$	$\log P''$	$\log P'''$
44°00′	1,4894115		1,0238365		9.02397—10	4,50627—10	5,19936—10
		126		84			
10	4241		8281		9.02406	4.50641	5,20476
		127		85			
20	4368		8196		9.02413	4.50653	5,21009
		127		84			
30	4495		8112		9.02419	4,50662	5.21535
		127		85			
40	4622		8027		9.02424	4.50667	5.22056
		127		85			
50	4749		7942		9.02427	4.50670	5.22570
		127		84			
45 00	1,4894876		1.0237858		9.02428	4.50670	5.23078
		127		85			
10	5003		7773		9.02428	4.50667	5.23581
		127		84			
20	5130		7689		9.02427	4.50660	5.24077
		127		85			
30	5257		7604		9,02424	4.50651	5.24568
		126		85			
40	5383		7519		9.02420	4.50639	5.25054
		127		84			
50	5510		7435		9.02414	4,50625	5.25534
		127		85			
46 00	1,4895637		1,0237350		9.02407	4.50607	5,26009
		127		84			
10	5764		7266		9.02398	4.50586	5.26478
		127		85			
20	5891		7181		9.02388	4.50562	5.26942
		127		84			
30	6018		7097		9.02376	4.50535	5.27402
		126		85			
40	6144		7012		9.02363	4.50506	5.27856
		127		84			
50	6271		6928		9.02349	4.50473	5,28305
		127		85			
47 00	1,4896398		1,0236843		9.02332—10	4,50438—10	5.28750—10

Per calcolare $\log s \operatorname{sen} z$.

φ	$\log N \operatorname{sen} 1''$	diff.	$\log Q$	diff.	$\log Q'$	$\log Q''$
44° 00′	1,4909188		1,3218518		5,90880—10	4,91433—10
		43		84		
10	9231		8602		5,91177	4,91693
		42		85		
20	9273		8687		5,91475	4,91953
		42		85		
30	9315		8772		5,91776	4,92211
		42		85		
40	9357		8857		5,92077	4,92467
		43		84		
50	9400		8941		5,92380	4,92722
		42		85		
45 00	1,4909442		1,3219026		5,92684	4,92975
		42		85		
10	9484		9111		5,92989	4,93227
		43		84		
20	9527		9195		5,93297	4,93478
		42		85		
30	9569		9280		5,93605	4,93727
		42		84		
40	9611		9364		5,93915	4,93974
		42		85		
50	9653		9449		5,94226	4,94220
		43		84		
46 00	1,4909696		1,3219533		5,94539	4,94465
		42		85		
10	9738		9618		5,94853	4,94708
		42		85		
20	9780		9703		5,95169	4,94950
		43		84		
30	9823		9787		5,95486	4,95191
		42		84		
40	9865		9871		5,95805	4,95430
		42		85		
50	9907		9956		5,96125	4,95667
		42		85		
47 00	1,4909949		1,3220041		5,96446—10	4,95904—10

Sollecitazione prodotta nei pali di una conduttura elettrica per strappamento completo di una tesata.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Il caso più generale di una tesata con estremità a dislivello (fig. 1) si riporta, per tale ricerca, al caso in cui le estremità siano al medesimo livello. Riguardando infatti la funicolare quale un arco parabolico, come si usa sempre fare, dato il piccolo rapporto fra la freccia e la corda, e chiamando q il carico per m. corr. di *proiezione orizzontale,* da potersi riguardare, per

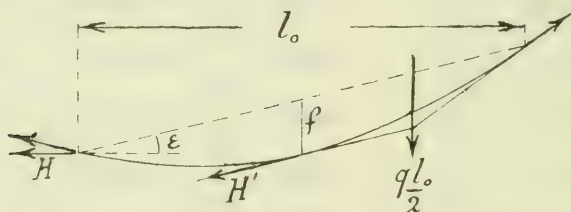



Fig. 1.

lo stesso motivo, come costante, la componente orizzontale H dello sforzo che il filo esercita sul palo, la sola che interessi prendere in considerazione per la stabilità, giacchè l'effetto della componente verticale è trascurabile per il palo, si ricava dall'equazione dei momenti

$$H' f \cos \epsilon = \frac{q\, l^2{}_0}{8}$$

da cui

$$H' \cos \epsilon = H = \frac{q\, l^2{}_0}{8 f} . \tag{1}$$

Fatta l'ipotesi più generale di un palo a sezione variabile e ponendo il momento d'inerzia J della sua sezione trasversale corrente rispetto all'asse di flessione, sotto la forma ϑJ_0, dove J_0 è l'analogo momento d'inerzia per la sezione di base, la freccia d'incurvamento δ (fig. 2) prodotta nel palo da una forza oriz-

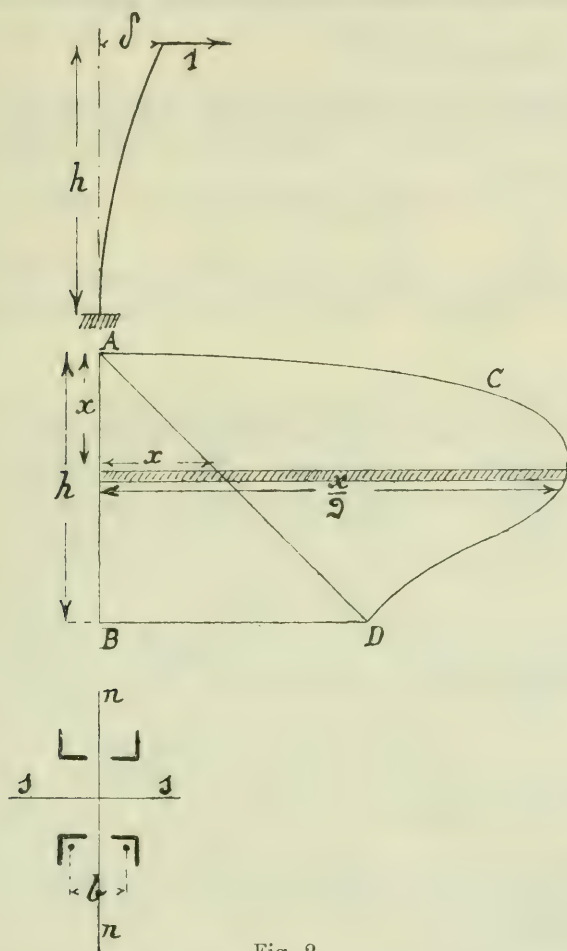



Fig. 2.

zontale unitaria applicata alla sommità, nel piano della conduttura, è data coi soliti simboli da

$$(2) \qquad 1 \, . \, \delta = \int_0^h \frac{M^2 \, dx}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} \int_0^h \frac{x^2}{\vartheta} \, dx = \frac{1}{EJ_0} \int_0^h \frac{x}{\vartheta} \, dx \, . \, x = \frac{\mathfrak{M}}{EJ_0}$$

se con $\mathfrak{M}$ s'indica il momento statico della figura $ACDB$ (*diagramma delle curvature*) rispetto all'orizzonte per A.

Per un palo prismatico si avrebbe $\vartheta = 1$ e quindi $\mathfrak{M} = \frac{h^3}{3}$; per un palo piramidale formato di 4 cantonali, ciascuno di sezione costante F per tutta l'altezza, si avrebbe $J = \sim F b^2 = F b^2_0 \frac{x^2}{h^2}$ e quindi $\mathfrak{M} = h^3$.

La freccia d'incurvamento λ_r (fig. 3) del palo che occupa il posto r^{esimo} dopo uno di quelli della tesata strappata verrà espresso da

$$\lambda_r = \delta_r (H_r - H_{r-1}). \tag{3}$$

La lunghezza s della funicolare della tesata r^{esima}, trascurando l'accorciamento elastico proveniente dalla diminuzione di

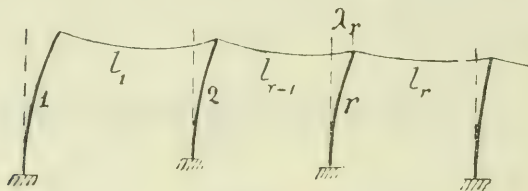



Fig. 3.

tensione, viene espressa, con grande approssimazione, prima e dopo lo strappamento, rispettivamente da

$$s = l_{0r} + \frac{8}{3} \frac{f^2_{0r}}{l_{0r}} = l_r + \frac{8}{3} \frac{f^2_r}{l_r},$$

donde

$$l_{0r} - l_r = \lambda_r - \lambda_{r+1} = \frac{8}{3} \left(\frac{f^2_r}{l_r} - \frac{f^2_{0r}}{l_{0r}} \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{q^2 l^3_r}{64 H^2_r} - \frac{f^2_{0r}}{l_{0r}} \right),$$

e per la (3)

$$\delta_r (H_r - H_{r-1}) - \delta_{r+1} (H_{r+1} - H_r) = \frac{1}{24} \frac{q^2 l^3_r}{H^2_r} - \frac{8}{3} \frac{f^2_{0r}}{l_{0r}},$$

ossia

$$H^3_r (\delta_r + \delta_{r+1}) - H^2_r \left(\delta_r H_{r-1} + \delta_{r+1} H_{r+1} - \frac{8}{3} \frac{f^2_{0r}}{l_{0r}} \right) = \frac{q^2 l^3_r}{24}, \tag{4}$$

nel secondo membro della quale in luogo di l_r si potrà porre con sufficiente approssimazione l_{0r}, cioè la lunghezza orizzontale della tesata prima dello strappamento. Questa relazione lega le tensioni orizzontali della conduttura in tre campate consecutive. Applicandola alle successive coppie di pali, cominciando dalla prima dopo la tesata strappata, per la quale tesata si farà $H_0 = 0$, si ottiene la seguente serie di equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} H^3_1\,(\delta_1 + \delta_2) - H^2_1\left(\delta_2 H_2 - \dfrac{8}{3}\,\dfrac{f^2_{01}}{l_{01}}\right) = \dfrac{q^2\, l^3_1}{24} \\ H^3_2\,(\delta_2 + \delta_3) - H^2_2\left(\delta_2 H_1 + \delta_3 H_3 - \dfrac{8}{3}\,\dfrac{f^2_{02}}{l_{02}}\right) = \dfrac{q^2\, l^3_2}{24} \\ H^3_3\,(\delta_3 + \delta_4) - H^2_3\left(\delta_3 H_2 + \delta_4 H_4 - \dfrac{8}{3}\,\dfrac{f^2_{03}}{l_{03}}\right) = \dfrac{q^2\, l^3_3}{24} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Con qualche tentativo è facile ricavare in ogni caso da queste equazioni valori numerici sufficientemente approssimati per le H. Facendo innanzi tutto nella prima $\delta_2 = 0$, cioè supponendo il secondo palo assolutamente rigido, quest'equazione fornisce il *limite inferiore* del valore di H_1, mentre il *limite superiore* è dato dal valore della tensione orizzontale della tesata l_1 prima dello strappamento. Attribuendo pertanto ad H_1 un primo valore di tentativo compreso fra i detti limiti, si deduce con molta speditezza dalla stessa prima equazione un primo valore di H_2, e quindi dalla seconda un primo valore di H_3 e così di seguito. Un valore scarso, ovvero eccessivo, di H_1 è subito avvertito dai valori delle H successive che confrontate coi valori delle rispettive H prima dello strappamento, risultano o deficienti od eccessive.

Per ogni palo, evidentemente, la sollecitazione di cui trattasi diviene massima quando ad esso faccia capo la tesata strappata, talchè per ogni palo è la H_1 che interessa conoscere. Se la conduttura risulta di tesate e pali eguali, la ricerca resta limitata naturalmente ad un solo palo.

Si noti però che la H_1 così determinata dovrà essere moltiplicata per un *coefficiente dinamico*, per tener conto della natura della sollecitazione; il quale coefficiente se, in grazia

dell'allungamento plastico del materiale, che ne precede lo strappamento, non sarà da prendersi proprio eguale a 2, come dovrebbe farsi per una sollecitazione, sia pure senza urto, ma agente istantaneamente in tutta la sua intensità, dovrà scegliersi tanto più prossimo a tale valore, quanto meno duttile è il materiale dei fili, ossia quanto minore ne è l'allungamento percentuale di rottura.

Esempio. — Conduttura elettrica a 6 fili con tesate di eguale lunghezza $l_0 = $ m. 150 e freccia $f_0 = $ m. 3,75, per modo che $\frac{f_0}{l_0} = \frac{1}{40}$, e pali delle dimensioni indicate nella figura 4. Riteniamo $q = 6^{\text{Kg}}{}_{\text{m}}$ (complessivamente per i sei fili) di guisa che

$$H = \frac{q l^2_0}{8 f} = \frac{0^t,9 \times 150^m}{8 \times 3^m,75} = \text{t. } 4,50$$

$$\frac{8}{3} \frac{f^2_0}{l_0} = \frac{8}{3} \frac{3,75}{150} 375 = \text{cm. } 25,0.$$

Il palo, troncopiramidale, dell'altezza di m. 16,50, è formato con quattro cantonali aventi dimensioni costanti per ciascuno di tre tronchi di altezza m. 5,50 (fig. 4), e precisamente: nel tronco più basso i cantonali hanno le dimensioni $\frac{100 \times 100}{10}$; nel tronco intermedio $\frac{90 \times 90}{9}$, e nel tronco superiore $\frac{80 \times 80}{8}$. Nella stessa fig. 4 vedesi costruita la trasformata della retta analoga alla AD della fig. 2, la quale retta venne presa peraltro, nel caso della figura, inclinata soltanto di $^1/_2$ alla verticale per contenere la trasformata nei limiti del disegno, ciò che porta di conseguenza di moltiplicare per 2 il valore di $\mathfrak{M}$ che così si ricava. Il disegno originale (di cui la fig. 4 è una riduzione fotografica) è stato eseguito nella scala di 1 : 100, ed in esso l'area racchiusa dalla trasformata coll'asse geometrico del palo vale cm² 195, e la distanza del suo baricentro dalla linea d'azione della H è di cm. 7,70, per modo che risulta

$$\mathfrak{M} = 2 \times 195 \times 100^2 \times 770 = 3\,000\,300\,000 \quad (^1)$$

(1) In questo esempio l'area venne valutata con un planimetro polare ed il baricentro venne determinato meccanicamente. Potrebbe anche valutarsi direttamente il momento $\mathfrak{M}$ con apposito integratore, o colle note costruzioni grafiche.

ed osservando che

$$J_0 = 4\,(177 + 19{,}2 \times 40^2) = \text{cm}^4\ 123\ 600 \sim$$

e prendendo $E = 2150\ {}^{t}/_{cm^2}$, si ha:

$$\delta = \frac{3\ 000\ 300\ 000}{2150 \times 123\ 600} = \text{cm.}\ 11{,}3 \sim .$$

Fig. 4.

Ciò premesso, la prima delle (5), facendovi $\delta_2 = 0$, diviene

$$11{,}3\,H^3{}_1 + 25\,H^2{}_1 = 506{,}25$$

da cui

$$H_1 = \text{t.}\ 2{,}95.$$

Il vero valore di H_1 dev'essere dunque compreso fra 2,95 e 4,50. Supponendo $H_1 = 3{,}10$, la prima delle (5) diviene

$$22{,}6 \times 29{,}791 - 9{,}61\,(11{,}3\,H_2 - 25) = 506{,}25$$

da cui

$$H_2 = \text{t.}\ 3{,}75$$

e quindi la 2ª delle (5) diviene

$$22{,}6 \times 52{,}734 - 14{,}06\,(11{,}3 \times 3{,}10 + 11{,}3\, H_3 - 25) = 506{,}25$$

da cui

$$H_3 = 3{,}43.$$

Questo valore di H_3 inferiore ad H_2 indica che il valore supposto per H_1 è troppo scarso.

Prendendo $H_1 = 3{,}20$ si deduce analogamente $H_2 = 4{,}24$, $H_3 = 5{,}00$; questo valore di H_3 maggiore di 4,50 avverte che il valore supposto per H_1 è esagerato.

Facendo finalmente $H_1 = 3{,}15$ si ricava $H_2 = 4{,}00$, $H_3 = 4{,}26$ e, tenuto conto della natura del quesito, è superfluo spingere il calcolo più oltre, potendosi accettare per valore definitivo di H_1

$$H_1 = \text{t. } \mathbf{3{,}15}.$$

Lo sforzo unitario massimo *statico* nelle sezioni del palo a m. 5,50, 11, 16,50 dalla linea d'azione di H_1 ha rispettivamente i valori

$$\sigma' = \frac{3{,}15 \times 550 \times 22{,}3}{20\,000} = 1{,}93$$

$$\sigma' = \frac{3{,}15 \times 1100 \times 32{,}5}{56\,300} = 2{,}00$$

$$\sigma' = \frac{3{,}15 \times 1650 \times 42{,}8}{123\,600} = 1{,}80.$$

In un caso così eccezionale di sollecitazione si può tollerare che lo sforzo unitario massimo raggiunga il limite di elasticità, cosidetto apparente, che per il ferro omogeneo può essere valutato a circa 3 $^{t}/_{cm^2}$; talchè potrebbe ancora aumentare la sollecitazione del 50 %, per l'azione dinamica, senza che venisse compromessa la stabilità.

Torino, luglio 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Dicembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli Direttore della Classe, Manno, Carle, S. E. Ruffini, e Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 26 novembre u. s.

Il Socio Segretario Stampini dà lettura delle numerose condoglianze pervenute da Accademie, Biblioteche, Archivi e altri pubblici Istituti, non che di privati, per la morte di Carlo Cipolla. Legge quindi il telegramma col quale il Socio nazionale non residente S. E. Scialoja ringrazia la Classe per gli auguri inviatigli.

Il Presidente Camerano dà lettura del telegramma col quale, per invito del Ministro della Marina, affinchè la nostra Accademia fosse rappresentata alla inaugurazione dell'Istituto

centrale di biologia marina del Regno in Messina, delegò tale rappresentanza al Socio nazionale non residente Senatore Volterra.

Il Socio Segretario Stampini, dopo avere presentato alla Classe l'opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe Biadego a commemorazione del dotto bibliotecario della Capitolare di Verona Antonio Spagnolo (estr. dagli “ Atti dell'Accademia di agricoltura, scienze e lettere di Verona „), richiama l'attenzione dei Colleghi sui primi cinque volumetti, inviati in omaggio all'Accademia dalla Ditta editrice, del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum moderante Carolo Pascal,* cioè i *Catulli carmina* per cura di Carlo Pascal, la *Germania* di Tacito per cura di Cesare Annibaldi, il *De bello civili* di Cesare per cura di Domenico Bassi, i frammenti *De re publica* di Cicerone per cura di Carlo Pascal e Giovanni Galbiati, e l'*Octavius* di Minucio Felice per cura di Luigi Valmaggi. Messi in rilievo i pregi intrinseci delle cinque pubblicazioni, il Socio Stampini aggiunge ritenersi in dovere di esprimere le più vive congratulazioni alla Ditta G. B. Paravia, la quale, nonostante le gravi difficoltà dell'ora presente, ha coraggiosamente affrontato, e seguiterà ad affrontare, non lievi spese per dotare l'Italia di una commendevole collezione di testi latini criticamente riveduti con criteri propri da filologi di riconosciuta competenza; collezione che, se, come giova sperare, sarà continuata così bene com'è cominciata sotto la strenua direzione del dottissimo professore di letteratura latina della R. Università di Pavia, Carlo Pascal, varrà finalmente a fare scomparire un vuoto da lunga pezza deplorato nel nostro Paese, che per le edizioni di puro testo dei classici latini deve, pur troppo ancora, ricorrere agli stranieri. E poichè la Ditta Paravia dà prova insigne di voler contribuire potentemente al sempre maggiore incremento degli studi latini nelle nostre scuole medie, il Socio Stampini, dopo aver ricordato com'egli abbia avuto occasione di segnalare, prima nella *Rivista di filologia e d'istruzione classica*

e poi, pochi giorni addietro, nella *Gazzetta del Popolo,* l'opportunità di rifare il *Vocabolario universale latino-italiano* di Antonio Bazzarini, pubblicato in Torino dai Cugini Pomba nel 1850, affinchè l'Italia possegga finalmente un suo lessico *scientifico* latino, degno di stare alla pari con l'ottava edizione dello *Ausführliches lateinisch-deutsches Handwörterbuch* di Carlo Ernesto ed Enrico Georges, osserva che la Ditta Paravia renderebbe, dal canto suo, un grande servizio alle scuole classiche medie italiane, se procurasse il rifacimento del lessico *scolastico* compilato dal suo maestro e predecessore nell'Università e nell'Accademia, Tommaso Vallauri, poichè, dati gl'immensi progressi fatti dalla lessicografia latina negli ultimi decenni, il dizionario Vallauriano deve essere, non solo ritoccato, ma accresciuto e interamente rifuso in entrambe le sue parti.

Il Presidente Camerano si associa alle lodi tributate alla Ditta Paravia, della quale va eziandio segnalata la non piccola benemerenza acquistatasi nella produzione di ogni specie di materiale scientifico e dimostrativo per le nostre scuole, elementari, popolari e medie, secondando così gl'intendimenti e le istruzioni del Governo nella sostituzione, per tale riguardo, dell'opera delle nostre Case a quella delle Case straniere, dalle quali sinora eravamo quasi del tutto dipendenti.

Il Socio Vidari elogia del pari la Ditta Paravia per la sua collezione — rappresentata oramai da non pochi volumi — dei classici della pedagogia italiana, e nota che, avendo l'Italia magnifiche tradizioni pedagogiche, è opera altamente meritoria e patriottica metterle in evidenza con una speciale collezione che degnamente le faccia apprezzare dagli studiosi italiani.

Il Vicepresidente Chironi, lieto di constatare come l'Accademia riconosca, con sì concorde consenso, le grandi benemerenze della Ditta Paravia, persuaso che questa, incoraggiata dall'autorevole approvazione del nostro consesso, raddoppierà la sua alacrità a tutto vantaggio dei buoni studi e a decoro

dell'Italia, propone che la Classe accordi con un voto di plauso il suo patrocinio morale alla Ditta Paravia. La proposta del Vicepresidente Chironi è approvata alla unanimità.

Il Socio Einaudi, anche a nome del Socio Prato, presenta una prima *Nota* del Dott. Attilio Garino-Canina, intitolata *Intorno al concetto di industria naturale nella letteratura economica*, della quale rileva l'utilità e l'importanza. Sarà pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

Intorno al concetto di industria naturale nella letteratura economica.

Nota I di ATTILIO GARINO-CANINA.

SOMMARIO

I.

È stata più volte lamentata l'incertezza della terminologia in economia politica — incertezza del Bagehot (1) attribuita al fatto che i termini adoperati sono tolti in gran parte dalla vita comune e perciò attinti ad una fonte non esatta —. Non parrà

(1) Cfr. Bagehot, *Economic studies*, pag. 64.

quindi inopportuno precisare innanzi tutto il significato che può assumere la parola " naturale ", trattandosi di industrie, per poter così meglio porre i termini del problema, che mi propongo di prendere in esame.

La parola " naturale " in particolar modo si è prestata in economia ad interpretazioni assai varie: anche Adamo Smith diede un significato vago al termine " naturale ", associando al concetto di " ciò che è naturalmente " o di " ciò che sarebbe, senza l'intervento dell'azione umana ", l'idea di " quel che dovrebbe essere " o di " quel che si vuole dalla benevolente Provvidenza " (1). Ne derivò una certa ambiguità nel senso di questa parola, ambiguità che troviamo pure in Ricardo ed in altri classici, e che non di rado appare anche dagli scritti degli economisti posteriori. Ma, senza esaminare i varî significati che la parola " naturale " può assumere, ci proponiamo piuttosto di considerare lo svolgersi del concetto di " industria naturale ad un paese ", nella letteratura economica, limitandoci però all'esame di questo concetto soltanto presso gli autori che si sono particolarmente occupati dell'argomento senza estendere le indagini a tutta la letteratura economica in generale — il che ci indurrebbe a superare i limiti che ci siamo proposti.

Per industria naturale ad un paese si intende comunemente un'industria ad esso adatta, cioè conveniente da un punto di vista economico. Il problema che ci proponiamo si può adunque porre nei termini seguenti: come si è sviluppato il concetto di industria naturale, ossia di industria adatta ad una nazione da un punto di vista economico?

Occorre innanzi tutto distinguere il concetto di " naturalità " in senso statico da quello in senso dinamico, considerando cioè il concetto di industria che è economicamente conveniente ad un paese in un dato momento ed il concetto di industria che non è ancora adatta alla nazione, ma che si ritiene diventi più tardi naturale.

La concezione statica di naturalità si basa sulla convenienza economica presente dell'industria; la concezione dinamica è fondata sulla convenienza attuale e futura, di guisa che le

(1) Cfr. Sidgwick, *The principles of political economy*, pag. 19.

perdite sofferte dalla società nel periodo in cui una produzione non è ancora economicamente conveniente sono valutate insieme con i vantaggi economici che le potranno venire in futuro da questa stessa produzione, quando essa si sarà sviluppata e potrà prosperare naturalmente.

A questa distinzione tra naturalità statica e naturalità dinamica corrispondono infatti due diverse concezioni di industria naturale: 1° il concetto di industria che si basa su materie prime nazionali e sulle favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente; 2° il concetto di industria che è o che può diventare adatta alle varie condizioni fisiche, morali, intellettuali e sociali del paese.

Sebbene il concetto di industria naturale che si basa essenzialmente su materie prime (cioè materie greggie e combustibili) nazionali e sulle favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente appaia di rado negli scritti degli economisti, ne facciamo qui cenno anche perchè esso venne a torto attribuito ai classici.

Tra le ingiuste critiche fatte all'economia classica ricordiamo quella del Rae, il quale scriveva: " Gli economisti parlano di prodotti di varî paesi (come ne parla Virgilio) come distribuiti dalla natura e perciò dichiarati naturali produzioni. Quindi il tentativo di traslocarli da un luogo all'altro è ritenuto come un atto contrario ai disegni della Provvidenza, le cui intenzioni, si assevera, nel dare agli uomini queste produzioni furono quelle di obbligare gli abitanti dei diversi paesi a scambiare a vicenda i diversi prodotti dei loro territori " (1).

Il Patten parla di produzioni " naturali ", nel senso di produzioni che si fondano su materiali grezzi del luogo in cui esse si sviluppano e dove la natura in genere offre vantaggi di energie e di agenti naturali, in contrapposizione alla produzione ottenuta in condizioni " artificiali " — nelle quali cioè agli svantaggi naturali si rimedia con una maggiore efficacia del lavoro incivilito ed un maggior impiego di capitale (2).

---

(1) Cfr. RAE, *Dimostrazioni di taluni nuovi principî dell'economia politica*, nella " Biblioteca dell'Economista ", serie I^a^, vol. XI, pag. 828.

(2) Cfr. PATTEN, *La base economica del protezionismo*, nella " Biblioteea dell'Economista ", serie IV, vol 1°, parte 2^a^, pag. 492.

Anche Filippo Carli considera una simile interpretazione di naturalità dell'industria, secondo la quale alcuni degli economisti classici — egli sostiene — avrebbero ritenuto come naturali soltanto quelle industrie che si possono basare sopra materie prime nazionali, o sopra favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente (1). Secondo una siffatta interpretazione, si avrebbe una concezione statica di industria naturale, la quale presupporrebbe anche una concezione prevalentemente statica di produzione industriale ed il concetto di una distribuzione delle varie produzioni determinata quasi irrevocabilmente dalla natura. Infatti l'azione dei perfezionamenti nella tecnica, delle invenzioni, dei molteplici fattori intellettuali e morali del progresso economico si riduce a ben poca cosa se questi debbono essere subordinati alla condizione dell'esistenza delle materie prime nazionali o della favorevole situazione naturale dell'ambiente.

La concezione invece secondo la quale si considera come naturale quell'industria che è o che può diventare adatta alle varie condizioni fisiche, morali, intellettuali, sociali del paese, presuppone evidentemente anche una concezione dinamica di produzione, poichè se è naturale un'industria adatta alle condizioni non soltanto fisiche, ma anche intellettuali, morali, sociali del paese, si deve ammettere una larga influenza ai fattori non fisici del progresso economico. Resta quindi escluso il concetto di una distribuzione delle varie produzioni determinata soltanto dalla natura in modo irrevocabile, ma si deve ammettere piuttosto la possibilità di una trasformazione e di una naturalizzazione di molte e svariate produzioni. Ma le diverse modalità del concetto di naturalità appariranno più evidenti esaminando il graduale formarsi del concetto di industria naturale nella scienza economica.

II.

1. — Il concetto di industria naturale fondata su materie prime nazionali e dipendente prevalentemente dalle condizioni

(1) Cfr. F. Carli, *Produzioni naturali e produzioni nazionali*, in " Rivista delle Società commerciali ", luglio 1914.

fisiche dell'ambiente è stato a torto attribuito, come già si disse, agli economisti classici, i quali avrebbero avuta così una concezione prevalentemente statica di produzione. Quale concetto invece essi abbiano avuto di naturalità dell'industria sarà meglio chiarito più innanzi quando ne avremo esaminato il pensiero.

Vediamo ora il concetto di industria naturale che prevalse presso gli economisti italiani del secolo XVIII, nelle opere dei quali si presenta con una certa insistenza il problema dell'importanza che hanno le materie prime e le condizioni fisiche dell'ambiente nella produzione. In alcuni di essi, e posteriormente poi anche nel Gioja, questo problema si prospetta sovente come degno di speciale considerazione, per quanto però essi non ritengano soltanto naturali quelle industrie che si fondano su materie prime prodotte dal suolo nazionale, nè diano al fattore fisico un'importanza prevalente nella produzione.

La concezione dinamica di produzione che troviamo in essi contrasta infatti con il concetto statico di industria naturale fondata su materie prime nazionali o sopra le favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente.

Ora, questa concezione dinamica di produzione ci appare sin dall'opera di uno dei più antichi economisti italiani, del cosentino Antonio Serra, e subisce un'ulteriore evoluzione negli autori del secolo XVIII. Nel " Breve trattato delle cause che possono far abbondare i regni d'oro e d'argento ", scritto sin dal 1613 — dove non soltanto sono svolti i principî fondamentali del corso dei cambi, ma sono pure studiati i fattori principali della prosperità delle nazioni — il Serra distingue, tra le cause che possono far abbondare i regni d'oro e d'argento, quelle naturali, come le miniere d'oro e d'argento, e quelle accidentali, cioè dipendenti dal commercio. Nelle cause naturali il Serra fa un'ulteriore distinzione tra gli " accidenti " proprî e gli " accidenti " comuni, a seconda che si tratti delle cause proprie di alcuni paesi soltanto, o di cause comuni a tutti i paesi. Gli " accidenti proprî " che possono far abbondare un regno d'oro e d'argento sono specialmente due: la " sovrabbondanza delle robe " che nel regno nascono e possono quindi venire esportate ed in compenso delle quali si avranno oro ed argento; ed il " sito ", rispettivamente ad altri regni e ad altre

parti del mondo; il quale sito " può essere occasione potente e quasi causa del traffico grande di un regno, così - rispettivamente ad altre parti del mondo come a sè medesimo, e perciò causa anch'esso dell'abbondanza dell'oro e dell'argento „ (1).

Si vede adunque che il Serra, anche tra le cause naturali della prosperità di un paese, considera di preferenza la situazione propizia del paese stesso più che non i prodotti del suolo e le materie prime nazionali. Egli attribuisce inoltre una grande importanza a quelle cause che non hanno il loro fondamento nella natura, ma che sono piuttosto costituite dalle qualità e dalle attitudini dai popoli acquistate; dal che si può dedurre come egli concepisse la progressività del benessere economico di un paese quale effetto di cause che non hanno le loro radici nel suolo stesso e non sono perciò fisse ed immutabili, ma come avesse piuttosto una concezione dinamica di produzione. Gli " accidenti comuni „ si dividono infatti, secondo il nostro autore, in quattro specie: " quantità di artificî, qualità di gente, traffico grande di negozi e provvisione di quel che governa „. Agli " artificî „, cioè all'opera degli artefici basata sulla abilità del lavoro, l'autore dà grande importanza, maggiore ancora che non alla sovrabbondanza della produzione naturale, come causa del progresso di un popolo. L' " accidente „ della qualità della gente " tiene il primo posto in fare abbondare la città od il regno di moneta in particolare più che in universale „ (2); e siccome il Serra per far abbondare la moneta vuole favorire l'esportazione dei prodotti, se ne deduce che egli considerasse il lavoro, l'abilità, le doti morali ed intellettuali umane come fattori importantissimi della produzione. Abbiamo quindi il concetto di progressività del benessere economico dovuto non soltanto al fattore naturale del suolo e della situazione del paese, ma anche a fattori morali ed intellettuali, cioè alle qualità morali della popolazione, all'indole ed all'efficienza del lavoro, all'arte di chi governa.

---

(1) Cfr. Serra, *Breve trattato delle cause che possono far abbondare i regni d'oro e d'argento*, " Biblioteca dell'Economista „ (Custodi: parte antica), vol. 1°, pag. 22 e seg.

(2) Id., op. cit., pag. 27.

Anche se il Serra non si occupa in modo speciale delle industrie naturali, pure dallo spirito dell'opera sua possiamo dedurre una concezione dinamica di produzione necessariamente in contraddizione con il concetto di industria naturale fondata unicamente su materie prime prodotte dal suolo del paese stesso su cui sorge l'industria, o dipendente prevalentemente dalle condizioni fisiche dell'ambiente.

La concezione dinamica di produzione subisce un'ulteriore evoluzione nel pensiero del Genovesi, le cui idee sono però affini, sotto un certo aspetto, a quelle del Serra. Il Genovesi nel suo studio sui mezzi atti ad incoraggiare le industrie, oltre ad esporre la teoria mercantilista che era in voga a quei tempi, mette in luce relativamente alle cause del progresso economico altre sue idee particolari, le quali — come del resto tutta l'opera sua — ricordano ancora in lui il professore di metafisica ed il teologo, e ci dimostrano la sua concezione della progressività dell'industria fondata su fattori morali oltre che materiali. " La prima molla motrice dell'arte, dell'opulenza, della felicità di ogni nazione — egli dice — è il buon costume e la virtù ". Tra " i mezzi più particolari di avvalorare ed incoraggiare l'industria " il Genovesi considera anche l'azione del legislatore; ma specialmente considera " l'onore " e " il premio " — " le due grandi vette produttrici e perfezionatrici delle arti e delle scienze tutte quante " (1).

Dalla speciale importanza che il Genovesi attribuisce alle cause di carattere morale ed intellettuale — buon costume, virtù, onore e premio — come coefficienti del progresso economico del paese, appare evidente la concezione dinamica di produzione, la quale esclude il concetto di industria naturale fondata esclusivamente su materie prime nazionali o su favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente, ed ammette invece che le varie produzioni possano evolversi e diventare quindi naturali. Ma il pensiero del Genovesi circa il problema della naturalità delle industrie ci è meglio chiarito dal concetto di convenienza economica futura, non soltanto implicito nella sua concezione dinamica di produ-

(1) Cfr. A. Genovesi, *Lezioni di economia civile*, in " Biblioteca dell'Economista " (Custodi; parte moderna), vol. VII, pag. 349 e seg.

zione, ma anche da lui espresso trattando di politica commerciale. Fautore convinto del protezionismo, credette che anche per mezzo di premi di esportazione si potessero incoraggiare le varie produzioni, rendendo quindi naturali quelle che non lo erano ed agevolando così il passaggio da un'industria all'altra. Il concetto di naturalità dell'industria era perciò dinamico nel Genovesi, in quanto esso si fondava non solo sulla convenienza attuale, ma anche su quella futura.

Attenendosi alle idee prevalenti del suo tempo, egli diede speciale importanza alle materie prime nazionali e raccomandò di " proibire l'estrazione di quelle materie prime che si possono lavorare nel paese „ (1), sia per rinvigorire le manifatture, sia anche per evitare di spedire grosse somme di denaro all'estero. Da questo principio non dobbiamo indurre però nel Genovesi il concetto della convenienza di sviluppare soltanto le industrie fondate su materie prime nazionali, se consideriamo invece che egli annovera altrove i prodotti e le materie prime da importarsi dallo Stato per lo sviluppo delle industrie, e tra di essi dà importanza a quelli specialmente che non si possono produrre nel paese stesso (2). " Che dove a noi manca qualche specie di manifattura per mancanza di materie prime, si debba sempre preferire — egli consiglia — l'introduzione delle materie ancora rozze a quella delle manifatture, purchè queste si possano agevolmente fare „ (3). Il Genovesi considerava adunque come naturali in genere quelle produzioni che sono adatte alle varie condizioni dell'ambiente, dando però la preferenza a quelle che elaborano materie prime nazionali.

Le idee del Beccaria in fatto di naturalità dell'industria hanno una certa affinità con quelle del Genovesi. Troviamo anche in questo autore la stessa propensione per le industrie che lavorano materie prime nazionali, benchè non siano queste le sole da lui considerate come naturali al paese. Anzi, il Beccaria vuole libera l'importazione delle materie prime estere, nè crede sia da temere la concorrenza forestiera, pur essen-

---

(1) A. Genovesi, op. cit., vol. VIII, pag. 32.
(2) Id., op. cit., pag. 258 e seg.
(3) Id., op. cit., pag. 141.

dosi in altri casi mostrato favorevole al protezionismo e propenso ad incoraggiare l'industria con dazi e con premi d'esportazione.

Negli " Elementi di Economia pubblica „ egli distingue le arti in " arti di materie prime che si producono nel paese „ e arti di " materie prime mandateci dai forestieri „, e sostiene doversi preferire quelle che hanno le materie prime nel paese, senza però affermare che esse siano le sole naturali. Anzi, aggiunge che sarebbe dannoso di volere, forzando la natura delle cose, stabilire fra noi quelle industrie di cui le materie prime sono lontanissime e di trasporto difficile e dispendioso (1).

Il Beccaria ammette che si possano sviluppare anche delle industrie importando le materie prime dall'estero: " Per una contraria ragione dovrassi dare ogni facilità all'introduzione delle materie prime forestiere, le quali lavorate nello Stato, escono totalmente di nuovo e ci rimborsano del valore della materia prima comperata, e vi guadagniamo di più la mano d'opera; o se non ritornano ad uscire totalmente, ma parte si fermi nella nazione, avremo sempre risparmiata la mano d'opera forestiera „ (2).

Che il Beccaria non avesse una concezione statica di produzione, appare anche dal fatto che egli considerava come essenziali in ogni arte o manifattura: " la materia prima ond'ella è composta e l'opera di chi vi travaglia „ (3) ed attribuiva una grandissima importanza alla scienza ed alle invenzioni come coefficienti validissimi del progresso dell'industria (4). Non è quindi soltanto il fattore naturale della materia prima e dell'ambiente fisico quello che fa prosperare l'industria; ma hanno una grande importanza nella produzione altri elementi — quali l'efficienza del lavoro, la capacità, le invenzioni — che non sono fissi ed immutabili, ma implicano una concezione dinamica di

(1) Cfr. Beccaria, *Elementi di economia pubblica*, nella " Biblioteca dell'Economista „ (Custodi; parte moderna), vol. XI, pag. 265.

(2) Id., op. cit., pag. 300.

(3) Id., op. cit., pag. 276.

(4) Id., op. cit., pag. 308.

produzione, e quindi anche di naturalità dell'industria. Del resto anche il concetto di distribuzione topografica dell'industria che ha il Beccaria esclude la concezione statica di industria naturale fondata esclusivamente su materie prime nazionali. Egli crede più favorevole la situazione dell'industria nelle campagne, " vicino alle strade maestre solide e spedite, ai fiumi ed ai laghi dove le acque ed i trasporti rendono minori le spese di cui è gravato il manifattore „ (1) e non ritiene quindi condizione indispensabile che le industrie si stabiliscano sempre nella prossimità delle materie prime.

Il concetto di naturalità dell'industria si evolve nel pensiero del Filangieri, il quale considera come naturali quelle produzioni che sono adatte alle varie condizioni dell'ambiente ed assegna ai fattori morali ed intellettuali del progresso economico una vasta funzione esplicantesi sotto un regime di libertà commerciale.

Il Filangieri ritiene che tutte le nazioni posseggano qualità proprie, con cui la Provvidenza pare abbia voluto unirle tra di loro vincolandone gli interessi. Ogni paese deve favorire quel genere di produzione che è meglio adatto alle condizioni dell'ambiente, e non deve cercare di togliersi dalla dipendenza di un'altra nazione, introducendo industrie e colture che non trovino condizioni proprie. " Se questo dono [cioè la specialità della produzione] è in qualche prodotto del suolo, egli [il legislatore] deve animarne la coltura; se c'è una qualche specie di manifattura che pel concorso di molte circostanze favorevoli, come del clima, della posizione, della natura delle acque, ecc., non si potrebbe intraprendere altrove, egli deve questa promuovere più di tutte le altre. Egli non deve al contrario cercare di togliersi dalla dipendenza di un'altra nazione, violentando il suo suolo o l'industria de' suoi cittadini coll'introduzione di quelle piante esotiche che resterebbero sempre straniere, sempre imperfette nel suo paese „ (2). Il Filangieri attribuisce importanza al fattore fisico nella produzione, ma considera anche quelli morali ed

---

(1) Beccaria, op. cit., pag. 319.

(2) Cfr. Filangieri, *Delle leggi politiche ed economiche*, " Biblioteca dell'Economista „ (Custodi), vol. 32, pag. 214.

intellettuali. Egli ritiene infatti che, con incoraggiamenti, distinzioni onorevoli, premi, e specialmente col “ comprimere la sola molla dell'onore „ si possano far progredire notevolmente le industrie, le quali non sarebbero quindi strettamente legate alle condizioni fisiche ed immutabili dell'ambiente, ma sarebbero anche suscettibili di progresso per l'influenza di fattori morali e spirituali. La qual cosa però non toglie che egli, per favorire l'agricoltura, preferisca che si promuovano quelle industrie le quali elaborano materie prime prodotte dal suolo nazionale. “ Il primo oggetto adunque della legislazione economica è di combinare i progressi delle arti e delle manifatture con quelli dell'agricoltura. Per ottenere questo fine il legislatore deve promuovere più di ogni altra quelle arti e quelle manifatture che impiegano una maggior quantità di quelle materie prime che sono i prodotti del suolo nazionale „, mentre invece quando un paese non può produrre le materie prime che deve elaborare, deve preferire quelle “ manifatture che impiegano una minor quantità di materie prime „ (1).

Sebbene anche il Filangieri, in omaggio ai principi allora prevalenti, ritenesse preferibili quelle industrie per le quali si impiegano materie prime del paese, pure dall'insieme dell'opera sua appare evidente la sua opinione fondamentale che sono industrie naturali ad un paese quelle le quali vi si sviluppano spontaneamente e rispondono alle condizioni varie di ambiente che il paese offre loro.

Il concetto dinamico di produzione si associa a quello di libertà commerciale. Nemico delle restrizioni del traffico, prevalenti all'epoca sua, il Filangieri combattè strenuamente i dazi, che pose “ alla testa degli ostacoli che si oppongono al progresso del commercio „ (2). Egli voleva che le industrie fossero lasciate libere di svilupparsi dove spontaneamente trovassero ambiente favorevole, ed ammetteva che certe produzioni potessero diventare naturali sotto l'influenza di fattori morali ed intellettuali evolventisi in regime di libertà economica.

Un'ulteriore evoluzione al concetto dinamico di produzione

(1) Filangieri, op. cit., pag. 208.
(2) Id., op. cit., pag. 256.

troviamo nell'opera di Melchiorre Gioja, del quale alcune teorie sono affini a quelle degli economisti italiani del secolo XVIII già considerati e ad esse logicamente, se non cronologicamente, collegate.

Molte delle sue teorie sono affini a quelle degli economisti italiani del secolo precedente già considerati. Egli si occupò del problema della naturalità dell'industria nel " Nuovo Prospetto delle Scienze Economiche „, e specialmente nel saggio " Sulle Manifatture Nazionali e Tariffe Daziarie „.

Nonostante la sua propensione verso il protezionismo — del quale volle dimostrare l'utilità non soltanto per ragioni fiscali, per combattere la mania di merci estere e per sopperire ai danni derivanti dalla scarsezza di capitali nazionali, ma anche per il concetto di protezione verso le giovani industrie, poichè, secondo il suo pensiero, " nessuno stabilimento novizio può lottare cogli stabilimenti già adulti, nessuna merce di cui è poco esteso lo spaccio può stare in concorrenza con una merce simile che si vende sui mercati di più nazioni „ (1) — il Gioja non riteneva che l'industria dovesse elaborare tutti e soltanto i prodotti nazionali. " Invece adunque di dire: si debbono fabbricare in casa tutti i generi per cui si ha la materia in casa, fa d'uopo dire: si debbono fabbricare in casa tutti i generi la di cui fabbrica frutta più vantaggio che la compra. Esposta così la cosa, si intende che la fabbrica nazionale: I) nè a tutte le materie casalinghe si debba estendere; II) nè ad esse sole debbasi restringere „ (2). Del resto, che il Gioja non considerasse naturali soltanto quelle industrie che elaborano materie prime nazionali è dimostrato dalla concezione dinamica che egli aveva di produzione, la quale, anche secondo il suo pensiero, non dipende soltanto da fattori fisici, ma anche e specialmente da fattori di altra indole, quali le invenzioni, il progresso nella tecnica, l'associazione e la divisione del lavoro, e l'azione governativa (3).

---

(1) Cfr. M. Gioja, *Nuovo prospetto delle scienze economiche*, vol. V, prima serie, pag. 177.

(2) Cfr. M. Gioja, *Sulle manifatture nazionali e tariffe daziarie*, pag. 172.

(3) Cfr. M. Gioja, *Nuovo prospetto delle scienze economiche*, vol. I, prima serie.

Anche il suo concetto di distribuzione territoriale delle industrie ci porta alla stessa conclusione. Il Gioja non considerava indispensabile la vicinanza delle materie prime perchè un'industria si sviluppasse spontaneamente. " La vicinanza della manifattura al luogo della materia prima è vantaggiosissima per tutte le arti i cui prodotti sono a basso prezzo ed in cui la mano d'opera è poca cosa „. " Ma a misura che cresce il prezzo della mano d'opera, scema il vantaggio della località „ (1).

Resta adunque escluso nel Gioja, come già abbiamo osservato, il concetto di industria naturale che si basi essenzialmente su materie prime nazionali e sulle propizie condizioni fisiche dell'ambiente.

Il concetto di convenienza futura si evolve nel pensiero del Gioja, il quale, considerando il problema della protezione delle giovani industrie, rivela chiaramente la sua concezione dinamica di produzione e di naturalità, poichè egli ritiene come adatte al paese non soltanto quelle industrie che ad esso sono già naturali, ma anche quelle che tali possono diventare coll'aiuto dei dazi od in genere per effetto dei progressi tecnici e del contributo della scienza. Questa concezione dinamica di naturalità aveva già avuta una ulteriore evoluzione per opera degli economisti classici anche prima del Gioja. Abbiamo tuttavia voluto parlare di questo autore prima di esaminare il pensiero dei classici a lui anteriori, per una certa affinità di idee che Melchiorre Gioja presenta con gli autori italiani del sec. XVIII già considerati.

Negli economisti di cui abbiamo sinora esaminato il pensiero vediamo non solo un'affinità di concetto dinamico di produzione, per l'importanza attribuita ai fattori extrafisici di essa: all'efficenza del lavoro, all'indole della popolazione, alle invenzioni ed al contributo della scienza; ma in essi si nota pure, attraverso questa concezione dinamica di produzione, una speciale propensione per le industrie che elaborano materie prime nazionali — sebbene essi non le considerino come le sole naturali.

(1) M. Gioja, op. cit., vol. II, seconda parte, pag. 110 e seg.

Mentre il concetto di industria naturale non è ancora ben determinato negli economisti italiani del sec. XVIII, appare invece più definito e costante nei classici, i quali ritengono come naturali tutte le industrie che si sviluppano spontaneamente e sono adatte alle varie condizioni fisiche, morali, intellettuali e sociali del paese, e la cui naturalità si fonda non soltanto sulla convenienza presente, ma anche su quella futura.

2. — Un concetto di naturalità dell'industria affine sotto certi aspetti a quello dei classici ebbero i fisiocrati, perchè essi pure ritennero che il progresso economico fosse essenzialmente dipendente dalla libertà di commercio e dalla libera concorrenza, per opera delle quali si dovevano svolgere i perfezionamenti nella produzione capaci di rendere naturali industrie dapprima non adatte al paese. I fisiocrati però davano un diverso fondamento al loro liberismo, in quanto per essi l'argomento principale era costituito dal concetto giuridico del diritto naturale di ogni uomo di scambiare il proprio prodotto, mentre Smith e gli altri classici propugnavano la libertà commerciale per considerazioni di utilità economica.

Ritenevano i fisiocrati che “ le fabbriche ed il commercio non potevano fiorire se non per la libertà e per la concorrenza, che conducono a speculazioni ragionevoli, prevengono monopoli, restringono a vantaggio del commercio i guadagni particolari dei commercianti, aguzzano l'industria, semplificano le macchine, diminuiscono le spese onerose di trasporto e fanno ribassare l'interesse del denaro „ (1). Il concetto dinamico di produzione era pertanto nei fisiocrati associato all'idea di libertà di commercio, che essi ritenevano il miglior mezzo per favorire lo sviluppo delle industrie. A queste sarà utile anche la libera importazione delle materie prime estere, come l'abolizione di qualsiasi restrizione; poichè la produzione mondiale si considerava come un fondo comune da ripartirsi tra i vari paesi per mezzo degli scambi. “ L'intenzione manifesta della Provvidenza

(1) Cfr. Dupont de Nemours, *Notizie sugli economisti*, “ Biblioteca dell'Economista, serie prima, vol. I, pag. 434.

favorendo alternativamente le diverse contrade coll'abbondanza — scriveva Le Trosne — è stata che l'eccedente delle une supplisse a vicenda a quello che manca alle altre. La riproduzione generale deve adunque essere riguardata come un fondo comune che debba dividersi tra esse per mezzo del commercio „ (1). Il principio fondamentale della dottrina fisiocratica, però, secondo il quale si considerava la terra come unica sorgente della ricchezza sociale, fece ritenere talora preferibile che le manifatture producessero quelle merci per le quali avevano le materie prime. In questo senso il Quesnay scriveva: " Non si deve dedicarsi se non alle manifatture di quelle mercanzie di mano d'opera delle quali si abbiano le materie prime, e che si possano fabbricare con spesa minore che negli altri paesi „ (2). L'importanza dell'elemento " natura „ era tale che il Baudeau diceva produzioni naturali soltanto " quelle disposte per le loro qualità fisiche a diventare o sussistenza degli esseri viventi o le materie prime dei lavori di durata „ (3), mentre l'industria non era compresa tra esse, secondo il suo pensiero, ed era destinata ad elaborare e trasformare le produzioni naturali. Il concetto dominante però della scuola fisiocratica, la quale credeva che l'azione libera della natura e l'assenza dell'intervento statale nella vita economica e sociale rappresentassero l'ideale della società, e che la libertà economica e la concorrenza dovessero regnare sovrane, implicitamente ammetteva che industria naturale ad un paese fosse quella che in esso si sviluppava spontaneamente in seguito alla libertà di commercio.

3. — Il concetto di naturalità dell'industria assunse, come si disse, presso i classici un grado ulteriore di evoluzione. In Adamo Smith vediamo ben definita ed ampiamente svolta l'idea che ogni paese debba dedicarsi a quelle produzioni che meglio

(1) Cfr. Le Trosne, *Dell'interesse sociale*, " Biblioteca dell'Economista „, serie prima, vol. I, pag. 733.

(2) Cfr. Quesnay, *Massime di Governo*, " Biblioteca dell'Economista „, serie prima, vol. I, pag. 38.

(3) Baudeau, *Introduzione alla filosofia economica*, " Biblioteca dell'Economista „, serie prima, vol. I, pag. 518 e seg.

sono adatte alle condizioni varie dell'ambiente, non solo fisiche, ma anche morali, intellettuali e sociali. Questo concetto già era apparso manifesto verso la metà del secolo XVIII, negli scritti di uno dei più notevoli fra i precursori immediati della scienza economica classica: negli scritti di David Hume, il quale esercitò non poca influenza anche sull'opera dello Smith. Fautore della libertà degli scambi, che egli considerava fondata sulla diversità di produzione, derivante da " diversità di genî, di climi, di suolo delle diverse nazioni „ (1), ebbe un concetto dinamico di produzione, ed ammise esplicitamente che anche sulle materie prime non nazionali potessero fondarsi le industrie proprie del paese. Ma il concetto di naturalità delle industrie meglio si delinea in Adamo Smith, il quale dà una base scientifica al principio che le varie produzioni debbono essere lasciate libere di svilupparsi spontaneamente, senza restrizioni, benchè egli ammetta in certi casi l'intervento statale e non creda alla possibilità di una immediata ed universale applicazione della libertà commerciale ed industriale.

" Ogni sistema il quale cerchi con incoraggiamenti straordinari di attirare verso un determinato genere di industria una parte del capitale della società maggiore di quello che vi affluirebbe naturalmente; oppure con restrizioni straordinarie cerchi di allontanare da un determinato genere di industria qualche parte di capitale che altrimenti sarebbe in esso stata impiegata, sovverte nella realtà il grande scopo che esso mira a promuovere „ (2). Ogni nazione deve quindi preferire di impiegare il suo capitale in quelle produzioni che trovano nel paese spontaneamente più propizie condizioni; come pure deve lasciare che il lavoro si distribuisca secondo la maggiore convenienza economica. E questa naturale distribuzione delle varie produzioni non deve essere preferita soltanto entro i confini del proprio paese, bensì anche nei rapporti tra le varie nazioni. " Se un paese straniero può provvederci di una mercanzia a miglior

(1) Cfr. David Hume, *Political and economic essays*, parte III, saggio VI, vol. I, pag. 346. " La natura col dare una diversità di genii, di climi, di suolo alle diverse nazioni, ha assicurato il loro mutuo scambio e commercio finchè esse sono tutte industriose e civili „.

(2) Cfr. A. Smith, *Wealth of nations*, libro IV, capitolo IX.

prezzo che noi non possiamo fare, meglio è comprarla da quello con qualche parte del prodotto della nostra propria industria, impiegata in un modo in cui noi ne abbiamo qualche vantaggio „ (1).

Lo spirito di tutta l'opera di Adamo Smith ci rivela il concetto che sono industrie naturali ad un paese quelle che si sviluppano spontaneamente e rispondono non solo alle sue condizioni naturali ma anche a quelle intellettuali, morali e sociali. Non è quindi necessario perchè un'industria sia naturale, che essa si basi su materie prime prodotte nella località o nel paese. In un passo del capitolo III, del Libro III, egli dice infatti: " Gli abitanti di una città situata vicino sia alla costa del mare, sia alla sponda di un fiume navigabile non sono necessariamente obbligati a trarre [le materie ed i mezzi necessari per le loro industrie] dalla vicina campagna. Essi hanno un ben più largo campo e possono trarli dai più remoti angoli del mondo, sia in cambio dei manufatti prodotti dalla loro stessa industria, sia adempiendo alla funzione di vettori tra paesi lontani e scambiando il prodotto dell'uno con quello dell'altro „. Nè soltanto dalle condizioni naturali favorevoli dipende la naturalità dell'industria: " Che i vantaggi che un paese ha sopra un altro siano naturali o acquisiti non ha alcuna importanza. Finchè un paese abbia quei vantaggi e l'altro ne sia privo, sempre tornerà più vantaggioso a questo piuttosto comprare che fare da sè „ (2). Così egli afferma; e da questo passo evidentemente risulta che i vantaggi naturali e quelli acquisiti sono considerati equivalenti; dal che è facile dedurre il concetto dinamico di produzione, il quale si manifesta anche da quanto l'autore scrive intorno alle cause del progresso economico.

È nota infatti l'importanza che Smith attribuiva, come coefficiente di progresso, alla divisione del lavoro, alla quale ha dedicato splendide pagine della sua classica opera. Ai progressi della tecnica, ai perfezionamenti delle macchine, come all'abilità nel lavoro ed ai miglioramenti della terra — cause tutte queste che concorrono a " facilitare ed abbreviare il la-

(1) A. Smith, op. cit., libro IV, capitolo II.
(2) Id., op. cit., libro IV, capitolo II.

voro, e quindi a ridurre il costo dei prodotti „ — lo Smith dedica, come è noto, un'importante parte del suo libro, nella quale studia gli effetti del progresso sui prezzi reali (1). Non soltanto dunque gli elementi naturali immutabili e fissi sono causa di progresso economico e possono rendere prospera e naturale l'industria, ma lo sono pure varî altri elementi suscettibili di continuo miglioramento e di incessante evoluzione, come i vantaggi acquisiti che un paese può avere in determinate produzioni.

La concezione dinamica di naturalità dell' industria in Adamo Smith ci è dimostrata, oltre che da quella pure dinamica di produzione che già abbiamo messa in evidenza, anche dal concetto di convenienza economica futura espresso ne' suoi scritti.

Egli infatti non era alieno dai mezzi atti ad incoraggiare certi rami della produzione; lo vediamo anzi occuparsi di quelli capaci di favorire l'agricoltura, consistenti anzichè nella protezione — che egli ritiene dannosa al progresso della nazione, e dimostra impotente a frenare l'esodo rurale — nel liberare la terra dalle restrizioni imposte da leggi antiquate e da dazi, facilitando l'investimento dei capitali. Anche il concetto della protezione alle giovani industrie, svolto poi molto più ampiamente dal Mill, appare in Adamo Smith, il quale ammette che un paese possa, per mezzo di dazi, acquistare nuove industrie più presto che non altrimenti, ma ritiene nello stesso tempo che questo paese non potrebbe, nel complesso della sua produzione, progredire così rapidamente come gli sarebbe stato possibile in un regime di piena libertà.

" Per mezzo di regolamenti, la produzione di una speciale merce può talora essere introdotta più presto di quello che sarebbe altrimenti avvenuto; e dopo un certo tempo questa può venir fabbricata nel paese stesso ad un costo uguale o minore di quello dei prodotti esteri. Ma quantunque l'industria della società possa essere così rivolta vantaggiosamente verso una particolare direzione più presto di quel che sarebbe avvenuto altrimenti, pure non ne consegue affatto che la somma totale tanto

(1) A. Smith, op. cit., libro I, capitolo XI, parte III; e libro II, capitolo I.

dell'industria quanto del reddito nazionale possa essere accresciuta da quella disposizione. L'industria della società può soltanto crescere proporzionalmente al progresso del suo capitale; ed il capitale può unicamente crescere proporzionalmente al graduale risparmio fatto sopra i suoi redditi „ (1). Ora, sebbene egli non accettasse nella sua applicazione pratica il principio della protezione alle giovani industrie, per i danni che questa arreca al complesso della produzione nazionale, è evidente però nello Smith, anche in questo caso, il concetto di convenienza futura; il quale è pure manifesto quando egli ammette i dazi, sia per proteggere produzioni necessarie alla difesa del paese oppure interessi formatisi nel paese da lungo tempo, sia per rappresaglie quando si ha la speranza di ottenere la revoca del dazio imposto da altri paesi sulle nostre merci — nei quali casi esiste appunto la convenienza a sopportare il danno presente prodotto dal dazio in vista dell'utilità futura. E si noti inoltre che le eccezioni ammesse dallo Smith al liberismo, come giustamente osserva il Nicholson (2), hanno una grande importanza, perchè trovano applicazioni pratiche nella politica attuale di parecchi Stati. La Germania infatti segue una politica di protezione agraria in parte per considerazione di difesa del paese contro il pericolo di una possibile deficenza di approvvigionamenti dall'estero in caso di guerra, in parte per proteggere interessi investiti in tale produzione da lunghi anni: le colonie insistono nella necessità della protezione della giovine industria, mentre gli Stati Uniti hanno difeso il loro sistema protezionista con tutti i principî addotti dallo Smith come eccezioni.

Si può adunque dire che lo Smith, allo stesso modo in cui appare il vero creatore dei germi di molte idee fondamentali sviluppatesi in seguito nella scienza economica e nella vita delle nazioni, esprime anche, per quel che ha tratto al concetto di convenienza futura, dei principî, i quali, benchè siano soltanto eccezioni alle sue dottrine, hanno tuttavia una grande importanza nella storia delle idee economiche.

Di industria naturale vediamo adunque già ampiamente

(1) A. Smith, op. cit., libro IV, capitolo II.

(2) Cfr. Nicholson, *A Project of empire*, pag. 174.

svolto nell'opera di Adamo Smith il concetto, che appare poi negli scritti di molti economisti posteriori: quello cioè di un'industria adatta alle condizioni non solo fisiche, bensì anche intellettuali, morali, sociali del paese — fondato non soltanto sulla convenienza presente, ma anche su quella futura.

4. — Giambattista Say, continuatore e divulgatore dell'opera dello Smith, ritiene egli pure industrie naturali quelle adatte alle varie condizioni dell'ambiente. Che il concetto di naturalità non fosse nel Say statico appare anche dalla sua concezione dinamica di produzione, poichè egli pure attribuiva giustamente una grande importanza ai fattori intellettuali e morali del progresso economico. Nel quadro sinottico di quelli che egli chiama i " fondi produttivi „ di una nazione, comprende oltre al " fondo degli strumenti dell'industria „ (che è costituito dagli " strumenti non appropriati „, come l'atmosfera, il calore, ecc., e dagli " strumenti appropriati „, come la terra, le miniere, i capitali), anche il " fondo industriale „ o " fondo di facoltà industriali „, il quale " è costituito dalla capacità degli scienziati, dalle attitudini degli imprenditori e degli operai „ (1). Il Say attribuisce pure, seguendo i principî di Adamo Smith, una notevole importanza, sia alla divisione del lavoro, sia all'azione delle macchine ed alla scienza, come coefficienti del progresso economico.

Anche il criterio di distribuzione territoriale delle industrie esclude in lui il concetto statico di industria naturale, fondato soltanto su materie prime nazionali o dipendenti unicamente dalle favorevoli condizioni fisiche; poichè vediamo manifesta l'opinione che una manifattura può situarsi naturalmente non soltanto vicino alle sue materie prime, ma anche in prossimità dei suoi " sbocchi „: e vediamo inoltre come egli riconosca che, in certi casi, l'importanza ed il carattere della mano d'opera abbiano una speciale influenza sulla localizzazione dell'industria (2).

---

(1) Cfr. G. B. Say, *Corso completo di economia politica*, " Biblioteca dell'Economista „, serie prima, vol. VII, parte I, capitolo VIII, pag. 91.

(2) Id., op. cit., parte II, capitolo IX, pag. 207 e segg.

Come negli altri classici considerati, anche nel Malthus si deve escludere il concetto statico d'industria naturale fondata esclusivamente su materie prime prodotte dal suolo. Tra le cause che favoriscono maggiormente la produzione egli colloca infatti, oltre alla fertilità del terreno, tutte quelle invenzioni tendenti a risparmiare la mano d'opera e l'accumulazione del capitale (1), ed implicitamente riconosce con questa affermazione che il progresso economico dipende non soltanto da cause fisiche ed immutabili, ma anche da fattori suscettibili di continuo miglioramento e perfezionamento.

Il criterio di convenienza futura nel concetto di naturalità dell'industria appare nel Malthus anche dalle funzioni da lui assegnate ai dazi. Egli riconosce a questi un'azione di carattere sociale e politico, in quanto essi valgono a mantenere l'equilibrio tra le classi agricole e le classi industriali (2) e servono a rendere il paese indipendente dall'estero per certe produzioni (3) — criterio quest'ultimo che ebbe poi sì vasta applicazione nella teoria come nella pratica della politica commerciale di molti Stati. Come regola generale egli raccomanda però una politica quanto più è possibile liberale, dalla quale consiglia di allontanarsi soltanto in casi speciali. “ Una perfetta libertà del commercio è dunque un'illusione, un fine ideale che non ci si deve lusingare di veder realizzato; ma che occorre aver di mira per avvicinarvisi quanto più è possibile „ (4). Si deve quindi ammettere come prevalente anche nel Malthus il concetto dinamico di produzione naturale, fondato non solo sul criterio della convenienza presente, ma anche su quello di convenienza futura.

Il concetto di naturalità dell'industria si delinea più chiaramente nell'opera di Ricardo, colla teoria dei costi comparati. È evidente nell'insigne economista il concetto che ogni paese deve dedicarsi a quella produzione per la quale ha maggiori

---

(1) Cfr. Malthus, *Principî di economia politica*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie prima, vol. V, pag. 362.

(2) Cfr. Malthus, *Saggio sul principio della popolazione*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie seconda, vol. XI, pag. 307.

(3) Id., op. cit., pag. 284 e seg.

(4) Id., op. cit., pag. 317.

attitudini, sia per i vantaggi naturali, sia anche per quelli artificiali od acquisiti. " Questa distribuzione [di lavoro] è sempre migliore quando ogni paese produce le cose adatte al suo clima, alla sua situazione ed agli altri suoi vantaggi naturali od artificiali e quando le scambia con le merci degli altri paesi „ (1). Del resto egli si dimostra fautore dell'impiego di capitale e di lavoro secondo il criterio della convenienza economica anche per la sua propensione verso la libertà commerciale — alla quale concede soltanto qualche rara eccezione, come nel capitolo XXV dove studia i vantaggi che una metropoli può talora trarre dalle restrizioni imposte al commercio delle colonie; e nel capitolo XIX nel quale ammette l'idea dei dazi temporanei sul grano estero in caso di crisi nella cerealicoltura —. " In un sistema di completa libertà commerciale, scrive Ricardo, ogni paese consacra il suo capitale e la sua industria a quell'impiego che gli pare più utile. I fini dell'interesse personale s'accordano perfettamente col bene universale di tutta la società. Così, incoraggiando l'industria, ricompensando l'abilità ed utilizzando il più possibile i vantaggi della natura si riesce ad una migliore distribuzione e ad una maggiore economia nel lavoro. Nel tempo stesso l'accrescimento della massa generale dei prodotti estende il benessere dappertutto. Lo scambio collega fra loro tutte le nazioni del mondo civile coi vincoli comuni dell'interesse, con amichevoli relazioni e ne fa una sola grande società. È secondo questo principio che si fa del vino in Francia e in Portogallo, che si coltiva del grano nella Polonia e negli Stati Uniti, e che si fabbricano generi di chincaglieria ed altri articoli in Inghilterra „ (2). " Ricardo — scrive Cannan, commentando questo passo — conosceva perfettamente la ragione per cui gli scambi avvengono tra beni lontani gli uni dagli altri, e che, per quanto è possibile, occorre compiere qualunque specie di lavoro nel luogo che meglio vi si adatta „ (3).

La concezione dinamica di produzione esclude in Ricardo

(1) Cfr. Ricardo, *Œuvres*, capitolo VII, pag. 95 (ediz. Guillaumin).

(2) Id., loc. cit.

(3) Cfr. Cannan, *Histoire des théories de la production et de la distribution*, pag. 63.

il concetto statico di naturalità dell'industria dipendente esclusivamente dall'esistenza delle materie prime nazionali o dalle condizioni naturali del paese. Infatti egli dimostra " la notevole influenza del perfezionamento delle macchine sul costo dei prodotti, della migliore divisione e distribuzione del lavoro e dell'abilità sempre crescente dei produttori „ (1).

5. — Nel Rau il fattore " natura „ assume una particolare importanza, in quanto esso agisce sulla produzione non soltanto direttamente ma anche indirettamente. Il clima modifica infatti l'attività umana, come pure riduce od aumenta il costo del lavoro a seconda del maggiore o minore consumo di combustibile e di alimenti ed a seconda delle maggiori o minori esigenze della popolazione in fatto di abitazione, dal clima stesso dipendenti (2). Nonostante la particolare considerazione del fattore " natura „, il Rau mette tuttavia in evidenza anche l'importanza del lavoro coadiuvato dal capitale, ed i vantaggi derivanti dalla divisione stessa del lavoro (3). La concezione dinamica della produzione e dei fattori del progresso economico, esclude *a priori* anche nel Rau il concetto di industria naturale fondata unicamente sopra materie prime nazionali o dipendente prevalentemente delle condizioni propizie dell'ambiente; ma egli espressamente chiarisce il suo pensiero più oltre su questo argomento. Il Rau riconosce i vantaggi economici derivanti ad un paese dalla produzione delle materie prime necessarie all'industria, ma non considera questa condizione come necessaria al suo sviluppo industriale. " È erroneo — scrive — voler per mezzo dei dazi fare in modo che tutte le qualità di beni industriali siano fabbricate nel paese e che siano importate soltanto materie grezze „ (4). E più oltre soggiunge: " Quelle industrie che in rapporto al lavoro richiedono molta materia prima prosperano naturalmente in quei paesi ed in quelle regioni che sotto questo aspetto hanno maggiori vantaggi. Riguardo alle materie prime che

(1) Cfr. Ricardo, *Œuvres*, cap. V, pag. 60 e cap. VII, pag. 105.
(2) Cfr. Rau, *Lehrbuch der Politischen Oekonomie*, vol. I, pagg. 102-113.
(3) Id., op. cit., pag. 126.
(4) Id., op. cit., vol. II, parte 2ª, pag. 108.

un paese non produce è la situazione del medesimo che rende più facile o più difficile l'approvvigionamento della materia prima „ (1).

Infine il concetto dinamico di naturalità nel Rau risulta non soltanto dalla concezione dinamica di produzione, dall'importanza che egli dà ai fattori extra-fisici del progresso economico, ma anche dalla considerazione della convenienza futura. Industria naturale è per questo autore non soltanto quella che prospera spontaneamente, ma anche quella che sarà economicamente conveniente sia per i miglioramenti tecnici, per il contributo della scienza, per la migliore sua organizzazione, sia anche per effetto dei dazi, che egli ammette però eccezionalmente e come disposizioni transitorie. " Il bisogno di protezione doganale e l'utilità della protezione debbono essere esaminati per ogni singola industria, secondo le circostanze di luogo e di tempo della medesima, e secondo le condizioni di tutta l'industria del paese „ (2). Ma " sopra tutto il dazio doganale esistente deve essere considerato soltanto come una disposizione temporanea che presto o tardi deve essere rimossa... Dazi duraturi si possono soltanto in rari casi eccezionali giustificare „ (3).

Nel Rau adunque il concetto dinamico di naturalità dell'industria si associa ad una particolare considerazione dell'elemento " natura „ nella produzione; e questa sua idea vedremo continuata dal Knies e dal Roscher, presso i quali la troveremo palese esaminando il loro pensiero.

(1) Rau, op. cit., pag. 88.
(2) Id., op. cit., pag. 107.
(3) Id., op. cit., pag. 109.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Dicembre 1916.

PRESIDENZA DEL SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Parona e Somigliana.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente, il Presidente annunzia con vivo rammarico la morte del Socio corrispondente Battelli, ed aggiunge che furono inviate le condoglianze a nome dell'Accademia, la quale fu anche rappresentata ai funerali. Il Socio Naccari legge una breve commemorazione di Angelo Battelli, che verrà inserita negli *Atti*.

Il Ministro della Marina ha invitato la Presidenza dell'Accademia a partecipare all'inaugurazione dell'Istituto centrale di biologia marina del R. Comitato talassografico in Messina, che ebbe luogo il 10 corr. La Presidenza si fece rappresentare dal Socio nazionale Volterra.

Il Presidente fu invitato a far parte di un Comitato promotore di speciali onoranze al nostro Socio Senatore Giovanni Celoria, nell'occasione del suo 75° anniversario, e conseguente abbandono della direzione del R. Osservatorio di Brera. Il Presidente ha accettato molto volontieri di rappresentare l'Accademia nel detto Comitato.

La Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino ha invitato a una seduta commemorativa del 50° anno della sua fondazione, che si farà il 20 corr. L'Accademia sarà rappresentata dai Soci che interverranno a quella funzione.

Il Presidente comunica l'invito della Presidenza della R. Accademia d'Agricoltura di Torino all'inaugurazione di una collezione pomologica, che avrà luogo il 24 corr. Il Socio Mattirolo, Presidente dell'Accademia d'Agricoltura, aggiunge alcuni schiarimenti sullo scopo della detta raccolta.

Il Socio Guareschi offre in omaggio alcune sue *Osservazioni e proposte sull'uso e sull'abuso dei medicamenti detti sintetici.* Con essi egli ha voluto porre la questione se non si possano eliminare come inutili, o superflui, parecchi di quei medicamenti, con grande vantaggio (specialmente nelle attuali condizioni) per le finanze delle amministrazioni ospedaliere e dei privati.

Il Socio Naccari presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota di B. Rainaldi, *La durata dello splendere del Sole sull'orizzonte di Torino nel sessennio 1899-1905*, terza parte; e così il Presidente Camerano due suoi scritti intitolati: *Osservazioni intorno ad alcuni resti di Stambecco delle Alpi Retiche*, e *La forma delle nodosità delle corna e il sistema di colorazione nei sottogeneri* Euibex *ed* Eucapra *Camer.*

LETTURE

ANGELO BATTELLI

Commemorazione letta dal Socio ANDREA NACCARI
nell'adunanza del 17 dicembre 1916.

Non avrei mai creduto che dovesse toccare a me l'ufficio estremamente doloroso di commemorare in quest'aula Angelo Battelli. che fu uno dei più valenti miei allievi e uno di quelli che furono più stretti a me da reciproco affetto.

Una grave malattia da qualche tempo l'aveva colto ed egli forse l'avrebbe vinta, se a tempo si fosse rassegnato al riposo, ma la vita per lui era movimento e lavoro.

Egli era nato nel 1862 a Macerata Feltria in provincia di Pesaro-Urbino e s'inscrisse per la laurea in fisica nella nostra Università nel 1880. Sin dal primo anno egli mi chiese di frequentare il Laboratorio anzichè attendere al terzo anno ed io l'accolsi ben volentieri. Percorse con onore gli studi universitari ed ebbe la laurea nel 1884 insieme con Luigi Palazzo ora Direttore dell'Ufficio centrale di Meteorologia. Erano essi allora, e rimasero poi, legati da fraterna amicizia e quando ebbero compiuti i loro studi, io avrei voluto trattenerli presso di me tutti e due, ma non avendo che un solo posto d'assistente che fosse libero, proposi loro di ricorrere alla sorte. Conforme al responso della sorte il Battelli rimase e il Palazzo ebbe un posto di perfezionamento all'estero per fisica terrestre. Egli poi fu addetto all'Ufficio centrale di Meteorologia, dove con l'opera sua si rese benemerito della scienza e del nostro paese.

Nel tempo, in cui il Battelli dopo la laurea restò qui a Torino, vale a dire dall'84 all'89, attese con mirabile assiduità a lavori sperimentali. Cominciò con una serie di studi sui fenomeni termo-elettrici. Il fenomeno termo-elettrico Thomson diede origine a varie sue note e chi sa come tali esperienze

sieno delicate può comprendere quanto ciò giovasse a perfezionare la sua abilità sperimentale.

Altre questioni di termo-elettricità, come l'annullarsi del fenomeno Peltier e le proprietà termo-elettriche delle leghe e del mercurio furono da lui trattate ed egli ebbe per questi ed altri suoi studi due premi ministeriali; ma uno dei suoi lavori più importanti, quello che gli diede per primo più larga fama fra i fisici, fu quello sulle proprietà termiche dei vapori. Egli lo iniziò e in buona parte lo eseguì nell'antico Laboratorio di fisica nel palazzo della nostra Università, dov'egli acconciandosi alla meglio alla ristrettezza dello spazio e alle condizioni tutt'altro che prospere del Laboratorio seppe superare le difficoltà delle misure di alte pressioni e di temperature molto lontane dalle ordinarie.

Le sostanze aeriformi, anche quando sono lontane dalla saturazione, non seguono esattamente le leggi del Boyle e del Gay Lussac e se ne scostano di più quando son prossime alla saturazione. Ora è appunto quella la parte del fenomeno che più importa conoscere e che oppone maggiori difficoltà.

La espulsione totale dell'aria dal liquido adoperato, la misura delle temperature, delle pressioni e dei volumi, la determinazione del punto di saturazione e della temperatura critica con l'esattezza che si richiede in tali studi, sono operazioni estremamente difficili. S'aggiunge che tali operazioni non sono senza pericolo quando si voglia, come fece il Battelli, arrivare, ad esempio, alla temperatura critica dell'acqua.

Il lavoro del Battelli comprese lo studio dell'etere, del solfuro di carbonio, dell'acqua e dell'alcool e fu da lui descritto in cinque grandi memorie, che furono tutte pubblicate dalla nostra Accademia.

Questa alla fine del 1893 assegnava al Battelli il premio Bressa per le quattro prime parti di quel lavoro.

Nel 1889 il Battelli ebbe per concorso la cattedra di Cagliari, di là passò a Padova e in fine a Pisa nel 1894. Quivi specialmente egli trovò modo di spiegare tutta la sua attività e di allestire un Laboratorio adatto a grandi ricerche. Ivi ebbe la soddisfazione di vedere intorno a sè una numerosa e valente schiera di allievi, che sotto la sua direzione eseguirono importanti lavori.

Fu in quel Laboratorio ch'egli compì, oltre a molti altri lavori, quello studio sulle scariche oscillatorie, che gli procurò tanto plauso e il premio reale dell'Accademia dei Lincei.

Sciaguratamente il fascino della vita politica vinse il Battelli. Quando seppi che egli stava per essere deputato, io, che tanto conto facevo su lui per la scienza, gliene espressi rammarico, ed egli mi rispose d'aver fiducia di poter sostenere i due uffici senza toglier nulla al suo lavoro scientifico. Certo egli parlava sinceramente e tutto fece per ottener quell'intento. Ardeva sempre in lui la febbrile operosità degli anni giovanili e non c'era fatica che lo sgomentasse. Ma troppi erano gli incarichi che gli venivano affidati, troppi i disagi imposti dalle svariate occupazioni, troppa la tensione della mente: il suo organismo precocemente indebolito non resse all'assalto della malattia che lo colse. Egli morì la mattina del giorno undici di questo mese.

Io non ho inteso di fare con queste righe uno studio sull'opera scientifica e politica del Battelli, ma solo di porgere senza indugio un modesto tributo alla sua memoria. E poichè quando scompare alcuna delle persone che ci son care, più ancora che i pregi della mente rievochiamo volentieri i pregi del cuore, dirò che nel carattere di lui era un'intima nota di gentilezza, donde aveva origine la simpatia ch'egli generalmente e prontamente destava. Rilessi in questi giorni due lettere sue, che ho conservato per trent'anni, scritte in una dolorosa vicenda, in cui avevo cercato di provargli il mio affetto. E in quelle parole rivoltemi con la sincerità dell'angoscia mi riapparve il fervore dell'ardente anima sua e quell'ingenua bontà, che il suo sorriso e il suo sguardo rivelavano meglio della parola.

Osservazioni intorno ad alcuni resti di Stambecco delle Alpi Retiche.

Nota del Socio Prof. LORENZO CAMERANO.

Nel numero del maggio 1909 del periodico " Diana „ (27° anno, n. 5), di Ginevra, a pag. 68, il signor A. Ghidini pubblicava la notizia del ritrovamento di alcuni resti di Stambecco in una morena glaciale in Valtellina. " Vor Jahren, egli " dice, wurden in einem Moränensturz am Lauternabach in der " Vedretta di Scerscen-Ralù im Veltlin (Roseg-Bernina) ver- " schiedene Schädel und Skelette des Steinbockes gefunden, die " dort vor wenigstens drei Jahrhunderten ihr Grab fanden (Siehe " CARDUAS, *Zur Geschichte des Steinbockes in den rhät. Alpen*, " Chur, 1904) „. — Per varie vicende i resti andarono in gran parte perduti e non rimase che un paio di corna con una porzione del frontale e coi nuclei ossei delle corna stesse. Di queste corna il Ghidini dà una fotografia, la quale venne più tardi riprodotta dal LYDEKKER, nel suo *Catalogue of the Ungulate mammals*, in " The British Mus. N. H. „, vol. 1, pag. 135, fig. 37 (1913). Il Ghidini fece eseguire dei calchi esattissimi in grandezza naturale di questo interessante e raro esemplare e uno di essi è ora posseduto dal Museo di Zoologia e Anatomia Comparata di Torino.

Il Ghidini, nello scritto sopra citato, dà alcune misure dell'esemplare e fa alcuni confronti colle corna degli stambecchi della valle d'Aosta: " Dieses Steinbokgehörn ist besonders be- " merkenswert, weil es bei 75 cm. Gesamtlänge eine Auslage " von 74 cm. hat. Es gehört somit zu den wenigen Exemplaren, " welche nahezu gleiche Auslage wie Läng haben. Das Aussehen

" dieses Gehörnes ist charakteristisch, besonders wenn man es " mit Gehörnen aus Val d'Aosta vergleicht. Bei 22 Stücken " von den letztern ist die grösste Auslage 62 cm. bei 83 cm. " Länge ".

Il Lydekker (op. cit., pag. 134) parla delle corna in questione a proposito della *Capra Sewertzowi* Menzb. del Caucaso, nel modo seguente: " Horns from the Rhaetian Alps (fig. 37) " present a close resemblance to those of the present species, " although an approximation to the former is made of certain " heads of *C. ibex* figured by Camerano (1). The Rhaetian horns " are stated to have been found, with other skulls and ske-" letons, in a glacial moraine at Lauternabach, in the Roseg " district, and are believed to be about three centuries old " (Ghidini, op. cit.). The length along front curve is 75 cm., " and the tip-to-tip interval 74 cm.; this equality in the two " measurements being paralleled in a pair of horns of *C. Se-" wertzowi* mentioned by Dinnik, in which they are respective " 80 and 85 cm. ".

Credo utile di procedere ad uno studio un po' minuto del sopradetto esemplare in confronto collo Stambecco delle Alpi e collo Stambecco del Caucaso (*C. Sewertzowi*).

Come appare dal modello, le corna appartengono ad un individuo vecchio, che, dal numero degli anelli di accrescimento, ritengo potesse avere da 14 a 15 anni.

L'apice delle corna è logorato in parte, come suole avvenire negli individui vecchi. Il logorìo è più spiccato in una delle due corna (2).

La lunghezza totale, misurata nella curva anteriore del corno, è per quello meglio conservato di cent. 75. Credo che, per avere la lunghezza totale del corno, si possono, tenendo conto dell'andamento delle curve superiore ed inferiore dell'apice stesso, aggiungere alla misura sopradetta almeno due centimetri e portarla a cent. 77.

---

(1) " Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino ", ser. 2ª, vol. LVI, tav. I, figg. 5, 10, 11 (1896).

(2) Questo logorio non appare nettamente nelle figure sopra citate forse per ragioni di prospettiva.

Le misure di queste corna sono le seguenti:

Lungh. totale (sulla curva anteriore) cm. 75 (+ 2 = 77)			
misura base	cm. 77	=	360
„ della curva inferiore cm. 60 (+ 1 = 61)		—	(285)
Distanza dall'apice alla base . . .	cm. 50,5	—	(236)
Saetta dell'arco sulla corda (mis. prec.)	„ 12,7	—	(59)
Circonferenza alla base	„ 22,4	—	(105)
Diametro antero post. alla base . .	„ 7,6	—	(36)
„ trasversale „ . .	„ 6,7	—	(31)
„ antero post. a $^1/_4$ dalla base	„ 7,3	—	(34)
„ trasversale „ „	„ 6,4	—	(30)
„ antero post. a $^1/_2$	„ 6,7	—	(31)
„ trasversale „	„ 4,2	—	(20)
„ antero post. a $^3/_4$	„ 6,0	—	(28)
„ trasversale „	„ 3,5	—	(16)
Distanza delle corna fra loro alla base	„ 3,7	—	(17)
„ „ a $^1/_4$ dalla base	„ 19,0	—	(89)
„ „ a $^1/_2$ „	„ 37,5	—	(176)
„ „ a $^3/_4$ „	„ 55,7	—	(261)
„ „ agli apici . . .	„ 74,0	—	(346)
	(74 + 1 = 75)	o	(351)

I numeri fra parentesi rappresentano i valori calcolati in 360^{esimi} somatici, assumendo come lunghezza base la lunghezza totale eguale a cm. 77. Tenendo conto dell'aumento proposto di 2 cm. nella lunghezza totale, alla punta del corno, la distanza fra gli apici si può aumentare di circa 1 cm. e portarla a cm. 75.

Il modello possiede una porzione del frontale, che si estende fino al disotto dei fori sopraciliari, con una porzione delle arcate orbitarie e i nuclei ossei delle corna. Le misure che se ne possono ricavare sono le seguenti:

Distanza fra i fori sopraciliari mm. 73			
misura base	mm. 73	=	360
Larghezza dei frontali alla base dei nuclei delle corna . . .	mm. 120	—	(592)
„ dei frontali sulle arcate orbitali	„ 141	—	(695)

Lunghezza del nucleo osseo (sulla curva anteriore)	mm.	314	—	(1548)
Circonferenza alla base del nucleo osseo	„	192	—	(947)
Diam. ant. post. del nucleo osseo alla base	„	64	—	(316)
„ trasversale „ „ „	„	56	—	(276)
Diam. antero posteriore a $^1/_4$ dalla base	„	59	—	(291)
„ trasversale „ „	„	46	—	(227)
„ antero posteriore a $^1/_2$ „	„	51	—	(251)
„ trasversale „ „	„	36	—	(177)
„ antero posteriore a $^3/_4$ „	„	39	—	(192)
„ trasversale „ „	„	23	—	(108)
Distanza dei nuclei fra loro (parte int.) alla base . . .	„	33	—	(163)
„ „ a $^1/_4$ dalla base	„	96	—	(473)
„ „ a $^1/_2$ „	„	176	—	(868)
„ „ fra gli apici .	„	343	—	(1691)

I numeri fra parentesi rappresentano i valori calcolati in 360^{esimi} somatici, assumendo come lunghezza base la distanza fra i fori sopraciliari eguale a mm. 73.

La figura sopra citata non dà una idea chiara dell'andamento delle nodosità, nella metà distale delle corna, perchè fatta troppo di scorcio. Nella metà distale del corno si possono considerare otto nodosità sporgenti; sopratutto spiccate sono le quattro prime a partire dalla punta. Nella metà prossimale le nodosità sono notevolmente meno sviluppate e dànno luogo come ad una cresta bitorzoluta.

La faccia esterna del corno è appiattita, ma i suoi margini superiore ed inferiore sono arrotondati. La faccia interna è convessa spiccatamente fino a poco più della metà prossimale e poi si appiattisce nella metà distale, dove appare anche leggermente concava lungo le basi della nodosità. La faccia inferiore è rotonda e convessa. La faccia anteriore è alquanto appiattita, col margine esterno arrotondato e col margine interno percorso, nella metà prossimale, da uno spigolo poco sporgente. Nella sua metà distale, come già si è detto, le nodosità sono spiccate.

Nel loro complesso le corna sono regolarmente e spiccatamente divergenti fin dalla base, come si vede dalle misure sopra riferite. La distanza cresce da $^1/_4$ della lunghezza, a partire dalla

base, alla $^1/_2$ di cent. 18,5, dalla $^1/_2$ ai $^3/_4$ di altri cent. 18,2, dai $^3/_4$ agli apici di altri cent. 18,3.

Le corna, esaminate di fronte, dànno l'impressione di essere nella loro metà distale piegate verso l'esterno e come contorte. Una leggera contorsione si osserva realmente seguendo l'andamento della faccia superiore del corno: ma è d'uopo tener conto dell'aspetto che assume il corno per il fatto che nella metà prossimale, mentre la sua faccia esterna è appiattita, l'esterna è spiccatamente convessa, con convessità tuttavia decrescente fino alla metà circa distale, dove la faccia interna si appiattisce notevolmente. Nella figura sopra citata, le ombre troppo forti dànno al corno l'aspetto di una contorsione alquanto superiore a quella reale.

Nell'esame delle sopradette corna il Ghidini e il Lydekker hanno particolarmente fermato la loro attenzione sulla notevole divergenza di esse. Il primo Autore le confronta con 22 esemplari di Stambecco delle Alpi, in cui ha trovato per la diververgenza massima fra gli apici centim. 62, per una lunghezza del corno di centim. 83. Il Lydekker li confronta colla *C. Sewertzowi*, in cui si trovano centim. 80 di lunghezza del corno con 85 cm. di divergenza fra gli apici. Per questa ragione egli propende ad avvicinare le corna in questione alla *C. Sewertzowi* del Caucaso.

Nello Stambecco delle Alpi, come ho potuto osservare coll'esame di 171 paia di corna di varie età (cfr. L. CAMERANO, *Ricerche intorno allo Stambecco delle Alpi*, " Mem. R. Acc. Sc. Torino ", Ser. II, vol. LVI, 1906, pagg. 322-323), il grado di divergenza delle corna, fra i loro apici, presenta un campo di variazione assai esteso, anche in corna di quasi eguale lunghezza. Riducendo i valori ad essere comparabili fra loro, coll'assumere come lunghezza base, eguale a 360, la lunghezza totale del corno, si hanno, ad es., le serie seguenti:

Lunghezza totale delle corna da cm. 70 a 72,5.

Distanza delle corna fra loro, agli apici — valori espressi in 360^{esimi} della lunghezza base: 118-144-174-185-221-240-260-270-282-287.

Lunghezza totale delle corna da cm. 73 a 75.

Distanza delle corna fra loro agli apici, come sopra: 207-222-247-254-306-340.

Lunghezza totale delle corna da cm. 78 a 92.

Distanza delle corna fra loro agli apici, come sopra: 204-212-254-268-271-284-322-332.

Anche nelle serie di individui con corna inferiori in lunghezza a centim. 70, si trovano esemplari con grande divergenza delle corna ai loro apici, ad esempio:

Lungh.	del corno	cm. 50	— divergenza	agli apici	(in 360^{esimi})	310
„	„	„ 55	„	„	„	308
„	„	„ 56	„	„	„	289
„	„	„ 60	„	„	„	300
„	„	„ 62	„	„	„	308
„	„	„ 62,5	„	„	„	297.

A proposito di questo carattere io così conchiudevo nel lavoro sopra citato per lo Stambecco delle Alpi: “ Il grado diverso di divergenza dalla metà in su del corno è spiccato anche in corna giovanissime. Anche rispetto a questo carattere si possono le corna dividere in quelle che divergono poco e in quelle a divergenza relativamente assai grande, anche a parità di età e di lunghezza totale. In generale nella forma *gracilis* si ha una divergenza maggiore che non nella forma *crassa*. In questa tuttavia il grado di divergenza è pure variabile entro a limiti abbastanza ampi „.

In questa specie i maggiori valori della divergenza delle corna agli apici che io ho trovato sono 322-332-340. Rowland Ward (*Records of Big Game*, 6ª ediz., 1910) menziona gli esemplari seguenti, nei quali la distanza fra gli apici delle corna è superiore alla lunghezza delle corna stesse, quindi, se essa venisse calcolata col metodo qui seguìto, darebbe valori superiori a 360 trecentosessantesimi: Esemplare dell'Imperial Museo di Vienna, lungh. del corno pollici $39\,^3/_4$ — distanza fra gli apici $40\,^1/_4$; Esemplare della Valle d'Aosta, rispettivamente pollici $33\,^1/_8$ e $39\,^3/_8$.

Maurice Gourdon, nel suo lavoro: *Note sur une Série de Crânes de Mammifères des Pyrénées* (" Bull. Soc. Sc. Nat. Ouest de la France ", 2ª ser., vol. VIII, 1908), dà nella Tav. I, fig. B, la fotografia di un paio di corna di Stambecco delle Alpi molto divaricate e ripiegate all'esterno, che è molto simile alle corna valtellinesi, non solo per questo carattere, ma per tutto il suo complesso.

Le corna valtellinesi dànno 346 o 351, secondo che si calcolano colla lunghezza che presentano o colla lunghezza presunta, tenuto calcolo del loro logoramento. Questi valori, come si vede, non sono molto diversi dal valore più elevato dello Stambecco delle Alpi. Le corna valtellinesi per questo carattere rientrano nella serie delle corna dello Stambecco delle Alpi che si presentano maggiormente divergenti.

Per quanto riguarda la contorsione verso l'esterno del corno, nella sua metà distale, lo stambecco delle Alpi presenta, non raramente, esemplari in cui questo carattere è notevolmente più spiccato che nell'esemplare valtellinese (cfr. L. Camerano, op. cit., parte I, tav. I, figg. 5, 2, 34).

Diametri trasversale e antero posteriore del corno. — Alla base, nel corno valtellinese, il primo è di centim. 6,7. Nello Stambecco delle Alpi, in corna di lunghezza variabile da centim. 74 a 78, si hanno valori che vanno da centim. 5 a 7, e in corna di centim. 92, si hanno centim. 7,1, per il diametro trasversale. Il diametro antero posteriore è di centim. 7,6 nel cranio valtellinese. Nello Stambecco delle Alpi, in corna di lunghezza variabile da centim. 74 a 78, si hanno valori che vanno da centim. 7,1 a 7,9 e in corna di centim. 92 si hanno centim. 8,3. Riducendo i valori in 360-esimi si ha, per il corno valtellinese, per il diametro trasversale, 31. Nello Stambecco delle Alpi (corna di lunghezza da 74 a 78 centim.) da 24 a 33. Nel corno valtellinese il diametro antero posteriore è 34. Nello Stambecco delle Alpi (serie come sopra) da 33 a 38.

A un quarto dalla base, nel corno valtellinese, il diametro trasversale è di centim. 6,4. Nello Stambecco delle Alpi (lunghezza corna da 74 a 78 centim.) da 4,4 a 6, (lungh. corna da 82 a 92) da 5,5 a 6,7. Nel corno valtellinese il diametro

antero posteriore è centim. 7,3. Nello Stambecco delle Alpi (serie come sopra) da centimetri 6,5 a 7,7.

A metà della lunghezza del corno, in quello valtellinese, il diametro trasversale è di centim. 4,2. Nello Stambecco delle Alpi (serie come sopra) va da 3,8 a 5,6 centim. Il diametro antero posteriore è nel primo di centim. 6.7 e nel secondo (serie come sopra) va da 6,2 a 7,5 centimetri.

A tre quarti della lunghezza del corno, nel valtellinese, il diametro trasversale è di centim. 3,5, nello Stambecco delle Alpi (serie come sopra) va da 1,8 a 3,5 centimetri.

Si vede da questi dati che il corno valtellinese presenta un andamento dei suoi diametri trasversali e antero posteriori analogo a quello dello Stambecco delle Alpi e i valori rientrano nel campo di variazione di quest'ultimo.

La forma del corno valtellinese, studiata nelle sezioni trasversali (ottenute coll'impronta in creta) alla base, a $^1/_2$ e verso l'apice, e confrontata colle sezioni corrispondenti del corno dello Stambecco delle Alpi, mostra con quest'ultimo una notevole rassomiglianza, sopratutto colle corna, non infrequenti, che hanno un perimetro alla base con margini spiccatamente arrotondati (cfr. L. Camerano, op. cit., tav. V, fig. 24; tav. IV, figg. 13, 10, ecc.). La stessa cosa si dica per le altre sezioni ed anche per le sezioni trasversali dei nuclei ossei.

Si hanno diverse buone figure delle corna della *Capra Sewertzowi* Menzb., parecchie delle quali sono riproduzioni fotografiche. Ricordo la tav. I del lavoro di E. Büchner, *Zur Geschichte der Kaukasischen Ture* (" Mém. Acad. Imp. de St. Pétersbourg ", VII ser., vol. XXXV, n. 8, 1887), la tav. XXI e le figg. 46, 47, 48 del lavoro di R. Lydekker, *Wild Oxen, Sheep and Goats* (London, 1898), la fig. 7 del lavoro di Pfizenmayer, *Im Daghestanischen Hochgebirge*, *Wild und Hund*, 1911, pagina 767, Berlino, 1911, ecc. Confrontando queste figure colle corna valtellinesi e con quelle dello Stambecco delle Alpi, appare, a primo colpo d'occhio (prescindendo per un momento dal carattere della divergenza delle corna), la nessuna rassomiglianza colla *Capra Sewertzowi*, per la forma complessiva del corno, la quale in quest'ultima è, vista di fronte, fortemente conica, avvicinandosi a quella della *Capra caucasica* Güldst. ed anche, per l'arrotondamento dei margini e per l'andamento delle nodosità.

alla *Capra cylindricornis* Blyth. di mezza età. La forma complessiva del corno valtellinese e la forma e disposizione delle nodosità sono spiccatamente quelle del corno dello Stambecco delle Alpi. Tenendo conto, inoltre, che il carattere della divergenza notevole delle corna fra loro si osserva, come sopra è stato detto, anche in non rari esemplari dello Stambecco delle Alpi, credo si possa conchiudere che il corno valtellinese si deve ritenere di *Capra ibex* Linn. e non di *Capra Sewertzowi* Menzb., nè di altra forma di Stambecco.

Questi resti di Stambecco sono importanti, perchè non solo ci forniscono la prova della presenza dello Stambecco nelle Alpi Retiche, ma ci concedono anche di ritenere che, molto probabilmente, gli stambecchi delle Alpi appartenevano ad una sola specie, alla *Capra ibex* Linn.

La durata dello splendere del Sole sull'orizzonte di Torino nel sessennio 1899-1905

(MANCA L'ANNO 1903).

Nota del Prof. B. RAINALDI
già Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino.

(Terza Parte) (*).

(*) Per le — Parti Prima e Seconda — vedi "Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino", vol. LI, pag. 1310, e LII, pag. 97.

TABELLA V.

Medie decadiche e mensili della durata effettiva dello splendere del sole degli anni 1899, 1900, 1901, 1902, 1904 e 1905, con le rispettive medie sessennali.

MESI	1ª Decade						
	1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
Gennaio. . . .	2.44	1. 4	1. 9	1.26	0. 0	4.32	1.49
Febbraio . . .	3.10	0.41	3.11	1.23	1. 9	4.59	2.26
Marzo	4.39	6.53	4.50	5.46	0.28	4.42	4.33
Aprile.	8.21	5.39	3.10	4.32	7.44	6.12	5.56
Maggio	6.34	5. 7	6.45	4.47	6.25	2.39	5.23
Giugno	10.52	3.51	6.56	3.57	5. 3	4.21	5.50
Luglio.	9.42	8.10	6.16	8.56	7.50	7.24	8. 3
Agosto	8. 2	7.52	2. 9	6.57	8.45	5.46	6.35
Settembre . .	6.48	4.37	2.47	7. 6	4.58	6. 1	5.23
Ottobre	2.55	5. 8	4.22	2.55	5.15	7.48	4.44
Novembre . .	0. 3	0. 0	0.25	1.19	2.19	2.33	1. 7
Dicembre . . .	2.43	4.25	5.18	0.36	2.41	2. 5	2.58

TABELLA V.

Medie decadiche e mensili della durata effettiva dello splendere del sole degli anni 1899, 1900, 1901, 1902, 1904 e 1905, con le rispettive medie sessennali.

MESI	2ª Decade						
	1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
Gennaio . . .	4.35	3.27	4.55	0. 0	0.22	2.22	2.37
Febbraio . . .	2.32	4.18	6.23	1.41	4.13	5.23	4. 5
Marzo.	6.14	5.35	0. 7	8. 2	3.50	3.19	4.31
Aprile.	3.45	9.27	9.26	2.40	2. 0	4.32	5.18
Maggio	6.25	4.51	5.37	5.58	6.50	2.26	5.21
Giugno	4.24	6.34	6.34	5.58	5.41	3.29	5.27
Luglio	8.24	9. 0	8. 2	6.20	7.56	6. 5	**7.38**
Agosto	8.22	6.20	7.15	7.35	8.27	6.51	7.28
Settembre . .	6.46	3.48	3. 6	4.33	5.17	2.10	4.17
Ottobre	3.18	4. 3	2.38	2.54	3.50	5.10	3.39
Novembre . .	5.16	0.45	0.23	1.31	4.48	2.31	**2.32**
Dicembre . . .	1. 6	4.54	2. 6	1.52	4.57	3.13	3. 1

Tabella V.

Medie decadiche e mensili della durata effettiva dello splendere del sole degli anni 1899, 1900, 1901, 1902, 1904 e 1905, con le rispettive medie sessennali.

MESI	3ª Decade						
	1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
Gennaio	0.46	2.55	6.41	1.44	0.45	3.10	2.40
Febbraio . . .	6. 1	5.26	8.13	2. 3	3. 9	1.25	4.23
Marzo	7.26	4. 6	4.46	6.31	4.26	4.41	5.19
Aprile	6.30	6.41	4.52	3.32	6. 0	5.22	5.30
Maggio	5.44	7.12	5.50	7.35	6.22	3.54	6. 6
Giugno	7.25	6.36	7.15	8.13	5.54	4.43	6.41
Luglio	8.16	10.16	3.18	7.14	9.26	5.59	**7.25**
Agosto	8.11	2. 5	7.27	4.38	7.16	5.20	5.50
Settembre . .	2.22	1.54	0.49	2.41	2.53	3.20	2.20
Ottobre	4.48	4.22	1.16	1.53	1.20	1.59	2.36
Novembre . .	6.29	1. 4	0.24	0.13	3.38	1.27	2.13
Dicembre . . .	0.17	3.43	1.20	1.38	1.33	1.59	**1.45**

TABELLA V.

Medie decadiche e mensili della durata effettiva dello splendere del sole degli anni 1899, 1900, 1901, 1902, 1904 e 1905, con le rispettive medie sessennali.

MESI	MESE						
	1899	1900	1901	1902	1904	1905	Media
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
Gennaio. . . .	2.38	2.29	4.20	1. 5	0.23	3.21	2.23
Febbraio . . .	3.41	3.24	5.46	1.40	2.50	4. 6	3.35
Marzo	6.81	5.29	3.18	6.46	2.58	4.15	5. 1
Aprile.	6.12	7.16	5.49	3.35	5.14	5.22	5.35
Maggio	6.14	5.46	6. 4	6. 9	6.32	3. 1	5.38
Giugno	7.30	5.40	6.55	6. 3	5.33	4.11	5.59
Luglio.	8.46	9.10	5.47	7.30	8.26	6.28	7.41
Agosto	8.11	5.19	5.40	6.21	8. 8	5.58	6.36
Settembre . .	5.19	3.26	2.14	4.47	4.23	3.51	4. 0
Ottobre	3.43	4.31	2.42	2.33	3.24	4.53	3.38
Novembre . .	3.56	0.36	0.24	1. 1	3.35	2.10	1.57
Dicembre . . .	1.20	4.20	2.51	1.22	3. 1	2.25	2.33

TABELLA VI. Quadro sintetico dei valori massimi e minimi raggiunti nel sessennio 1899-1905.

ANNO	Massimi e minimi decadici del rapporto $\frac{A}{B}$					Massimi e minimi mensili del rapporto $\frac{A}{B}$					Valori annuali del rapporto $\frac{A}{B}$	Ora dell'anno in cui il soleggiamento raggiunse il massimo della durata	
	Massimo decadico		Minimo decadico		Escursione tra i due estremi decadici	Massimo mensile		Minimo mensile		Escursione tra i due estremi mensili			
	Valore	Decade in cui è accaduto	Valore	Decade in cui è accaduto		Valore	Mese in cui è accaduto	Valore	Mese in cui è accaduto			Ora	Durata del soleggiamento
													h
1899	0.709	3ª dec. novembre	0.005	1ª dec. novembre	0.704	0,586	agosto	0,152	dicembre	0,434	**0,436**	11-12	**207,3**
1900	0,700	2ª dec. aprile	**0,000**	1ª dec. novembre	0,700	**0,605**	luglio	0,063	novembre	0,542	0.394	11-12	179.6
1901	**0,764**	3ª dec. febbraio	0.009	2ª dec. marzo	0.755	0.557	febbraio	**0,041**	novembre	0.516	0.354	10-11	174.2
1902	**0,578**	1ª dec. luglio	**0,000**	2ª dec gennaio	0.578	0,568	marzo	0.107	novembre	0,461	0,366	13-14	**165,3**
1904	0.634	3ª dec. luglio	**0,000**	1ª dec. gennaio	0.634	0.581	agosto	0.042	gennaio	0.539	0.373	12-13	175.9
1905	0.681	1ª dec. ottobre	**0,132**	3ª dec. febbraio	0.549	**0,448**	ottobre	**0,204**	maggio	0.244	**0,343**	12-13	186.1

La forma delle nodosità delle corna e il sistema di colorazione nei sottogeneri " Euibex „ ed " Eucapra „ Camer.

Nota del Socio Prof. LORENZO CAMERANO.

In un recente mio lavoro: *Della posisione dei fori palatini nella ripartizione del genere " Capra „ Linn.* (" Atti R. Accademia Scienze di Torino „, vol. LI, 1916, con una tavola) proposi di dividere il genere *Capra* Linn. in due sottogeneri: *A)* EUIBEX, colle specie *C. ibex* Linn. — *C. pyrenaica* Schinz — *C. hispanica* Schimper — *C. nubiana* F. Cuvier — *C. walie* Rüppel; *B)* EUCAPRA colle specie: *C. sibirica* Meyer — *caucasica* Güldst. — *C. aegagrus* Gmel. (*C. hircus* Linn.) e Capre domestiche — *C. Falconeri* Wagn. — *C. Severtzowi* Menzb. Il carattere per tale divisione risiede nella posizione dei *fori palatini* rispetto alla sutura *maxillo palatina*, e precisamente; EUIBEX, *I fori palatini sono collocati spiccatamente all'indietro della sutura maxillo palatina* — EUCAPRA, *I fori palatini sono collocati sulla sutura maxillo palatina e talvolta l'arcata superiore del canale palatino sporge al davanti di essa.*

In rapporto con questa divisione ho pure fatto notare alcune differenze, che presentano le specie dei due gruppi, nella forma dei lacrimali e nei rapporti reciproci del lacrimale e del mascellare superiore in riguardo alla fontanella " *fronte-naso-maxillo-lacrimale* „.

Partendo da questi caratteri, si può, a mio avviso, giungere ad un aggruppamento delle specie più consentaneo alle loro reciproche affinità, che non partendo dal carattere della forma e dall'andamento delle corna, come generalmente hanno fin qui seguìto gli Autori.

Le specie di Stambecchi e di Capre presentano nei due gruppi sopradetti, per ciò che è delle loro corna, serie di forme,

che si potrebbero dire parallele, sopratutto per quanto riguarda l'aspetto complessivo e l'andamento delle loro curve; esaminando tuttavia più minutamente le corna stesse, mi venne fatto di notare un carattere differenziale nelle corna delle specie dei due gruppi, che credo utile di mettere in evidenza, poichè esso può tornare utile nei casi in cui si debbano determinare corna isolate, prive del cranio.

Confrontando le corna dei maschi della *C. ibex* con quelle della *C. sibirica* (due specie fra le quali la rassomiglianza complessiva delle corna stesse è più appariscente; ma che appartengono rispettivamente ai due sottogeneri *Euibex* ed *Eucapra*), ho osservato una differenza costante nella forma delle nodosità.

Fig. 1.

Nella *Capra ibex* maschio le nodosità (guardando il corno di fronte) sono più rialzate verso il margine interno (fig. 1 *a*) del corno che non verso l'esterno (fig. 1 *b*), tanto che danno l'impressione come se fossero state schiacciate dal margine esterno verso il margine interno. La sporgenza delle nodosità, verso il lato esterno del corno, è nulla per le prime nodosità (a partire dall'apice del corno) ed è in generale poco spiccata anche per le seguenti nel mezzo del corno e verso la base, restando, ad ogni modo, spiccata la maggiore altezza delle nodosità stesse a partire dalla metà circa della faccia anteriore del corno fino al margine interno del corno stesso. La sporgenza delle nodosità verso il margine interno del corno è molto spiccata a partire dalle prime nodosità (verso l'apice) e va spesso diminuendo a misura che si discende verso la base del corno, qualunque sia lo sviluppo della nodosità, ma essendo tuttavia sempre più forte che non verso il margine esterno del corno.

Si osservi inoltre che la faccia esterna del corno è spesso alquanto convessa; in ogni caso è pianeggiante senza solco longitudinale o con solco lieve.

Nella *Capra sibirica* le prime nodosità delle corna (a partire dall'apice delle corna) in numero di due o tre, sono foggiate come nella *C. ibex* e solamente sporgenti verso il margine interno; inoltre sono meno alte verso il margine esterno; le altre fino alla base del corno sono di forma spiccatamente diversa. Esse sono con sviluppo simmetrico tanto verso il margine esterno del corno (fig. 2 *a*, *b*) quanto verso il margine interno;

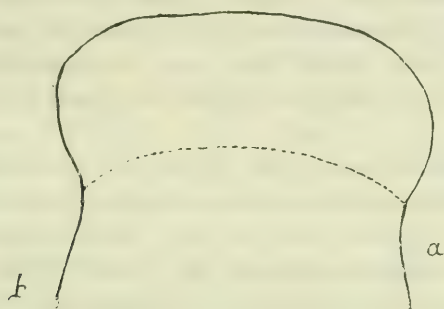



Fig. 2.

la loro maggiore altezza si trova nella parte mediana della faccia anteriore del corno e vanno simmetricamente abbassandosi verso i due margini con curva regolare; talvolta si nota una maggior altezza ed anche una grossezza alquanto maggiore verso il margine esterno, il che è l'opposto di ciò che si osserva nelle nodosità della *C. ibex*. Le nodosità nella *C. sibirica* sporgono notevolmente al di là del margine esterno (fig. 2 *b*) e la sporgenza non è generalmente inferiore a quella che si osserva verso il margine interno del corno (fig. 2 *a*). La sporgenza della nodosità sul margine esterno si prolunga talvolta con un rialzo spiccato che si estende, digradandosi, per un tratto della superficie esterna del corno. La faccia esterna del corno è, alla base delle nodosità e del margine anteriore del corno, solcata longitudinalmente, in modo spiccato.

Le conformazioni sopra menzionate conferiscono all'insieme delle nodosità delle corna della *C. sibirica* un *facies* particolare che le fa distinguere a colpo d'occhio (anche indipendentemente

dalla maggior grossezza e sporgenza delle nodosità stesse) da quelle della *C. ibex*, sia che si guardino dalla faccia anteriore, sia dal lato esterno. Questa differenza appare anche agevolmente dalle figure delle corna date dai varî autori, sopratutto quando si tratta di figure tratte da fotografie.

Per la *Capra ibex* cfr. ad esempio: L. CAMERANO, *Ricerche intorno allo Stambecco delle Alpi*, " Mem. Accad. Scienze di Torino ", ser. II, vol. LVI, 1906, tav. I, II. — E. SCHAEFF., *Steinböcke und Wildziegen.* " Photographische Darstellung der Gehörne ", Leipzig, 1894, tav. 1. — MARTIN GERLACH, *Das Thierleben in Schönbrunn*, Vienna e Lipsia, 1904, tav. 39*a*, fig. 4. In parecchi lavori che trattano dello Stambecco delle Alpi, nei quali i disegni delle corna non sono la riproduzione diretta di fotografie, le nodosità sono spesso non esattamente rappresentate.

Per la *Capra sibirica* è da notarsi che i caratteri sopradetti delle nodosità delle corna si mostrano assai appariscenti nelle figure che rappresentano le varie sue sottospecie. Cfr. ad esempio: *Capra sibirica almansyi*, fig. 38 del *Catal. of the Ungulate mammals. British Mus.* di LYDEKKER, vol. I, pag. 146. — LUDWIG LORENZ V. LIBURNAU, *Zur Kenntnis der Steinböcke Innerasiens*, " Denkschriften Mathemat. Naturw. Klas. K. Akad. Wiss. Wien. ", LXXX, 1906, tav. II, dove si trovano pure le fotografie delle corna della *C. sibirica altaica*, della *C. s. transalaiana*, della *C. s. pedri.* Nella tav. I dello stesso lavoro vi è la figura della *C. sibirica tipica* che presenta i caratteri delle corna sopradetti molto spiccati.

Per la *Capra sibirica wardi* e per la *C. s. Filippii*, confr.: L. CAMERANO, *Osservazioni sullo Stambecco del Baltoro*, ecc., " Atti R. Accad. Scienze di Torino ", vol. XLVI, 1911. Inoltre, E. SCHAEFF. (op. cit.), tav. 2 — H. ZOUCH., *Darrah-Sport in the Highlands of Kashmir*, London, 1898, tavola fuori testo e fig. a pag. 149 e a pag. 165 — WALTER ROTHSCHILD, *On a new race of ibex. C. sibirica lydekkeri*, " Novitates zoologicae ", VII, 1900, tav. II — R. LYDEKKER, *Note on the Kashmir ibex* (*Capra sibirica sacin*), " Proc. Zool. Soc. Londra ", 1901, I, tav. IX — R. LYDEKKER, *Wild Oxen, Sheep, Goats*, ecc., Londra, 1898, tav. XXIV — KARL SOFFEL, *Lebensbilder aus der Tierwelt*, Lipsia, *Saugetiere*, III, pag. 541 (1912) — T. BENTHAM, *Catal. Asiatic*

Horns and Antless, in " The collec. Indian Museum Calcutta „ (1908), pag. 29, figg. 6-7 — Von MARTIN GERLACH, op. cit, tav. 39, figg. 1-3, 4-5 7-8 e tav. 39 *a*, fig. 1.

Nella *Capra nubiana* F. Cuvier (nelle sue tre forme ora ammesse: *C. nubiana nubiana, C. nubiana sinaitica*, e *C. nubiana mengesi*) le nodosità delle corna dei maschi sono spiccatamente conformate come nella *Capra ibex*, sia per ciò che riguarda la loro forma complessiva, sia per ciò che riguarda il loro ripiegarsi verso il margine interno del corno. Si confrontino ad esempio le figure seguenti: K. B. TRISTAM, *The Survey of Western Palestina*, Londra, 1884, tav. II — E. SCHAEFF. (op. cit.), tav. 4 — R. LYDEKKER, *The Game animals of Africa*, Londra, 1908, pag. 89, fig. 29 e pag. 90, fig. 30 — ROWLAND WARD, *Records of Big Game*, ecc., Londra, 7ª ediz., 1914, pag. 375 — R. LYDEKKER, *Wild Oxen, Sheep, Goats*, ecc. (op. cit.), pag. 267, fig. 51, e SCLATER, " Proceed. Zool. Soc. Londra „, 1897, pagina 900, ecc. — P. GERVAIS, *Hist. nat. des Mammifères*, Paris, 1855, II, tav. XXXIX.

Capra walie Rüppel. Le nodosità delle corna dei maschi, tenendo conto della forma compressa delle corna stesse, si presentano pure più sviluppate verso il margine interno del corno. Cfr. fig.: ROWLAND WARD (op. cit.), pag. 372; LYDEKKER, *The Game animals of Africa* (op. cit.), pag. 93, fig. 31, ecc.

Nella *Capra Severtzowi* Menzb., tenuto conto della forma prevalentemente rotonda che va assumendo il corno, e del poco sviluppo delle nodosità, queste tuttavia si possono ricondurre alla forma generale di quelle della *Capra sibirica* per quanto riguarda sopratutto il loro sviluppo eguale sulla fronte del corno e il loro sporgere sul margine esterno del corno stesso. Cfr. le figure: R. LYDEKKER, *Wild Oxen, Sheep*, ecc. (op. cit.), pag. 247, fig. 46 e tav. XXI — PFIZENMAYER, *Im Daghestanischen Hochgebirge, Wild und Hund*, XVII (1911), pag. 767, fig. 7.

Risulta dalle osservazioni precedenti che, pur tenendo conto di speciali differenze dipendenti dallo sviluppo maggiore o minore delle corna, e del maggiore o minore loro grado di compressione o di arrotondamento, le nodosità, nelle specie *C. ibex*, *C. nubiana*, *C. walie*, che appartengono al sottogenere *Euibex* Camer., sono foggiate sopra uno stampo fra loro simile; mentre le nodosità delle corna della *C. sibirica* e della *C. Severtzowi*, che

appartengono al sottogenere *Eucapra* Cam., sono foggiate sopra uno stampo diverso, ma pure simile fra loro. Ciò viene in sostegno del proposto raggruppamento delle sopradette specie in due sottogeneri caratterizzati dalla diversa posizione dei fori palatini rispetto alla sutura maxillo palatina.

*
* *

Il sistema generale della colorazione della *Capra sibirica* ricorda notevolmente quello della *Capra hircus aegagrus*, come il LORENZ v. LIBURNAU (op. cit.), pag. 95, osserva e come pure osserva il LYDEKKER (*Catal. Mam.*, I, op. cit., pag. 144), particolarmente per quanto riguarda il dorso e i fianchi e la striscia scura, che dalla parte anteriore delle estremità anteriori va a congiungersi alla base del collo colla striscia nerastra longitudinale mediana del dorso, ed anche per la colorazione delle estremità. Sopra queste ultime si trova, ad esempio, in una forma di *Capra sibirica*, la *C. sibirica fasciata* Noack, la permanenza di una macchia scura sulla parte anteriore delle gambe anteriori, e traccia di una macchia scura sulla parte anteriore dei piedi anteriori, mentre il resto dell'arto è quasi bianco, analogamente a quanto si osserva nella *Capra hircus aegagrus*. Cfr. le figure colorate seguenti: R. LYDEKKER, *Wild Oxen, Sheep, Goats*, opera cit., tav. XXIII (*Capra hircus aegagrus* di Persia) — P. L. SCLATER, *Remarks on the various Species of Wild Goats*, " Proceed. Zool. Soc. ", 1886, tav. XXXI (*Capra aegagrus* di Creta) — V. LORENZ LIBURNAU, *Die Wildziegen der griechischen Inseln*, " Mittheil. aus Bosnien und der Herzegovina ", vol. VI, tavole XXVI e XXVII, 1899.

Il sopradetto sistema di colorazione non si osserva, come è noto, nella *Capra ibex*, nella *Capra nubiana* e nella *Capra walie*. Anche il carattere della colorazione, unitamente agli altri sopra menzionati, parla in favore della spiccata affinità della *Capra sibirica* colle forme del sottogenere *Eucapra* e non con quelle del sottogenere *Euibex*.

—

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Dicembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Einaudi, Baudi di Vesme, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli Direttore della Classe, Manno, Carle, S. E. Ruffini, Brondi, Schiaparelli e Patetta.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del giorno 10 corrente.

Il Presidente dà comunicazione della rielezione del Socio Einaudi alla carica di Tesoriere dell'Accademia per il triennio dal 1° luglio 1916 al 30 giugno 1919.

Il Socio Segretario Stampini dà lettura della lettera con la quale la Ditta G. B. Paravia porge caldi ringraziamenti alla Classe per le parole di plauso e di incoraggiamento ad essa Ditta rivolte nell'adunanza del 10 corrente. Presenta poscia alla Classe il numero 22 (25 nov. u. s.) della rivista artistica letteraria illustrata quindicinale *Gran Mondo*, intitolato *Numero storico dedicato a S. E. Paolo Boselli* e donato all'Accademia dal Socio corrispondente Vittorio Cian. Ne mette in rilievo breve-

mente il contenuto, tutto dedicato a lumeggiare i principali momenti della vita dell'illustre nostro Direttore, e con particolare compiacenza richiama l'attenzione della Classe all'articolo “ Paolo Boselli e l'Istituto universitario „, nel quale è riprodotta una lettera del nostro compianto Socio nazionale residente Rodolfo Renier all'on. Boselli e la risposta mandata al Renier dall'on. Boselli. La Classe ringrazia il donatore.

Il Vicepresidente Chironi fa appello alla scienza, al patriottismo dei Colleghi perchè veggano se nelle contingenze presenti, nelle quali ognuno, per quanto gli appartiene, deve concorrere ad agevolare ed assistere l'opera del Governo suggerendo provvedimenti nuovi o mostrando il difetto di quelli già ordinati, non debba l'Accademia nostra volgere a tal fine una parte dell'attività sua. Obbedirebbe così essa alle proprie tradizioni: ed ai maggiori e più gravi problemi di economia e di ordinamento amministrativo, già gravi oggi e che più gravi potranno essere dopo la guerra, potrebbe dare lo studio suo, con lo studio dei Soci, il cui valore, la cui perizia è con onor loro e dell'Istituto universalmente conosciuta. E per dire di alcuni obbietti, accenna il Vicepresidente agli ordinamenti sulla pubblica finanza; ai cambi; agli approvvigionamenti; alla legislazione nuova sulle acque; al credito navale; all'insegnamento professionale ch'è tutto da costituire, posto in rapporto alle altre scuole che dalla elementare all'universitaria son tutte da riordinare. Conseguenza di quest'attività sarà un servigio che l'Accademia renderà al Paese; un aiuto di studio che sarà bene accetto al Governo sui provvedimenti di cui ha obbligo.

Il Socio Stampini si compiace della proposta del Presidente, come quella la cui attuazione potrà aprire alla nostra Accademia un nuovo glorioso cammino, determinando una continua corrente di pensiero fra essa ed il Paese, e sfatando il vieto concetto delle Accademie considerate come corpi solitari e chiusi che nelle ricerche della scienza pura non palpitino della vita

della Nazione. Egli, anzi, è lieto e superbo che l'Accademia torinese abbia dimostrato, segnatamente in questi ultimi tempi, di vivere con la Nazione, di partecipare alle sue alte idealità, alle sue legittime speranze, alla sua fede inconcussa nel grande avvenire dell'Italia, e ritiene che si può benissimo escogitare un mezzo per cui le così dette adunanze pubbliche dell'Accademia divengano tali in realtà, e l'opera delle sue due Classi entri nella conoscenza del pubblico più che non possa ottenersi con la semplice pubblicazione degli *Atti*, naturalmente destinati ad uno scarso numero di lettori limitato ai cultori di discipline speciali.

Il Socio Prato conviene col Presidente nella opportunità di promuovere discussioni sui problemi economici e finanziari dell'ora presente. Riguardo poi a taluni di essi, egli si propone di richiamare l'attenzione dell'Accademia, presentando prossimamente alcuni scritti i quali sono in corso di stampa. E quanto alla grave questione dell'insegnamento industriale e professionale, a cui pure accennò il Presidente, ritiene sia forse opportuno attendere le conclusioni della Commissione governativa che se ne sta occupando, per commentarle e completarle.

Il Socio Einaudi plaude alle idee del Presidente; ma allo scopo di dare diffusione alle conclusioni nostre, pensa che sarebbe necessario interessare quelle fra le persone più competenti che in Torino si occupano di questioni economiche e finanziarie, anche nella vita pratica, ad intervenire alle nostre pubbliche discussioni. Di fatto molti sono coloro i quali possono fornire, per conoscenza diretta, preziosi elementi di studio, ed ai quali potrebbe riuscire utile la collaborazione nostra, inspirata a criteri puramente scientifici. Aggiunge che lo Statuto nostro non vieta che ad estranei si possa rivolgere invito di partecipare a discussioni, anche ammesso che questa partecipazione di estranei non debba dar luogo ad inscrizione di Note negli atti verbali delle adunanze.

Fatta la presentazione, da parte del Socio Einaudi, della seconda ed ultima *Nota* del Dott. Attilio Garino-Canina *Intorno al concetto di industria naturale nella letteratura economica*, la quale sarà, come la prima, pubblicata negli *Atti*, il Presidente, augurando ai Soci presenti ed assenti il buon anno, propone, fra il plauso dei presenti, che uno speciale caloroso augurio sia inviato, a nome della Classe, dall'Accademico Segretario a S. E. Boselli, nostro amato e venerato Direttore. Dopo di che l'adunanza è tolta.

LETTURE

Intorno al concetto di industria naturale nella letteratura economica.

Nota II di ATTILIO GARINO-CANINA.

SOMMARIO

6. Il pensiero di List sulla naturalità dell'industria: sue derivazioni — Il dinamismo di naturalità si fonda sull'evolversi della produzione non soltanto in seguito all'azione dei dazi, ma anche per effetto di una migliore organizzazione, del progresso tecnico e della scienza applicata all'industria.
7. Concetto dinamico di produzione nel Chevalier, nel Dunoyer e nel Cherbuliez — Importanza attribuita ai fattori intellettuali e morali nella produzione.
8. Concetto dinamico di naturalità nello Stuart Mill — I fattori del progresso economico — Il criterio di convenienza economica e la protezione temporanea delle giovani industrie.
9. Il concetto dinamico di produzione e l'idea di libertà economica nel Bastiat.
10. L'elemento " natura " nel concetto di produzione del Knies — I fattori morali ed intellettuali del progresso economico — Criteri seguìti in politica commerciale e concetto di convenienza economica.
11. I tre periodi della storia dell'economia pubblica nel Roscher: la varia importanza assunta in essi dalle materie prime — Concetto dinamico di naturalità — Importanza comparativa dei vantaggi presenti e di quelli futuri — Concetto di distribuzione territoriale delle industrie.
12. Concetto dinamico di naturalità nello Schäffle — Gli elementi dell'industria — Il concetto di distribuzione geografica delle industrie nello Schäffle in confronto colle teorie del Thünen e del Sax — La sempre minor dipendenza dell'industria dalla prossimità delle materie prime e dalle condizioni fisiche dell'ambiente.
13. Il concetto di industrie naturali concordemente accolto dagli economisti contemporanei — Le cause del dinamismo della produzione e del passaggio da un'industria ad un'altra secondo il Leroy-Beaulieu.
   Crescente importanza dei fattori morali ed intellettuali nel moderno sistema industriale secondo il Nicholson — I fattori del

progresso economico — La protezione temporanea delle giovani industrie ed il concetto di convenienza economica.

Importanza dei fattori non fisici nella produzione, specialmente dell'educazione industriale e dei progressi della scienza nel Marshall — Localizzazione dell'industria.

Il concetto di convenienza economica e la protezione temporanea delle giovani industrie nel Sidgwick, nel Bastable, nel Taussig.

Il concetto dinamico di naturalità nello Schmoller, nel Clark.

III. L'evolversi della concezione dinamica di produzione e dei concetti di convenienza economica e di naturalità dell'industria nella letteratura economica.

Importanza sempre minore delle materie prime e delle condizioni fisiche dell'ambiente col progresso della tecnica della produzione e nell'evoluzione del concetto di industria naturale.

Prevalenza del concetto di industria naturale adatta alle varie condizioni fisiche, intellettuali, morali e sociali del paese, fondato non soltanto sulla convenienza presente, ma anche su quella futura.

6. — Sebbene l'opera di Federico List sia stata invocata come l'espressione più evidente del dinamismo di naturalità per le sue idee sulla politica protezionista e sulla necessità di rendere, con i dazi, naturali quelle produzioni che tali ancora non sono, tuttavia questo autore ci appare entusiasta della libertà nel senso più vasto e, sotto certi aspetti, anche favorevole alla libertà commerciale, tant'è vero che adoperò tutte le sue forze per abolire le tariffe interne e per veder raggiunta l'unione commerciale di tutti gli Stati della Germania.

Sotto alcuni punti di vista la sua concezione si riannoda a quella dei classici. Adamo Smith, Malthus avevano già prima considerato il regime assoluto di libertà degli scambi come un ideale supremo a cui l'umanità tendeva, ma che per allora poteva costituire soltanto un'utopia; anche List crede che, date le condizioni del suo tempo, e specialmente a cagione delle lotte economiche e della probabilità di guerra tra nazione e nazione, non sia possibile applicare quello che fu il suo ideale scientifico e politico finale, cioè il libero scambio universale. La derivazione delle idee dell'economista tedesco si può trovare nelle teorie dei classici, non solo per questo suo ideale di libertà, ma anche per la grande importanza che egli assegna ai progressi tecnici, alla scienza ed ai miglioramenti da questa arrecati alla produzione — e quindi pure per il concetto dinamico di produzione che in lui troviamo palese e che costituisce il

fondamento essenziale del dinamismo, in fatto di naturalità dell'industria. È vero che, nella pratica, egli attribuisce una preponderante influenza sull'economia del suo tempo ai dazi, ma il suo protezionismo non è assoluto, facendo egli già un'eccezione assai notevole per l'economia agraria, alla quale crede meglio adatto il regime liberista. Del resto, se alcuni principi sopra ricordati si possono ritenere come derivati dai classici, anche le idee protezioniste di cui egli è considerato come l'apostolo all'epoca sua non sono del tutto originali, poichè nella sua opera si sentono molto spesso le influenze di M. Carey, di Raymond e specialmente di Alfredo Hamilton, il quale già aveva pubblicato nel 1791 il noto *Report of Manifactures*, proclamando la necessità di proteggere l'industria con dazi e con premi di incoraggiamento (1).

Il List insiste particolarmente sul concetto dei vantaggi futuri provenienti alla società dal creare un ambiente favorevole alle industrie che si ritengono meglio adatte ad un paese. Egli sostiene — ed è questo il vero fulcro su cui poggia la sua teoria — che le nazioni debbono essere protette dalla concorrenza estera per mezzo dei dazi, affinchè possano sviluppare quelle industrie che le condizioni morali, intellettuali, sociali e politiche le permettono di rendere poi naturali alla nazione stessa. " È vero — egli scrive — che i dazi protettori al principio aumentano i prezzi dei manufatti: ma è altrettanto vero ed inoltre è riconosciuto dalla prevalente scuola economica, che nel corso del tempo, dalla nazione che riesce a creare una capacità sua propria di produzione industriale completamente sviluppata, questi beni sono prodotti ad un prezzo inferiore nel paese, a quello al quale si potrebbero importare dall'estero „ (2). C'è inoltre il vantaggio dell'indipendenza industriale in caso di guerra; dalla qual cosa il List trae come conclusione che occorre sviluppare la capacità di produzione, la quale è assai più importante della produzione stessa. Il List però, per quanto abbia come ideale quella nazione la quale per mezzo dell'agri-

---

(1) Cfr. Margaret E. Hirst, *Life of Friedrich List*, pagg. 115 seg.

(2) Cfr. F. List, *Das Nationale System* (Stuttgart, 1883), libro II, capitolo XII, pag. 130.

coltura provvede la materia prima e gli alimenti e sviluppa in pari tempo l'industria, in modo da essere economicamente indipendente dall'estero, non vuole tuttavia spingersi troppo oltre in questa sua aspirazione all'indipendenza economica. Egli ammette che la divisione nazionale ed internazionale del lavoro è essenzialmente determinata dal clima e dalla natura stessa, e che sarebbe " pazzia per una nazione il provvedere per mezzo di divisione nazionale di lavoro (cioè con produzione nazionale) quei beni la cui produzione non è favorita dalla natura, e che può procurarsi più a buon prezzo e di migliore qualità per mezzo della divisione internazionale di lavoro " (cioè per mezzo del commercio estero) (1).

Il concetto di industria naturale è adunque nel List quello di industria che si sviluppa spontaneamente, e nel medesimo tempo, anzi specialmente, quello di industria che sarà nell'avvenire adatta alle condizioni fisiche, morali, intellettuali, sociali e politiche dell'ambiente; le quali fanno sperare in un futuro sviluppo spontaneo senza i dazi, indispensabili sul principio. Nè ritiene il List che un'industria per essere naturale debba fondarsi su materie prime del suolo nazionale, poichè egli sostiene che " il libero commercio nei prodotti agricoli e nelle materie prime è utile a tutte le nazioni in tutti gli stadi del loro sviluppo industriale " (2). In lui vediamo adunque manifesta la concezione dinamica di naturalità di produzione; ma allo stesso modo che il suo protezionismo non fu così assoluto come si volle da alcuni suoi continuatori, così anche il dinamismo di naturalità dell'industria, nel pensiero del List, non si fonda soltanto sull'evolversi della produzione per effetto dei dazi protettori, ma anche per l'influenza della scienza come dell'organizzazione progredita e dei perfezionamenti tecnici applicati alle varie produzioni.

7. — Il concetto dinamico di produzione, come prova di naturalità dell'industria, ci appare manifesto anche nel pensiero degli economisti classici francesi, dei quali ricordiamo per bre-

---

(1) F. List, op. cit., libro II, capitolo XIII, pag. 143.
(2) Id., op. cit., libro II, capitolo XXVII, pag. 268.

vità qualcuno soltanto. Il Chevalier, nel suo *Corso di Economia Politica*, si occupa in modo speciale dei mezzi più efficaci perchè " la produttività liberamente e progressivamente si svolga „. Tra i fattori del progresso economico, grandissima importanza viene attribuita a quelli morali ed intellettuali, non aventi per loro natura carattere fisso ed immutabile, e tali perciò da escludere la concezione statica di produzione e quella di industria naturale esclusivamente fondata su materie prime nazionali o dipendente prevalentemente dalle condizioni naturali dell'ambiente.

Il Chevalier attribuiva un'importanza grandissima alla scienza, alle invenzioni come coefficienti del progresso. " Il progresso industriale — scriveva — è un presupposto del progresso della scienza e della diffusione delle cognizioni; l'industria non progredisce se non perchè si fanno nuove scoperte, perchè le si fanno applicare e perchè l'intelligenza di tutti, operai e capi, se le ha appropriate „. Ma più chiaramente ancora il Chevalier esprime il suo pensiero sulla naturalità dell'industria nell'*Esame del sistema protettore*, in cui si mostra fautore dell'idea di libertà industriale, ed esplicitamente afferma che un'industria possa prosperare anche su quel suolo dove non trova le materie prime. La libertà del lavoro e dell'industria è perfettamente conforme allo spirito della moderna civiltà più evoluta ed esperta, e ad essa occorre: " 1° che gli uomini scelgano la loro professione a proprio talento e la esercitino come meglio credono, purchè la libertà reciproca del prossimo non sia compromessa; 2° che gli uomini si provvedano dove vogliono di materie prime e di strumenti; 3° che dispongano a voglia loro dei prodotti o della rimunerazione del loro lavoro per uso loro personale o per quella destinazione onesta che loro piaccia „ (1). Egli ammette però che la natura imponga certi limiti allo sviluppo delle industrie di un paese, ma osserva che " questi limiti, questa specie di interdetti allo spirito d'intrapresa di ciascuna grande nazione, lasciano ancora aperto uno spazio immenso, la maggior parte del dominio delle manifat-

---

(1) Cfr. CHEVALIER, *Esame del sistema protettore*, " Biblioteca dell'Economista „, serie II, vol. VIII, pag. 137.

ture „ (1), potendo una nazione avere la convenienza economica di importare dall'estero le materie prime greggie o anche a metà lavorate. A questo proposito il Chevalier cita l'Inghilterra, la Prussia, la Svizzera come paesi dotati di fabbriche di seta senza averne la materia prima. L'Inghilterra inoltre possiede fabbriche che lavorano su vasta scala l'acciaio senza produrre nel suo territorio un chilogrammo di ferro adatto a questa fabbricazione. Il Chevalier cita altri numerosi esempi, ed aggiunge: " potrei moltiplicare quasi all'infinito gli esempi di industrie che prosperano lontano dai paesi dove sia la loro materia prima „, e conclude: " si può osservare che codesti limiti naturali non sono assolutamente fissi, ma il progresso delle scienze e delle arti tende ad allargarli di continuo „.

Il Chevalier ammette, anzi loda, il proposito di far sorgere nuove industrie col favorire l'educazione e l'istruzione della classe lavoratrice, col perfezionare la tecnica, col migliorare l'organizzazione, ma non approva i mezzi di cui spesso si valsero i governanti a questo scopo, cioè le dogane e le varie restrizioni. " Per apparecchiare i popoli all'esercizio delle arti manifattrici, che dovessero positivamente loro riuscire proficue, i Governi una volta, quando si servivano della dogana, fecero pagare caro alle nazioni il bene che loro procuravano „ (2). Il Chevalier, pur ammettendo il regime protezionista in casi eccezionali, rimane fedele ai principi liberisti che ci rivelano in lui il concetto di industria naturale fondato non solo sulla convenienza presente, ma anche su quella futura, da noi osservato negli altri classici. Tale concetto viene pure accolto dal Dunoyer e più tardi dallo Cherbuliez, le cui teorie sono affini a quelle testè esaminate.

È notevole l'importanza dal Dunoyer attribuita ai fattori intellettuali e morali della produzione. Pur riconoscendo anche l'influenza delle circostanze locali, è palese nei suoi scritti l'opinione che la civiltà ed il sapere riescano a dominare le circostanze fisiche, utilizzandole meglio se favorevoli, o riducendole se sfavorevoli. " L'influenza delle circostanze locali non è la

(1) Chevalier, op. cit., loc. cit., serie II, vol. VIII, pag. 157.
(2) Id., op. cit., loc. cit., serie II, vol. VIII, pag. 158.

medesima su tutti i gradi di civiltà. A misura che la società diventa più potente, il potere delle circostanze favorevoli aumenta e quello delle cause avverse diminuisce „ (1). Il Dunoyer attribuisce un'importanza fondamentale alla coltura, alla scienza, all'educazione ed anche alle buone abitudini morali — come pure alle macchine, al capitale, alla divisione del lavoro — quali cause di progresso economico. Egli divide il fondo o capitale sociale in due grandi forze: 1ª quella che il lavoro ha sviluppata negli uomini; 2ª quella che ha effettuata nelle cose. Nella prima distingue: il genio degli affari, cioè la capacità di giudicare della domanda futura e dei bisogni della società, e quella di amministrare; e il genio dell'arte, ossia la cognizione pratica del mestiere, le nozioni teoriche, l'abilità dei lavoratori, ed anche le qualità morali. Oltre a cotesti diversi ordini di facoltà che il lavoro ha fatto nascere negli uomini e che formano il capitale intellettuale e morale della società, il suo fondo di facoltà personali, esiste quella moltitudine di utilità di forze che esso ha fissata nelle cose, e che formano il suo capitale reale o materiale: strade, canali, terre coltivate, macchine, ecc. Egli dunque scorge una grande importanza nelle qualità intellettuali e morali della società, importanza riconosciuta in linea generale ed ammessa in modo esplicito con particolari considerazioni trattando dell'industria estrattiva e di quella manifatturiera — per le quali, con molti esempi interessanti, dimostra quale fonte di progresso sia stata l'applicazione di scoperte scientifiche e di progressi tecnici. Il Dunoyer infatti ritiene che l'uomo con la capacità e col lavoro riesca ad " alterare le situazioni, mutare l'importanza relativa dei siti e modificare i motivi che sono tali da influire sulla scelta della situazione „ (2).

8. — Tanto il concetto dinamico di produzione quanto quello di convenienza economica futura appaiono evidenti dallo spirito di tutta l'opera di Stuart Mill. Essi si riannodano alle idee che abbiamo esaminato considerando gli scritti di Adamo

---

(1) Cfr. Dunoyer, *Della libertà del lavoro*, " Biblioteca dell'Economista „, serie II, vol. VII, pag. 63.

(2) Id., op. cit., loc. cit., serie II, vol. VII, pag. 458.

Smith, ma rivelano in alcuni punti un'ulteriore evoluzione di pensiero.

Il Mill considera come le più evidenti cagioni di una produttività superiore, insieme ai " vantaggi naturali „, anche l'energia del lavoro, la capacità e le cognizioni dei lavoratori e degli imprenditori, l'invenzione e l'uso degli strumenti e delle macchine, ed infine la sicurezza (1). Ed anche trattando delle caratteristiche del movimento progressivo delle ricchezze (2) considera come essenziale a questo movimento il perpetuo ed illimitato accrescimento dei poteri dell'uomo sulla natura, per mezzo di macchine, di invenzioni e di tutte le altre varie risorse della scienza atte a diminuire notevolmente il costo di produzione. Egli afferma poi esplicitamente che la superiorità delle produzioni di un paese non dipende soltanto dalle sue condizioni naturali; e, parlando della concorrenza dei varî paesi su uno stesso mercato, sostiene che, per una nazione la quale scambia prodotti con altre, il vantaggio " consiste nel poter produrre la merce di miglior qualità o con minor lavoro (in confronto delle altre merci) o forse non con minor lavoro, ma in minor tempo, ritenendo di meno il capitale impiegato. Questo può nascere per vantaggi naturali maggiori, quali sarebbero il suolo, il clima, la ricchezza delle miniere; può nascere per una capacità superiore di lavoratori con una migliore divisione del lavoro, o per migliori strumenti e macchine „ (3).

L'idea di convenienza economica futura risulta evidente dagli scritti del Mill, non solo in quanto egli raccomanda che si promuovano tutti i miglioramenti possibili atti a favorire il passaggio a superiori forme di produzione, ma anche per le considerazioni svolte nel passo spesso citato, in cui egli ammette l'opportunità di concedere, in determinati casi, una protezione temporanea alle industrie nascenti. " Il solo caso in cui si possono difendere i dazi di protezione, in base unicamente ai principî dell'economia politica — scrive Stuart Mill — è quando sono

(1) Cfr. J. Stuart Mill, *Principles of political economy*, libro I, capitolo I, paragrafo 1°.

(2) Id., op. cit., libro IV, capitolo I, paragrafo 2°.

(3) Id., op. cit., libro III, capitolo XXV, paragrafo 2°.

imposti temporaneamente (specialmente in una nazione giovane che è in via di formazione) colla speranza di naturalizzare un'industria forestiera adattatissima per sè stessa alle condizioni del paese. La superiorità che ha un paese sopra un altro in un ramo di produzione nasce spesso soltanto dall'aver esso incominciato più presto. Non può esservi vantaggio inerente da un lato o svantaggio dall'altro, ma solo una superiorità del momento, frutto dell'abilità e dell'esperienza. Un paese, che deve tuttavia acquistare quell'abilità e quell'esperienza, può sotto altri rapporti essere più idoneo alla produzione di quelli che prima entrarono in campo; è del resto una giusta osservazione che non c'è nulla che abbia una tendenza maggiore a promuovere i miglioramenti in un dato ramo di produzione, quanto il farne esperimento sotto l'influenza di nuove circostanze. Non è da aspettarsi che individui, a rischio loro, o piuttosto con loro sicura perdita, vogliano introdurre una nuova manifattura e sostenere il peso di alimentarla, finchè i produttori siano venuti ad un livello di educazione pari a quello di coloro, per i quali i nuovi procedimenti sono tradizionali. Un dazio di protezione continuato per un tempo ragionevole, sarà il modo meglio adatto, con cui una nazione può contribuire a siffatti esperimenti „ (1). Il principio della protezione temporanea alle giovani industrie, svolto dallo Stuart Mill, si collega a quello, già da noi esaminato, che lo Smith esprime nella *Ricchezza delle Nazioni*, quando considera gli effetti di misure protettive su alcune determinate produzioni. Tanto nell'uno quanto nell'altro autore questo principio ci attesta il concetto di convenienza economica futura. Possiamo quindi concludere che il pensiero del Mill sulla protezione delle giovani industrie, insieme con le considerazioni da lui esposte circa le cause del progresso economico, ci dimostra come egli pure ritenesse industrie naturali quelle che sono meglio adatte alle varie e generali condizioni dell'ambiente; e come la loro naturalità fosse fondata non soltanto sulla convenienza presente, ma anche su quella futura.

---

(1) J. Stuart Mill, op. cit., libro V, capitolo X, paragrafo 1°.

9. — Anche dagli autori della scuola ottimista francese vediamo accolto il concetto dinamico di produzione. Il Bastiat ci appare particolarmente favorevole alla concorrenza ed alla libertà (1) e conseguentemente al sorgere spontaneo delle produzioni, là dove queste trovano circostanze favorevoli, sia per l'ambiente naturale, sia per le condizioni del lavoro umano. Partendo poi dal principio di G. B. Say che l'uomo non crea nè i materiali nè le forze della natura ma se ne serve e le combina a vantaggio proprio ed altrui, il Bastiat riconosce la particolare influenza delle doti intellettuali e morali dell'uomo sulla riduzione del costo di produzione (2), in guisa da rendere prospere industrie che prima non lo erano. Oltre che da questo concetto dinamico di produzione, il quale non ammette neanche nel Bastiat quello ristretto di industria naturale già escluso negli economisti da noi precedentemente considerati, si può dedurre il pensiero del nostro autore sulla " naturalità „ di produzione anche dalle idee espresse nei suoi " sofismi economici „. Tutta la sua opera tende a dimostrare che le iniziative private debbono essere lasciate libere, senza dazi e senza premi di sorta, perchè in tal modo si ottengono quelle forme di produzione che sono economicamente più convenienti e con il minimo sforzo si raggiunge il massimo risultato. Prevale quindi in lui il concetto di lasciar libera la distribuzione delle varie produzioni senza alcuna regolamentazione, affinchè esse sorgano e si svolgano secondo le leggi del minimo sforzo; ma questo non significa che, secondo il pensiero del Bastiat, le varie produzioni debbano essere distribuite in base a leggi immutabili dalla natura. Produzione naturale è quindi quella che si sviluppa spontaneamente, e non può essere fondata esclusivamente su materie prime nazionali; tant'è vero che il Bastiat voleva libera dai dazi l'importazione di materie grezze, alla quale dedicò un noto capitolo dei suoi brillanti " Sofismi „.

10. — Il concetto dinamico di produzione come il criterio di convenienza futura sono ormai, col progredire del tempo, ac-

(1) Cfr. Bastiat, *Armonie economiche*, " Biblioteca dell'Economista „, serie I, vol. XII, pagg. 182 seg.

(2) Id., op. cit., pagg. 45 seg.

colti concordemente in economia. Li vediamo perciò anche presso quegli autori la cui concezione economica si scosta non poco da quella degli ottimisti testè considerata. Anzi nel Knies, come nel Roscher e nello Schäffle, il concetto dinamico di naturalità si fa più evidente ancora di quel che risulti dagli scritti del Bastiat.

Questo concetto si associa nel Knies ad una particolare considerazione dell'importanza che assume il fattore " natura " nella produzione. L'elemento naturale è considerato un coefficiente diretto ed indiretto della produzione, in quanto esso esercita un'influenza particolare su di essa ed anche sull'uomo e sull'efficacia del lavoro. Il Knies infatti esamina quello che egli chiama " das individuelle Territorium ", sia sotto l'aspetto della produzione di beni diversi dipendenti dalla natura del terreno e del clima (prodotti alimentari, minerali, combustibili, prodotti greggi per le industrie), sia dal punto di vista del clima, la cui influenza viene esercitata sulla produzione e sull'altro elemento " l'uomo ", modificandone l'indole e l'attività, come pure facendo variare i consumi (combustibili, abiti, alimenti, abitazioni, ecc.), sia infine dal punto di vista della situazione della regione che può confinare col mare o con fiumi importanti ed avere facilità speciali di comunicazioni e dal punto di vista della ricchezza delle acque, come mezzo di comunicazione e come forza motrice. Ma anche l'attività umana coadiuvata dal capitale ha un'influenza notevolissima sulla produzione, secondo il Knies, poichè quello che egli chiama " das nationale Mensch " rappresenta il secondo elemento di somma importanza nella produzione, che si può contrapporre all' " individuelle Territorium ".

Il concetto di convenienza economica futura, come pure quello dinamico di naturalità dell'industria, ci appaiono evidenti dalle considerazioni fatte dal Knies nell'esaminare le teorie del List sulla politica commerciale. Il nostro autore si mostra cauto ed avveduto nell'ammettere le misure protettive, e vuole distinguere i casi in cui la protezione può riuscire utile e quelli in cui è dannosa. Si deve quindi tener conto sia dei vantaggi futuri, sia dei danni presenti, e non bisogna limitarsi al principio affermato dal List che con l'introduzione di dazi e di limitazioni all'importazione si sacrificano valori presenti in vista all'aumento di forze produttive, ma occorre anche considerare le conseguenze

dannose del protezionismo, quali lo sviamento del capitale e del lavoro da rami di produzione meglio adatti alle varie condizioni del paese. In questo autore troviamo adunque una concezione dinamica di produzione ed anche di naturalità dell'industria; ma giova pure osservare che nel suo pensiero l'elemento naturale ha funzioni assai importanti, non soltanto sotto l'aspetto di materie prime, ma anche come complesso di condizioni fisiche dell'ambiente. In vari casi, secondo il Knies, è conveniente elaborare materie prime nazionali; ma questa condizione non è indispensabile perchè l'industria sia naturale. " Se lo sviluppo dell'industria ha raggiunto tale grado che esso si fondi in modo considerevole sulle produzioni estere di materia prima come sui consumi esteri, e quindi il perdurare della produzione industriale e, naturalmente ancor più, ogni ampliamento della medesima appaia dipendente dalle condizioni dei paesi esteri, mentre questi possono fare un'attiva concorrenza prima sui proprî mercati, più tardi anche sugli altri in modo pericoloso; allora una misura protettiva per l'aumento della produzione di materie greggie che appare artificiale secondo il calcolo del momento, e che è collegata con i sacrifici della popolazione non agricola, può apparire come un dovere in vista del benessere durevole della grande massa operaia „ (1). L'indipendenza dall'estero per i prodotti greggi non deve quindi essere una regola costante ed assoluta, ma bensì una norma assai utile in casi determinati.

11. — Alle teorie del Knies si accordano quelle del Roscher, sia per la concezione dinamica di produzione e di naturalità dell'industria, sia per l'importanza assegnata all'elemento " natura „ nella produzione.

L'ampiezza dell'opera del Roscher rende difficile esporre in modo sintetico, come si addice alle presenti note, le sue teorie sull'argomento da noi considerato; converrà perciò limitarci a qualche cenno sui punti essenziali delle numerose opere di questo insigne economista.

Il Roscher nei suoi ingegnosi studi storico-geografico-filo-

---

(1) Cfr. Knies, *Politische Ökonomie von Standpunkt des geschichtlichen Methode*, pag. 297.

sofici intorno ai varî stadi della civiltà, divide la storia di quasi tutta l'economia pubblica completamente sviluppata in tre grandi periodi: nel primo la natura è il fattore dominante quasi assoluto; nel secondo il lavoro acquista un'importanza sempre crescente; nel terzo predomina il capitale (1). L'importanza dei tre elementi essenziali della produzione varia in rapporto al grado di civiltà e di sviluppo economico dei popoli. " Nel sec. XVIII — egli scrive — era esteso il concetto che lo sviluppo naturale portava prima ad una rozza e superficiale lavorazione di materie greggie nazionali, sia per l'esportazione, sia, e specialmente, per il bisogno dei consumatori più poveri del paese. Con progressi ulteriori si venne ad una lavorazione sempre più fine ed a sempre maggiori rapporti con il pubblico più ricco, finchè alla fine la lavorazione di materie greggie estere, eseguita con maggior finezza ed in parte fatta per la riesportazione (delle materie stesse lavorate), raggiungeva l'apogeo del completo sviluppo " (2). Ma il Roscher osserva che questa evoluzione nella produzione industriale non è costante e si avvera soltanto quando un paese ancora rozzo e poco progredito è in rapporto con un altro civile, come, per esempio, le colonie con la madre patria. Secondo il pensiero del Roscher adunque l'industria, nel corso del suo sviluppo storico, incomincia in molti casi, e anzi il più delle volte, a lavorare materie prime nazionali, per procedere poi a un grado più perfezionato di elaborazione di altri prodotti e di altre materie venute anche dall'estero; e nel seguire questa evoluzione dell'industria nella sua storia il Roscher non considera unicamente come naturali quelle manifatture che si fondano su materie prime nazionali, o che dipendono essenzialmente dalle favorevoli condizioni dell'ambiente fisico, ma trova nella elaborazione di materie prime venute dall'estero, dovuta all'abilità più perfezionata del lavoro umano coadiuvato dal capitale, la forma più civile dell'industria, giunta all'ultimo stadio del suo sviluppo. La grande influenza esercitata sulla produzione dal lavoro, dalla

---

(1) Cfr. Roscher, *Principes d'économie politique*, vol. I, pag. 105.

(2) Cfr. Roscher, *Nationalökonomik des Gewerbefleisses und Handels.* Erster Halbband, pag. 77.

divisione del lavoro, dalla cooperazione, come pure dalle invenzioni, dalle macchine e dai progressi tecnici, è da lui riconosciuta, e giudicata anzi di importanza essenziale.

Oltre il concetto dinamico di produzione, anche le idee dal Roscher svolte trattando di politica commerciale dimostrano la sua concezione dinamica di naturalità dell'industria. Il Roscher è convinto che un popolo debba sopportare dei sacrifici temporanei, imposti necessariamente dalla protezione di un'industria che non è ancora economicamente conveniente, per avere poi il vantaggio futuro di novelle attività risvegliate dalla politica di " allevamento „ e di nuove industrie adatte al paese. Ma i dazi debbono sempre essere transitori e temporanei, perchè, al pari del List, egli considera la libertà commerciale come lo scopo finale a cui si deve tendere.

Il Roscher infine, trattando della distribuzione delle industrie, dimostra che su di esse esercita una particolare influenza il centro di consumo, specialmente in periodi di civiltà meno sviluppata, nei quali la divisione del lavoro non è ancora stata applicata su vasta scala. Ma, col progredire della civiltà, assumono maggiore importanza i vantaggi di produzione, cioè l'abbondanza delle materie prime, del lavoro umano e dei capitali. A seconda che prevale l'uno o l'altro di questi elementi l'industria avrà una diversa localizzazione (1). Senza riassumere tutta la notevole teoria del Roscher sulla distribuzione delle industrie, ricorderemo ancora come egli dimostri che " le industrie le quali lavorano materie prime estere hanno una tendenza a stabilirsi in prossimità dei luoghi di sbarco „; e infine anche che la concentrazione della popolazione nelle grandi città offre vantaggi allo stabilimento delle industrie.

12. — Lo Schäffle pure ammette la convenienza di educare e di favorire industrie non ancora spontanee in vista dei vantaggi futuri, ma non crede che questo scopo possa essere raggiunto per mezzo dei dazi, perchè egli giustamente osserva che " è

(1) Cfr. Roscher, *Études sur les lois qui déterminent le siège approprié aux différentes branches de l'industrie*, nelle " Recherches sur divers sujets d'économie politique „ (ediz. Guillaumain), pagg. 134-158.

sommamente pericoloso un sistema di educazione dell'industria nazionale che in un punto precorra, in un altro accarezzi, che voglia far crescere uniformemente ad un tratto, secondo un modello, che infine per favorire alcuni rami d'industria, debba interrompere in più modi una cagione principale di sviluppo industriale degli altri rami, cioè la colleganza loro colle industrie straniere „ (1).

Nello Schäffle è evidente la concezione dinamica di produzione, ritenendo egli il progresso di questa dipendente da molteplici fattori fisici, morali ed intellettuali. E, considerando gli elementi dell'industria, distingue: 1° le ricchezze naturali di forma personale, cioè le doti naturali, o le disposizioni del corpo o dell'animo: essenza natura: 2° le ricchezze acquisite personali, dello spirito o del corpo educati: essenza educazione; 3° le ricchezze naturali esteriori fornite dalla natura: materie, forza ed essere organico della natura; 4° la ricchezza esterna acquisita e preparata, cioè il capitale. Egli afferma così che tanto l'uomo ed il capitale quanto la natura sono fattori essenziali dello sviluppo industriale ed economico di un paese.

Che lo Schäffle non consideri poi come industrie naturali soltanto quelle che si fondano sui prodotti del suolo o sulle favorevoli condizioni d'ambiente risulta anche dal suo concetto di distribuzione topografica dell'industria. Vari elementi influiscono sulla sede delle industrie, ma essenzialmente la prossimità al centro di consumo — specialmente per le industrie di maggior finezza — ed il minor costo, il quale a sua volta dipende: 1° dalla vicinanza delle materie prime — per le industrie per le quali è costoso il trasporto delle medesime e l'elaborazione non ha molta importanza —; 2° dalla facilità di trovare il lavoro specializzato, abbondante e meno costoso; 3° dal costo minore dell'area fabbricabile; 4° dalle forze motrici più facili da utilizzare; 5° dagli strumenti o macchine.

Se adunque la distribuzione delle industrie è determinata non soltanto dalla vicinanza delle materie prime, ma da vari altri elementi che pure influiscono sul costo, come appunto il

---

(1) Cfr. Schäffle, *Il sistema sociale dell'economia umana*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie III, vol. V, pag. 602.

lavoro abile e facile, la forza motrice e le macchine più a buon prezzo e più perfezionate, oppure la prossimità al centro di consumo, se ne deduce il pensiero dell'autore che le industrie possano prosperare naturalmente anche se non si fondano sempre su materie prime del suolo nazionale o sulle favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente. Del resto lo Schäffle chiarisce più oltre il suo pensiero: " Quanto più i materiali greggi e sussidiari (combustibili) scemano nella lavorazione, quanto più facilmente si possono ridurre le spese pel trasporto del materiale, tanto più l'industria si emancipa dal luogo di origine, di lavorazione, d'imbarco delle materie, e si ritrae verso i punti del capitale a buon mercato, del lavoro perfezionato, del gusto delle industrie ausiliarie più nobili e della grande domanda, cioè verso le città „ (1).

Già da oltre un trentennio il Thünen aveva manifestato il concetto di sviluppo delle industrie non dipendenti soltanto dalle condizioni favorevoli dell'ambiente naturale. Egli aveva posto il criterio dell'economicità della produzione nei rispetti del costo a base della teoria della distribuzione delle imprese agrarie, delle varie colture, dal che si potrebbe dedurre che ritenesse naturali quelle produzioni le quali si sviluppano secondo il criterio appunto della economicità — quelle produzioni cioè che trovano naturalmente condizioni propizie ed in particolar modo nei rapporti con le spese dei trasporti — poichè secondo il Thünen le colture dovrebbero distribuirsi ad una distanza dal mercato in ragione inversa al costo di trasporto del prodotto rispettivamente ottenuto. A proposito poi della distribuzione territoriale delle industrie dice chiaramente che altri elementi, oltre quello della materia prima, come per esempio il saggio di interesse o l'ampiezza del mercato, influiscono sulla loro distribuzione; e che alcune di esse non sorgono soltanto là dove la materia prima è più a buon mercato, ma piuttosto dove trovano un complesso di circostanze favorevoli (2).

---

(1) Cfr. Schäffle, op. cit., " Biblioteca dell'Economista „, serie III, vol. V, pag. 552.

(2) " Nella pratica noi troviamo che in tutti i paesi ricchi il saggio " dell'interesse è più basso di quel che sia nei paesi poveri; è questo un

Il concetto visto nel Thünen che le produzioni si sviluppano dove trovano un complesso di condizioni maggiormente propizie viene più tardi meglio svolto dal Sax. Da entrambi si sostiene il principio che la distribuzione delle produzioni è determinata dall'economicità delle medesime, sulla quale viene esercitata larga influenza, secondo il Sax, dai perfezionamenti dei mezzi di trasporto, e secondo il Thünen dal costo di trasporto. Ma il Sax inoltre vede nell'avvenire l'emancipazione totale dell'industria dalla dipendenza locale, dovuta necessariamente al progresso ed alla civiltà più avanzata. " La vicinanza dei luoghi di approvvigionamento delle materie prime e sussidiarie alla sede dell'impianto industriale perdette molto della sua importanza per l'industria, mentre prima tale vicinanza aveva per una data produzione industriale una importanza decisiva. In altre parole, i vantaggi derivanti dal trovarsi un dato ramo d'industria in mezzo od in grande vicinanza alle materie prime, vengono ad essere in più o meno larga misura ridotti. D'altrettanto invece dovette accrescersi l'impor-

---

" fatto che deriva dalla natura e dalla forza delle cose o dalla divisione " dei diversi Stati? Ecco ciò che noi abbandoniamo al giudizio particolare " di ciascheduno. Ora vi sono manifatture, le cui spese annuali, in grandissima parte, si compongono degli interessi dovuti al capitale, ed in " minima parte delle spese di mercede ed acquisto della materia prima. " Tutte queste manifatture dovranno avere la loro sede nei paesi ricchi, " quand'anche la mercede ed il prezzo della materia prima vi siano molto " elevati. Si dovrebbe dunque in siffatta indagine dividere il prezzo delle " merci in tre parti: salario del lavoro, interesse del capitale, e rendita " territoriale. Dall'ampiezza del mercato dipende l'importanza e lo svolgimento che una manifattura possa acquistare in un dato luogo. Dalla sua " importanza dipende il grado fino a cui debbasi favorire la divisione del " lavoro, e sostituire le macchine alla forza umana. Queste condizioni, come " Adamo Smith lo prova, hanno una decisiva influenza sul prezzo della " merce.

" La sana estimazione di questi due punti di veduta farà comprendere " perchè certe fabbriche che sembrano appartenere ai paesi poveri perchè " esse vi trovano a buon mercato la loro materia grezza, si stabiliscono " tuttavia con più vantaggio nei paesi ricchi, e perchè i poveri vanno a " cercarvi merci a prezzo più basso di quel che sarebbe se le fabbricassero " essi medesimi „. Thünen, *Lo Stato isolato*, " Biblioteca dell'Economista „, serie II, vol. II, pag. 1003.

tanza di altri vantaggi relativi alle condizioni di produzione, quali quelli riguardanti la forza del lavoro, i capitali, la posizione della intrapresa industriale rispetto al mercato del credito, ecc., il che importar doveva la concentrazione delle industrie nelle grandi città. Epperò anche qui, come per l'agricoltura, ma in senso contrario, si ha un movimento di emancipazione dell'industria dalla dipendenza locale „ (1).

Il concetto di indipendenza dalla prossimità delle materie prime nella distribuzione topografica delle industrie si fa sempre più evidente col progredire della tecnica della produzione e della teoria economica, di cui sono espressione evidente gli scritti di Loria (2), Marshall (3), Cunningham (4), Weber (5) e di altri economisti moderni.

13. — Col progredire della scienza economica, tanto il concetto dell'indipendenza dalla vicinanza delle materie prime nella localizzazione delle industrie, quanto il criterio della convenienza economica futura e la concezione dinamica di produzione sono concordemente accolti.

Non occorre quindi soffermarsi a considerare il concetto di naturalità dell'industria negli economisti contemporanei — nè potrebbe del resto un'ampia disamina del pensiero di tutti i principali autori essere contenuta nei limiti che ci siamo proposti nel presente studio —: ma basterà qualche cenno per dimostrare la continuità, anzi l'affinarsi del pensiero economico, per quel che ha tratto alla questione che è oggetto del presente studio:

La concezione dinamica di produzione del Leroy-Beaulieu è troppo nota per doverne ancora trattare diffusamente. Egli analizza i fattori del progresso economico, distinguendoli in

(1) Cfr. Sax, *Dei trasporti e delle comunicazioni*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie III, vol. XI, pag. 607.

(2) Cfr. A. Loria, *Ricerche ulteriori sulla distribuzione topografica delle industrie*, “ R. Accademia dei Lincei „, 1898.

(3) Cfr. Marshall, *Principî di economia politica*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie IV, vol. IX, parte III, pagg. 307 seg.

(4) Cfr. Cunningham, *The localisation of industry*, “ Economic Journal „, 1902, pagg. 501 seg.

(5) Cfr. A. Weber, *Ueber den Standort der Industrien.*

natura, lavoro e capitale. Sebbene il Leroy-Beaulieu abbia un concetto molto largo dell'elemento “ natura „, poichè vi comprende anche la natura umana, tuttavia attribuisce un'importanza notevolissima ai fattori extra-fisici della produzione, la cui naturalità dipende dal vasto complesso di circostanze fisiche, intellettuali, morali e storiche del paese. Che il Leroy-Beaulieu abbia una concezione dinamica di naturalità dell'industria risulta anche dalle considerazioni da lui esposte sull'evolversi delle varie forme di produzione. Un'industria si può trasformare in un'altra, una forma di produzione può diventare naturale non soltanto per effetto dei dazi protettori, ma anche, e specialmente, per i molteplici fattori del progresso economico. “ L'esperienza dimostra che anche sotto il regime della piena libertà commerciale le industrie finiscono per diffondersi dai paesi nei quali sono più anticamente stabilite e più prospere in quelli nei quali esse non trovavansi originariamente, ma che offrono loro circostanze favorevoli „. Questo passaggio da una industria all'altra nei varî paesi si compie sempre spontaneamente e gradatamente secondo regole di opportunità: e l'autore si chiede se sia vantaggioso forzarlo od accelerarlo: “ Havvi un vantaggio ad accelerare questo movimento? Può darsi che in certi casi, per motivi piuttosto politici che economici, un importante paese continentale nello stato attuale del mondo, cioè d'ostilità armata delle diverse nazioni, possa avere interesse a possedere, in certa misura, le principali industrie..... Si tratta allora di considerazioni extra-economiche „ (1). Il concetto di naturalità dell'industria è adunque nel Leroy-Beaulieu dinamico e dipendente, con larghezza di vedute, più che dalle varie forme di politica commerciale, essenzialmente dai fattori morali, intellettuali e storici del progresso economico.

Il Nicholson, nell'acuta analisi che fa dei fattori della produzione, osserva che, oltre agli elementi naturali, la divisione e l'efficacia del lavoro sono di grande importanza nella produzione, e parimenti i fattori morali e mentali, specialmente nei tempi moderni. “ Il moderno sistema industriale

---

(1) Cfr. Leroy-Beaulieu, *Trattato di economia politica*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie IV, vol. IX, parte II, pag. 524.

implica per la nazione nel suo complesso capacità ed attività intellettuali e morali molto più elevate e più complesse „, poichè “ i fattori mentali e morali della produzione sono ora più che mai di importanza maggiore che le condizioni fisiche „ (1). Il concetto di progresso economico diventa più complesso nel pensiero del Nicholson, e sempre più dimostra l'importanza degli elementi non fisici. Caratteristiche di una società in via di progresso sono per lui: un aumento della popolazione associato ad un miglioramento nella qualità; un accrescimento nella ricchezza materiale ed immateriale; i perfezionamenti nei mezzi di produzione ed, infine, una migliore distribuzione delle ricchezze.

Anche il concetto di distribuzione territoriale ci dimostra come i vantaggi naturali non siano i soli a determinare la scelta della sede delle industrie; perchè “ in molti casi cause politiche e sociali sono stati gli elementi principali che hanno determinato lo stabilirsi di certe industrie in date località „ (2).

Il concetto di convenienza futura appare manifesto nel Nicholson quando egli esamina i mezzi più efficaci per raggiungere il massimo progresso industriale e valuta i danni immediati ed i possibili vantaggi futuri derivanti da misure protettive. La convenienza economica presente è considerata insieme con quella futura particolarmente in quella parte dell'opera sua in cui si tratta del regime da adottarsi per favorire le giovani industrie, alle quali non crede praticamente conveniente nè politicamente opportuno accordare il regime protezionista che in teoria si potrebbe giustificare (3). Il concetto dinamico di produzione, come quello di convenienza futura, evidenti nell'opera del Nicholson, dimostrano la concezione dinamica di naturalità dell'industria.

Affine alla concezione dinamica di naturalità che abbiamo rilevato nel Nicholson è quella del Marshall, il quale mette in rilievo l'importanza dei fattori non fisici nella produzione, e specialmente dell'educazione industriale, dell'abilità tecnica degli operai, delle invenzioni, dell'organizzazione. Il concetto dina-

---

(1) Cfr. Nicholson, *Principî di economia politica*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie V, vol. II, pag. 641.

(2) Id., op. cit., loc. cit., pag. 95.

(3) Id., op. cit., loc. cit., pag. 918.

mico di produzione ed il concetto di convenienza futura nell'illustre economista sono troppo noti per doverne qui trattare. Ricorderemo ancora la sua profonda ed ampia disamina del problema di distribuzione topografica delle industrie, il cui sviluppo naturale appare dipendente anche da fattori extra-fisici. Pur riconoscendo l'importanza delle condizioni naturali nella localizzazione delle industrie, egli attribuisce il sorgere di molte di esse all'immigrazione di maestranze abili e favorite dai governanti. " La maggior parte dell'industria manifatturiera dell'Inghilterra — egli scrive — prima dell'epoca del cotone e del vapore si svolse sotto la guida delle colonie di artigiani fiamminghi ed ugonotti, molte delle quali si erano formate per diretta disposizione dei re Plantageneti e dei Tudor „ (1). Distinguendo poi tra le varie industrie egli scrive: " La caratteristica delle industrie manifatturiere, la quale fa sì che esse offrano generalmente i migliori esempi dei vantaggi della produzione su larga scala, si è la possibilità di scegliere liberamente il luogo in cui funzioneranno. Esse sono così in contrasto da un lato con l'agricoltura e con le altre industrie estrattive (miniere, cave, pesca, ecc.), la cui distribuzione geografica è determinata dalla natura, e dall'altro lato con le industrie che fanno o riparano le cose che corrispondono ai bisogni speciali del singolo consumatore dal quale non si possono mai molto allontanare, almeno senza grave perdita „ (2). Oltre al criterio della vicinanza alla materia prima, anche varî altri sono ammessi dal Marshall per determinare la localizzazione delle industrie; il loro sviluppo naturale non appare quindi dipendente soltanto dai fattori dell'ambiente fisico — il che del resto ci viene anche attestato nel modo più palese dalla concezione dinamica di produzione che ha il nostro autore.

Anche il Sidgwick fa dipendere la localizzazione dell'industria non soltanto dalla facilità con la quale si possono ottenere le materie greggie od ausiliarie, ma anche dall'" influenza delle diverse razze, dalle condizioni sociali e politiche in cui si

---

(1) Cfr. Marshall, *Principî di economia*, " Biblioteca dell'Economista „, serie IV, vol. IX, parte III, pag. 308.

(2) Cfr. Marshall, op. cit., loc. cit., pag. 315.

trovano le persone che abitano le varie località „ (1). La concezione dinamica di naturalità dell'industria risulta evidente nel Sidgwick sia dalla concezione dinamica di produzione sia da quella dell'importanza comparativa dei beni futuri rispetto a quelli presenti. La considerazione della convenienza economica futura è manifesta nel Sidgwick, ad esempio, per la trattazione del problema della protezione delle industrie nascenti, ammessa da un punto di vista più teorico che non pratico. Anche per considerazioni economiche egli acconsente all'intervento statale in parecchi casi, e riconosce che dal punto di vista teorico " la protezione in certi limiti sarebbe utile alla nazione che ha adottato il regime protettivo, e forse persino al mondo se essa potesse essere contenuta in certi confini „ (2). Egli ammette inoltre, in teoria, l'opportunità di proteggere una produzione che può cessare temporaneamente di essere economicamente conveniente ad un dato paese a cagione della concorrenza transitoria di un altro; poichè essa, sostenuta nel periodo difficile, potrebbe poi riacquistare maggiore naturalità nella nazione dove prima si sviluppò, avendo perduta la convenienza temporanea nel paese concorrente per varie ragioni, come per esempio, per esaurimento della fertilità del terreno.

È naturale quindi per il Sidgwick non soltanto l'industria che è economicamente conveniente per il presente, ma anche quella che lo sarà in avvenire, e la sua naturalità non dipende soltanto dalle condizioni favorevoli dell'ambiente naturale ma dalle varie condizioni generali del paese.

La convenienza economica di proteggere le industrie nascenti è considerata anche dal Bastable. " Si può concepire — egli scrive in proposito — che una particolare industria possa al principio non essere fonte di lucro, e possa diventare più tardi assai rimuneratrice. Ma la questione da definire è piuttosto questa: la perdita certa ed immediata risultante dalla protezione sarà superata dai benefici futuri che darà la nuova industria? „. Egli non lo crede, perchè ritiene " che l'intervento governativo, per quel che si riferisce alla direzione dell'at-

(1) Cfr. Sidgwick, *The principles of political economy*, pag. 373.
(2) Id., op. cit., pag. 487.

tività individuale, è complessivamente più dannoso che utile. e che la maggior parte delle industrie che sono particolarmente sviluppate in grazia ai dazi protettori, sono piuttosto una perdita che un guadagno per il paese nel quale sono state stabilite „ (1).

Appare adunque evidente nel Bastable, anche soltanto dal passo citato, come egli considerasse l'importanza comparativa dei beni futuri rispetto a quelli presenti e come il suo concetto di naturalità si fondasse non soltanto sul criterio di convenienza economica attuale, ma anche su quello della convenienza futura.

La concezione di convenienza economica futura è manifesta anche nel Taussig, il quale a proposito della protezione delle giovani industrie distingue i varî casi nei quali ritiene che essa possa riuscire utile, mettendo a raffronto l'utilità dei beni futuri con quelli degli interessi presenti (2).

Dall'esame dell'opera dello Schmoller risulta evidente la concezione dinamica di produzione (3), come pure quella della distribuzione delle industrie basata sia sui vantaggi naturali, sia sull'influenza dei fattori non fisici (4). In special modo egli considera l'importanza degli interessi futuri nell'economia delle nazioni, anzi sotto questo punto di vista muove critiche ai classici, accusandoli di apprezzare troppo l'aumento immediato della ricchezza senza preoccuparsi delle utilità future. Lo Schmoller, propugnando la teoria delle forze produttive sostenuta dal List, esprime chiaramente il suo concetto dinamico di naturalità.

Sulla concezione prevalentemente dinamica della vita economica si basa tutta l'opera di J. B. Clark, il quale considera la società in continua evoluzione, poichè “ lo stato statico è uno stato ipotetico „ (5). Una società in continua trasformazione per l'aumento della popolazione e della ricchezza, per il perfe-

---

(1) Cfr. Bastable, *Theory of international trade*, capitolo IX, pag. 140.

(2) Cfr. Taussig, *The Tariff history of the United States*, pag. 3.

(3) Cfr. G. v. Schmoller, *Lineamenti di economia politica*, “ Biblioteca dell'Economista „, serie IV, vol. X, pagg. 213-14.

(4) Id., op. cit., loc. cit., pag. 548.

(5) Cfr. J. B. Clark, *Principes d'économique dans leur application aux problèmes modernes de l'industrie et de la politique économique.*

zionamento del metodo e dell'organizzazione, dovrà senza dubbio evolversi economicamente, valendosi non soltanto delle materie prime nazionali ma anche dei prodotti greggi esteri che potrà elaborare coll'aiuto della tecnica progredita, rendendo così naturale, cioè adatta al paese, la produzione che si fonda su di essi.

La naturalità dell'industria non dipende quindi soltanto dalle condizioni fisiche dell'ambiente, ma anche dalle varie condizioni generali del paese, e non solamente dalla convenienza economica presente, ma anche da quella futura.

Senza proseguire più oltre nell'esaminare il pensiero di altri economisti, possiamo concludere come sia oramai concordemente ammesso il concetto dinamico di naturalità dell'industria, per il quale si ritiene come economicamente conveniente quell'industria che è adatta alle varie condizioni fisiche, morali, intellettuali e sociali di un paese, non soltanto in considerazione della convenienza economica che essa presenta attualmente, ma anche per la convenienza futura.

III.

Il lento evolversi dei concetti di convenienza economica attuale e futura, la prevalenza della concezione dinamica di produzione ed il criterio di una distribuzione territoriale delle industrie, che sempre più si manifesta indipendente dalla prossimità delle materie prime, ci portano ad escludere l'interpretazione data da alcuni scrittori al concetto di naturalità delle industrie, nel senso cioè che siano naturali ad un paese soltanto quelle che si possono fondare sopra materie prime (prodotti greggi e combustibili) provenienti dal paese stesso oppure sopra le favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente. Nemmeno negli economisti italiani del secolo XVIII troviamo un siffatto concetto di naturalità delle industrie, sebbene essi non di rado dimostrino nei loro scritti una speciale propensione per quelle manifatture che elaborano materie prime nazionali o che si fondano sulle favorevoli condizioni fisiche dell'ambiente. Ma meglio definito e più evoluto appare il concetto di naturalità dell'industria nei classici, i quali ritengono come naturali al paese

tutte quelle forme di produzione che sono adatte non solo alle condizioni fisiche, ma anche a quelle morali, intellettuali e sociali dell'ambiente. Il concetto dinamico di naturalità dell'industria è dimostrato non soltanto da quello pure dinamico di produzione, ma anche dal criterio di convenienza futura, manifesto nelle loro opere. Un siffatto concetto vediamo chiaramente espresso da Adamo Smith, il quale, anche per quel che si riferisce alla naturalità delle produzioni, ci appare come il creatore dei germi di molte idee che si svilupparono poi nella scienza economica e che trovarono applicazione nella politica di molti Stati. La concezione dinamica di naturalità dell'industria si evolve poi e si associa ancora negli economisti aderenti alle dottrine classiche, col progredire del tempo, ond'è che la critica ad essi fatta, quella cioè di aver avuto una concezione statica di industria naturale, appare priva di fondamento.

Non si deve adunque credere che la convenienza economica significhi soltanto convenienza attuale nella scienza economica classica, la quale sarebbe, secondo alcuni recenti critici, " soltanto „ lo studio " dell'economia della convenienza attuale „. Anzi, si nota, come giustamente osserva l'Einaudi, " una sempre più fine chiarificazione dei concetti di convenienza attuali e futuri, di un'insistenza meticolosa sull'importanza comparativa dei beni futuri rispetto ai beni presenti, sulla capacità od incapacità delle diverse specie di uomini e di enti a valutare la convenienza degli investimenti produttivi in lungo tempo invece che in breve, sugli interessi duraturi della collettività in contrapposto agli interessi momentanei del singolo „ (1). Infine il concetto dinamico di produzione, come quello di convenienza futura, è concordemente ammesso non soltanto dai classici, ma anche da coloro che dalle loro dottrine dissentono per quel che ha tratto alla politica commerciale. Il concetto dinamico di naturalità non dipende infatti da quello di protezionismo, nè esso è, come si volle asserire, privilegio di quegli autori i quali ritengono che soltanto un regime protettivo possa sviluppare le forze produttive di un paese e favorire il passaggio da un'in-

---

(1) Cfr. L. Einaudi, *Per una nuova storia delle dottrine economiche*, nella " Voce „ del 31 dicembre 1915, pag. 715.

dustria ad un'altra, ma dipende piuttosto dal concetto della capacità di evolversi delle varie produzioni e dalla considerazione appunto non solo della convenienza presente ma anche di quella futura che appare manifesta nel pensiero degli economisti di più disparate tendenze.

Il passaggio da un'industria ad un'altra, il naturalizzarsi cioè di un'industria in un paese dove prima essa non era economicamente conveniente, può dipendere da varî fattori, come: la sua organizzazione, la sua estensione, il contributo dei ritrovati scientifici, l'educazione delle classi lavoratrici — il formarsi insomma di un ambiente intellettualmente e moralmente adatto allo sviluppo della nascente industria. Che questo graduale passaggio si compia, secondo le idee diverse e le diverse scuole degli economisti, sotto l'azione della libera concorrenza o sotto quella di un regime protezionista esplicantesi con dazi, tariffe ferroviarie di favore, premi di produzione e altri mezzi simili, non implica dal punto di vista del dinamismo di naturalità dell'industria alcuna differenza sostanziale. Tanto in un caso quanto nell'altro il concetto di naturalità dell'industria si basa sopra quello di convenienza economica presente e futura, e tanto in un caso quanto nell'altro il fondamento del concetto dinamico di naturalità è quello dei vantaggi futuri della produzione. In linea generale si può dire quindi che la concezione di industria naturale dei liberisti come quella dei protezionisti, considerate nella loro essenza, sono dinamiche entrambi, poichè tanto dagli uni quanto dagli altri si ammette la possibilità che diventino naturali ad un paese industrie le quali prima non lo erano, anzi si considerano addirittura come tali quelle che hanno la possibilità di diventare economicamente convenienti. La differenza fra le due opinioni consiste nei mezzi ritenuti migliori per rendere naturale un'industria, anzichè nell'essenza del concetto di naturalità.

Coll'evolversi della tecnica della produzione si evolve anche la teoria economica, la quale assegna sempre minore importanza alla materia prima ed alle condizioni fisiche dell'ambiente, sia nella localizzazione delle industrie, sia nel considerare naturali le varie produzioni. È una delle più belle pagine nella storia dell'umanità quella del suo continuo, crescente dominio sulla natura. L'uomo che fece sorgere giardini dove prima erano

paludi, che coprì di verdura aride pianure con l'irrigazione, che strappò fertili praterie ai flutti del mare, seppe anche nel campo industriale accrescere la sua indipendenza dalle materie prime e dalle condizioni fisiche dell'ambiente per mezzo dei mirabili progressi della tecnica e della organizzazione e con la sapiente utilizzazione dei più perfezionati e più civili mezzi di produzione. Questo dominio progressivo dell'uomo sulla natura si rispecchia anche nella concezione di industria naturale nella storia economica. In essa l'elemento fisico che aveva qualche importanza presso alcuni economisti del secolo XVIII, diventa sempre meno considerevole. Poco per volta si forma un concetto più complesso di industria naturale nel senso di industria adatta alle condizioni non soltanto fisiche, ma anche intellettuali, morali e sociali del paese; e col progredire del tempo, a mano a mano che l'umanità dà maggior peso agli interessi durevoli futuri in contrapposto a quelli attuali e temporanei, si sviluppa il concetto dinamico di naturalità. Il quale trova il suo fondamento nella considerazione della convenienza futura, oltre che in quello di convenienza presente, e dimostra un'idea più progredita e più vasta del vero fine dell'attività umana, che non deve essere guidata soltanto dalla considerazione dei vantaggi immediati temporanei, ma deve essere rivolta, anche a costo di sacrifizi presenti, ad assicurare al paese un continuo e durevole progresso per l'avvenire.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Dicembre 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica due Note ministeriali del 16 corr., secondo cui con Decreti luogotenenziali del 7 corr. sono state approvate la rielezione del Socio Einaudi a Tesoriere dell'Accademia per il triennio dal 1° luglio 1916 al 30 giugno 1919, e l'elezione del Socio Parona a Segretario di questa Classe per il triennio dal 16 novembre 1916 al 15 novembre 1919.

Il Socio Guareschi presenta per la stampa negli *Atti* una sua comunicazione *Sull'origine e sull'uso della parola* “ *Solfo* „.

LETTURE

Sull'origine e sull'uso della parola " solfo ".

Comunicazione del Socio I. GUARESCHI.

Sino dall'inizio della mia già lunga carriera ho sempre osservato come alcuni chimici scrivessero *solfo* ed altri *zolfo*; e così anche gli scrittori non chimici. F. Selmi però, ottimo conoscitore della lingua italiana, scriveva sempre *solfo*.

Anche attualmente spesso i non chimici, e taluni chimici, scrivono *zolfo* e non *solfo*. Ciò a me sembra non esatto ed anzi direi erroneo, e per più cagioni. Non sono filologo e potrò errare, ma come chimico penso proprio che si debba scrivere *solfo*.

È questione meschina, forse dirà qualcuno; ma io non la ritengo tale, perchè tutto quanto riguarda la nostra bella lingua, la lingua di Dante, è importante; e il divino poeta ha la sua parte anche nella questione, diciamo, solfurea.

" Un nom ", scrive Humboldt, " devient souvent un monument historique, et la recherche des étymologies, l'analyse philologique, bien que raillée par les ignorants, n'en porte pas moins ses fruits " (1).

A mio avviso non pochi cultori delle scienze trascurano la nostra lingua, eppure bisogna essere persuasi che la conoscenza della propria lingua è sempre una forza anche per chi non è letterato di professione.

Moltissimi dei nostri Dizionari della lingua italiana e di scienze, hanno le voci: *solforico acido, solforoso, solfati, solfiti, solfoderivati* (e mai *zolfoderivati*), *solforato*, *solfureo*, *solfonici acidi,* ecc., ecc., ma poi portano la voce: *zolfo*, anzichè *solfo*.

In francese si scrive *soufre* e nel sec. XVI anche *soulphre*.

(1) " Cosmos ", II, pag. 487.

Lo solfo era dai latini denominato *sulfur* o *sulphur*, e dai greci *Θεῖον* (1); da ciò il nome di *tiosmo*, odore di solfo, e quello di *composti tionici* dato dai chimici a molti composti dello solfo. O forse *fuoco divino*?

Io ho sempre tenuto per vero che la parola *solfo* derivi in fondo da *sal* oppure *sol*, cioè *sale*, e da *πῦρ fuoco*, cioè prodotto salino vulcanico, prodotto dal fuoco: e anche se lo consideriamo derivato dal latino *sulfur* o *sulphur*, perchè noi dobbiamo scrivere e pronunciare *zolfo*?

Lo solfo nativo quale si trova presso i vulcani (Vesuvio, Etna, quasi i soli o i principali vulcani conosciuti dagli antichi) lo si chiamava dagli antichi *solfo vivo* (*sulfur vivum*) ed anche col nome di *apiro* o *ἄπυρος* (2), perchè non vi era bisogno di impiegare il fuoco per estrarlo come invece l'altro solfo che si chiamava *gleba* o minerale di solfo. *Solfo apiro* per lungo tempo significava *solfo nativo* o *solfo vivo*. Gli antichi credevano che lo solfo contenesse del fuoco per la sua facilità ad accendersi, e già Plinio scriveva: *Quo apparet ignium vim magnam etiam ei inesse* (3). Che la parola *solfo* in origine fosse in relazione con *fuoco*, si desume anche dal fatto che lo solfo minerale era, ancora nel 1680 (4), considerato come un *bitume duro e terroso, proveniente dal Vesuvio.*

---

(1) I greci erano persuasi che i fulmini di Giove fossero solforosi e perciò denominarono lo solfo *Θεῖον*. E ciò in base all'odore che assume l'atmosfera dopo il fulmine; odore solfureo, come si diceva, o meglio di ozono.

(2) Vedi Berthelot, *Introduction à l'étude de la chimie des anciens et du moyen-âge*, pag. 267. Alcuni antichi autori tradussero erroneamente la parola *apiro* per *non combustibile*.

(3) Hoefer, *Histoire de la Chimie*, 2me éd., I, pag. 145.

(4) Pomet, *Histoire générale des Drogues*, vol. II. Il Kircher nel bellissimo capitolo I: *De admiranda Sulphuris natura, et proprietate*, della sua opera: *Mundus Subterraneus in XII Libros digestus*, ecc., Amsterdam, 1678, tomo II, pag. 166, ammira i greci che chiamavano lo solfo *Θεῖον divinum*. Ricorda gli antichi che scrissero sullo solfo: Plutarco, Aristotele, Mattioli, Cesalpino ed altri; distingue lo solfo *apiro* da quello che si estrae per fusione dal minerale e ricorda le diverse opinioni intorno alla natura dello solfo, fra le quali quella che lo considera come un bitume. In un altro lavoro farò vedere quante interessanti notizie anche sulla chimica sono in quest'opera. Interessante per la storia della chimica tossicologica è il

Il nome di *solfo* si collega inoltre, come dissi, con quello di *sale*; ed invero la parola *sale*, secondochè trovo nel *Vocabolario etimologico della lingua italiana*, 1907, di O. Pianigiani: " in " prov. è *saus*, in franc. *sel*, in ingl., dan. e sved. *salt*, in antico " slavo *soli*, in polacco *sol*, in russo *sole* e boemo *sul*, in latino " *sal* e greco *als* per *sals*; deriverebbe dalla radice indoeuropea " *sar* = *sal* che vuol dire scorrere, radice che si trova nel san- " scrito *sar-ati* scorrere, *sara* siero e *salilà* fiume, onda, acqua ".

Il nome di *sale* si applicava anticamente e nel medio evo ad un gran numero di sostanze che poi si riconobbero di natura ben diversa (1).

Si noti che nel dialetto sardo si scrive *sulfuru*, nel provenzale *solfre, sulpre, solpre*, in catalano *sofre*; vall. *soûf* e solforare in vall. si dice *soufreû*; in fiamm. *solfer*. Secondo alcuni il latino *súlphur* si connette o deriva dal sanscrito *çulvâris*, e allora se il *ç* sta per *z* (o deriva da *z*, come afferma E. D. Grand) bisognerebbe pronunciare *zulvari* o meglio *sculvari*. Ma mi pare un argomento debole, dato anche che la lingua sanscrita avesse la *zeta*. Però la lingua sanscrita veramente non l'ha fra i suoi suoni; questa lettera è stata presa, scrive il Pianigiani, ai Fenici che la chiamarono *Tsad* = ebr. *Zadî*. I greci moderni raddolcirono la pronunzia dell'antica *zeta* o *zita* (2).

Nella lingua spagnuola si scrive *azufre* o *asufre* e in portoghese *enxofre* o *xofre*. Queste due parole ci possono forse spiegare come ne sia venuto l'italiano *zolfo*. Geber, famoso chimico, o alchimista, arabo del secolo VIII, osservò che il solfo col mercurio per sublimazione forma il cinabro, detto allora *uzufur* (3).

---

libro IX del vol. II, pag. 125: *De venenosis seu lethiferis mundi subterranei fructibus*, ecc., i cui nomi, proprietà, sintomi, rimedi e antidoti sono raccolti in alcune belle tavole alla fine del libro. Nel libro XI discorre della *Chymiotechnia*, dell'origine dell'alchimia, della trasformazione dei metalli gli uni negli altri.

(1) Non ho potuto consultare l'opera di Blümmer, *Festber. d. Univers. Zürich z. Begrüssung d. 39. Philologenvers.* (1887), nella quale forse trovasi qualche notizia relativa all'origine della parola *solfo*.

(2) Vedi O. Pianigiani, *Dizionario Etimologico*, loc. cit., lettera *Z*; Paul Regnaud, *La Grande Encyclopédie*, vol. XXXI, pag. 1196.

(3) Cfr. Hoefer, *Histoire de la Chimie*, I, pag. 332.

E già ai tempi di Alberto Magno (secolo XIII) (1) il cinabro si chiamava *azurium*, ed egli stesso prescrive di prepararlo col mercurio e lo solfo. Ed allora si capisce la derivazione spagnuola di *azufre*, di origine araba.

Il nome di *azufral* per indicare *solfatara* (o in franc. *soufrière*) si usa ancora nell'America del Sud. Il celebre chimico Boussingault nella sua memoria: *Recherches chimiques sur la nature des fluides élastiques qui se dégagent des Volcans de l'équateur* (2) descrive la *azufral du Quindiù* o *solfatara di Quindiù* e analizzò i gas che ivi si sviluppano (3).

Fouqué nel suo viaggio alle isole Azzorre parla delle *stufe di solfo* che nel paese chiamano *Furnas d'Enxofre* (4).

Una delle principali solfatare del Chilì si chiama anche oggi solfatara di *Cerro-Azul* (5).

Forse la denominazione usata da molti in italiano *zolfo* è ancora un residuo spagnolesco. Prima della dominazione spagnuola in Italia probabilmente non si usava *zolfo* (6), ma bensì *solfo*.

Giuseppe Meini, condirettore del grande *Dizionario della Lingua Italiana* di Tommaseo e Bellini nell'articolo relativo

(1) Alberto Magno nel suo libro: *Compositum de compositis* descrive minutamente la preparazione dell'*azurium* o *azur* mediante lo solfo ed il mercurio (V. anche la traduzione francese recente di quest'opera).

Nel *Compositiones ad tingenda musiva*, ecc., o ms. di Lucca del sec. VIII, si descrive la preparazione del cinabro o *cinabarim* collo solfo e il mercurio, ma il cinabro non vi è denominato *azurium*, come poi si trova in Alberto Magno (V. il mio *Vannoccio Biringucci e la chimica tecnica*, 1904, pag. 5).

(2) " A. Ch. ", 1833 (2), t. 52, pag. 11.

(3) Per *azufral*, solfatara, vedi anche Humboldt, " A. Ch. " (2), 1824, t. 27, pag. 130.

(4) *Voyages géologiques aux Açores*. " Revue des Deux Mondes ", 1873, vol. 103, pag. 64.

(5) Domeyko, *Mém. sur les sulfatares latérales des volcans*, in " Ann. des Mines ", 1876 (7), IX, p. 145.

Forse anche la parola *Lapislazuli* ha qualche relazione collo solfo che contiene? Viene da *lapis* pietra e *Làzulus* o *Làzur* azzurro, detto anche *Lasurstein*. Forse in origine il nome non voleva significare solamente azzurro. Noi sappiamo che il lapislazuli contiene dei solfuri e che calcinato dà gas solforoso.

(6) Alcuni scrittori del secolo XIV-XV lo chiamavano anche *zolfore*, come ad esempio Cennino-Cennini: *Il libro dell'Arte*, cap. XLV.

alla lettera *Z*, che vi è molto bene e a lungo discussa e documentata, scrive nel vol. IV, parte II, pag. 1928: " Coll'*S*, ora " scempia, ora doppia. *Prose* (lib. I) " *S* simplex... saepe solemus " pro ζ geminatam ponere, ut patrisso pro *πατρίζω*, pitisso pro " *πιτίζω*, massa pro *μάζα* ". Da *Ζάκυνθος* (Zante, madre-patria " di Sagunto, nella Spagna) fecero Saguntum; da *Ζῆθος* Sethus " e noi dal latino Saburra, Zavorra, e da *sulfur*, zolfo ".

Dunque la *s* di *sulfur* fu dall'uso (e direi dall'abuso) trasformata in *z*.

Ma tutti i nostri primi grandi scrittori o meglio creatori della nostra lingua scrivevano *solfo*.

Dante scrisse *solfo* e non ha la parola *zolfo*:

> Non per Tifeo, ma per nascente solfo.
> *Par.* VIII, v. 70.

Ed è poi curioso come i suoi commentatori, quali ad esempio il Fraticelli, il Campi ed altri, scrivano *zolfo*.

Il Petrarca scriveva:

> Solfo ed esca son tutto, e 'l cuore un fuoco.
> PETR., Son. 142.

Ed anche il Boccaccio nella Nov. 50:

> N'uscì fuori, il maggior puzzo di solfo del mondo.

Vannoccio Biringucci, senese, nella sua *Pirotechnia*, 1ª ed., 1540, ed anche nelle edizioni posteriori, nel libro II specialmente ed in altre parti della sua classica opera, scrive sempre *solfo* e mai *zolfo*. Si noti che il libro del Biringucci deve essere riguardato come il primo Trattato di chimica inorganica moderno (1).

Altri scrittori tecnici dei secoli XVI e XVII scrivevano invece *zolfo*, quali Benvenuto Cellini (2), Antonio Neri (3) e anche degli scrittori di arte militare.

---

(1) I. GUARESCHI, *Vannoccio Biringucci e la chimica tecnica*, " Suppl. Ann. ", 1904, t. XX, pag. 419.

(2) *Dell'Oreficeria*. Cap. I, *Dell'arte del niello*.

(3) *Dell'arte vetraria*, Firenze, 1612.

Solforeggiare voleva indicare vomitare fuoco e fumo solfureo, e Chiabrera usava *solforeggiare* per *spandere odore di solfo*, e mai scrive *zolfo*.

Solfonaje o *acque solfonaje* si dicevano le acque solfuree.

Giulianelli (1) scriveva *solfo*. Il Gazzeri, scrittore forbito, nelle sue *Lezioni di chimica*, Firenze, 1830, scrive sempre *solfo* e mai *zolfo*. Francesco Selmi, che fu il chimico italiano che meglio conoscesse la nostra lingua, scriveva sempre *solfo*; e così potrei ricordare altri autori, quale ad esempio Piria che nel suo *Trattato di chimica inorganica* scrive sempre *solfo*. Zefirino Re nella sua traduzione di Giovenale traduce il *sulphur* con *solfo*.

Alcuni vecchi scrittori italiani hanno anche *solforo* o *solfore* per *solfo*.

I depositi naturali di solfo diconsi *solfare* e non *zolfare*, le *acque solfuree* e non *acque zolfuree*, ecc.

Credo che l'uso errato della parola *zolfo* si sia diffuso dopo la metà del secolo XVIII.

Anche molti dei nostri vecchi Dizionari della lingua italiana, come quello di Padova, 1829, o del Robiola, hanno *solfo, solfanello*; e si diceva anche *solfanaria* per *cava di solfo*.

Anche in buoni libri moderni italiani di mineralogia si scrive *solfo* e non *zolfo*. Il compianto mineralogista prof. Spezia scriveva *solfo*. Pure il prof. Augusto Piccini, che scriveva in buona lingua italiana, aveva sempre *solfo* e mai *zolfo* (Veggasi, ad esempio, *Determinazione dei pesi atomici*, in " Nuova Enciclopedia di chimica, vol. I, p. 325, ecc.).

Si noterà che nelle tabelle dei pesi atomici, in lingua italiana, si scrive sempre *solfo* e mai *zolfo*; ma si può osservare che il simbolo *S* deriva dalla voce latina *sulfur*; in qualcuna di queste tabelle si trova *zolfo* = *S*.

Il Fanfani fa notare che la lettera *z*, di suono molto gagliardo, assai si usa presso i Toscani, e molti scrittori del secolo XVIII, come osservava il Baretti, avevano la manìa di toscaneggiare. Forse questa è una delle cause per le quali si è diffuso in altre parti d'Italia l'uso della *z* anche nella parola

(1) *Delle acque minerali di Civitavecchia*, 1700.

solfo. I Lucchesi però, ricorda il Fanfani, pronunciano l'*s* invece della *z*; e invece i Pistoiesi usano talora la *z* anche ove andrebbe la *s*.

La parola *zolfo* invece di *solfo* è adoperata da alcuni poeti nostri alla fine del secolo XVIII; Pindemonte nella sua traduzione dell'*Odissea* nel libro XXII ove tratta dell'abbruciare lo solfo per disinfettare l'aria della reggia dopo l'uccisione dei proci, fa pronunciare ad Ulisse le parole seguenti (versi proprio poco belli):

> “ Questi allor tai parole alla diletta
> Nutrice rivolgea: Portami, o vecchia,
> Il zolfo salutifero ed il fuoco
> Perchè l'albergo vaporare io possa „.

Credo che in Piemonte si sia già da lungo tempo usata la parola *zolfo*; l'adopera, ad esempio, il Bonvicino al principio del secolo XIX nelle sue *Lezioni di chimica*; altri chimici e fisici del tempo, come anche Avogadro, scrivevano *zolfo*. Nelle *Istituzioni di mineralogia* di E. Benvenuti, medico del duca Ferdinando I di Parma, ed. 1790, è scritto *zolfo*. G. L. Cantù, professore di chimica nell'Università di Torino (1824-1853), scriveva *zolfo*, e così pure il Moretti (1814), traduttore del *Dizionario di chimica* del Klaproth. Ma, se si eccettui Avogadro, questi nostri scrittori scienziati erano di valore mediocre, e talora, meno che mediocre.

Lazzaro Spallanzani, il celebre fisiologo e naturalista, che scriveva molto bene la lingua italiana, sempre usa la parola *solfo*, mai *zolfo*. Nel vol. I, pagg. 67, 265, 319, 336, 352, 354, ecc., de' suoi *Viaggi alle due Sicilie* sempre scrive *solfo, di solfo, dello solfo*. A pag. 354, a proposito delle emanazioni nell'isola Vulcano, scrive:

“ Parte del fumo, non trovando ostacolo tra via, sale per “ diritto, fino a soperchiare la sommità del cratere; ma un'altra “ parte, poco dopo l'essere sboccata di sotterra, incontra l'op- “ posizione di alcune pietre che risaltano dalle pareti, e alla “ faccia inferiore di esse attaccandosi il solfo sublimato col “ fumo, giù cola, e in più luoghi rappigliatosi, forma stalattiti “ di solfo „ . . . “ Le quali proprietà nobilitano pur l'altro solfo “ che si cava attorno al cratere di Vulcano . . . „.

E che lo Spallanzani fosse uno scrittore di vaglia lo comprova anche il fatto che alcuni brani delle sue più belle descrizioni naturalistiche sono riprodotti nelle migliori *Antologie* per le scuole.

Lorenzo Marcucci, romano, nel suo libro, oggi molto raro, *Saggio analitico-chimico sopra i colori minerali*, ed. Milano, 1833, scrive sempre *solfo, il solfo, del solfo,* ecc.

Giovanni Ruspini nel suo prezioso libro *Dei rimedi nuovi,* 1856, scriveva sempre *solfo* e mai *zolfo.*

Orazio Silvestri di Firenze, chimico e geologo molto colto, e laureato in Filologia e Belle Lettere nell'Università di Pisa, scriveva sempre *solfo* e mai *zolfo*; e così pure G. Campani di Siena, uomo molto colto in lettere e scienze naturali, professore di chimica in quella Università.

E così potrei ricordare molti altri distinti cultori della chimica e delle scienze naturali, che scrivevano sempre *solfo.*

Anche dei buoni scrittori di cose industriali scrivono *solfo*; Fabri scriveva *solfo* nella sua *Memoria sulle miniere di solfo di Lercara*, 1875, ed ugualmente Conti nel suo lavoro: *Notizie sulle condizioni generali dell'industria del solfo*, in " Ann. di Agricoltura „, N. 170, 1890.

Anche nei migliori Trattati di chimica applicata, quali quello già un po' vecchio del Sobrero e il più recente di E. Molinari, si scrive sempre *solfo* e mai *zolfo.*

E per citare anche qualche traduttore dirò che il Fr. Dupré nella sua traduzione italiana del *Trattato di chimica* del Berzelius, Venezia, 1830, scriveva sempre *solfo.*

Il grande *Dizionario della lingua italiana* di Tommaseo e Bellini alla voce *solfo* afferma senz'altro che scientificamente si deve scrivere *solfo*, ma che comunemente può scriversi anche *zolfo*; quindi nell'uso comune si dice indifferentemente: *solfanello* e *zolfanello*, *solfino* e *zolfino.*

Ma indipendentemente dalla parte etimologica e letteraria, nella quale non pretendo di avere competenza, ammettiamo pure che fosse da accettare *zolfo*; pel chimico sarebbe questo l'unico caso che il nome di un elemento si scriva in un modo e quelli de' suoi numerosi composti in un altro.

Tutti i nostri migliori scrittori di chimica, moderni, quali, per non ricordare se non i morti: Fr. Selmi, Piria, Sobrero,

F. Sestini, A. Piccini, O. Silvestri, G. Campani, G. Spezia ed altri molti, scrivevano sempre *solfo*.

G. Carducci (1) scriveva *degli zolfi di Romagna*, ecc.

Egli è molto curioso, per non dire peggio, il vedere tanti dizionarietti della lingua italiana o francese in uso presso di noi portare indifferentemente le due voci *solfo* e *zolfo*.

Ridicola è poi, e senza scusa, la voce *zolfo* quale trovasi in certi altri Vocabolari della lingua italiana, anche moderni (es.: *Vocabolario della lingua italiana del Fanfani*, ed. 1876 e 1885), nei quali si dà innanzi tutto la definizione ancora alchimistica, oggi senza senso. Trovasi più esatta in vecchi dizionari del principio del secolo XIX, tanto italiani quanto francesi. Ed invero il Fanfani alla voce *solfo* dice " Minerale detto anche *zolfo* ". Poi alla voce *zolfo*: " Materia fossile che fa levar fiamma " ad ogni piccola porzione di fuoco nelle cose combustibili, e " manda un odore acuto e soffocante, ed avvene ancora dell'ar- " tifiziale ". Pare di essere al tempo di Cennino Cennini! È incredibile tanta...; e ciò in un libro *per uso delle scuole!* Per avere un'idea delle balordaggini che si trovano in questo dizionario basti leggere alcune altre voci di cose scientifiche.

Nel *Dizionario di cognizioni utili*, vol. V, Torino, 1917, si trova la voce: *solfo* o *zolfo* (chim.) e poi in tutto l'articolo si continua a scrivere sempre: *zolfo prismatico*, *zolfo ordinario*, *fiori di zolfo*, *cannelli di zolfo*, ecc., e alla voce *Zolfo* si rimanda a *Solfo*. Poi in due successivi articoli: *Solfo* (min.) e *Solfo* (farm.) si scrive sempre *solfo*, *latte di solfo*, *fiori di solfo*, ecc. È forse bello il vedere nella stessa pagina ora *solfo*, ora *zolfo*? In un'altra parte della stessa Opera alla lettera *S* si dice: in chim.: *S*, zolfo. Quante contraddizioni in un solo libro!

In un altro Dizionario (2) trovo: *Tiosmo* da *Θεῖον* th-èion *zolfo*.

Non è nemmeno gradevole il vedere in certi giornali scientifici, che mentre la memoria dell'autore porta *zolfo*, nell'indice del volume non si trova più *zolfo*, ma bensì il nome più esatto *solfo*.

È pure strano l'osservare come tante volte si scriva in questa maniera: " ho fatto reagire lo *zolfo* sull'aldeide ed ho

(1) V. *Prose*, ed. Zanichelli, pag. 1001.

(2) M. A. Canini, *Dizionario Etimologico*, Torino, 1882, 3ª ed.

ottenuto della *solfaldeide* „, oppure “ ho fatto reagire lo *zolfo* sull'aldeide valerica ed ho ottenuto l'*aldeide solfovalerica* „. Ma allora perchè non scrivere *zolfaldeide* e *zolfovalerica*?

Se veramente la parola *solfo* deriva da *sol* o *sal*, sale, e *πῦρ*, fuoco, perchè dobbiamo scrivere *zolfo* e non *solfo*?

Nei lavori etimologici riguardanti gli elementi chimici, di Berendes (1), di Paul Diergart (2) e di altri, non si trova nulla intorno all'origine della parola *sulfur* o *sulphur*. Solamente il Diergart dice qualche cosa intorno alla parola tedesca *schwefel* (*solfo*), che in fondo vorrebbe dire materia mortifera, perchè bruciando dà vapori velenosi.

Ma io uscirei troppo dalle mie limitatissime conoscenze linguistiche se insistessi sull'uso della *s* o della *z*. Dico solamente che tutto concorda a far ritenere essere più esatto l'*s* nel caso del solfo come minerale e come elemento chimico.

Ben fortunato se qualche filologo moderno mi dimostrerà la verità riguardo alla vera etimologia della parola *solfo* o *sulfur* o *sulphur* dei latini. È sempre bene imparare qualche cosa.

I chimici non hanno, io credo, nessuna speciale e seria ragione di adottare *zolfo* anzichè *solfo*. E poi, indipendentemente dalla questione etimologica e letteraria, perchè io non sono filologo, ripeto, nè ho voluto interrogare nessun filologo, ammettiamo pure, come già dissi più sopra, si possa accettare *zolfo*, resterà sempre il fatto che per il chimico sarebbe questo l'unico elemento il cui nome si scrive in modo diverso da quello di tutti i composti che ne derivano. Sarebbe come chi scrivesse *zirconio* e poi *acido sirconico*, *sirconati*, ecc. Io penso dunque che non resti dubbio alcuno: è più logico, è più esatto, sotto qualunque aspetto, scrivere *solfo*, che non *zolfo*.

Torino, Novembre 1916.

(1) “ Chem. Zeit. „, 1899, N. 11, vol. XXIII.

(2) *Etymologische Untersuchungen ueber diejenigen Namen der chemischen Elemente, welche ihren internationalen und nationalen Sigeln*, ecc. in “ J. pr. Chem. „, 1900 (2), t. 61, pag. 497.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 7 Gennaio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi Vicepresidente dell'Accademia, Carle, Pizzi, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli Direttore della Classe, S. E. Ruffini, Manno, Schiaparelli, e Vidari.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 24 dicembre 1916. Segue la lettura del telegramma di S. E. Boselli in risposta a quello inviatogli, a nome della Classe, dall'Accademico Segretario Stampini. Il telegramma è così concepito: " Ringrazio i colleghi con affettuosa osservanza " e coi migliori auguri per la nostra Accademia il cui pensiero " tanto è congiunto colle glorie e coi voti della patria italiana. " — Boselli ". È anche data lettura di altre lettere di condoglianza, dell'Académie des sciences et lettres de Montpellier e della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, per la morte del Socio nazionale Carlo Cipolla.

I Soci Carle, Pizzi, D'Ercole e Brondi, che non erano presenti all'adunanza precedente, dichiarano che fanno piena ade-

sione alla proposta del Vicepresidente CHIRONI di iniziare una serie di discussioni e di studi sui principali problemi di economia e di ordinamento amministrativo, nell'ampio significato della espressione, che interessano ora, e interesseranno tanto più dopo la guerra, il nostro Paese. Analoga dichiarazione del Socio VIDARI assente è letta dal Socio Segretario STAMPINI. Anche il Direttore della Classe S. E. BOSELLI, per mezzo del Vicepresidente CHIRONI, ha fatto sapere che applaude alla proposta; onde la Classe, dopo breve discussione, procede alla nomina di una Commissione, la quale studi il modo più opportuno per l'attuazione e l'esplicazione in tutte le sue parti del programma enunciato dal Vicepresidente. La Commissione, che sarà presieduta dal Presidente dell'Accademia, risulta composta dei Soci CHIRONI, BRONDI, EINAUDI, PRATO, e del Socio Segretario STAMPINI.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Gennaio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Socio Jadanza presenta in omaggio quattro opuscoli del Prof. Giovanni Boccardi, ed il Socio Somigliana, anche a nome del Socio Guidi, il volume del Prof. Colonnetti, *Principî di Statica dei solidi elastici*, e ne parla.

Il Presidente comunica che nella Classe di scienze morali il Vice-Presidente Chironi ha fatto appello " alla scienza, al patriottismo dei Colleghi perchè veggano se nelle contingenze presenti, nelle quali ognuno, per quanto gli appartiene, deve concorrere ad agevolare ed assistere l'opera del Governo, suggerendo provvedimenti nuovi o mostrando il difetto di quelli già ordinati, non debba l'Accademia nostra volgere a tal fine una parte dell'attività sua ". — Riassume la discussione fatta in proposito dalla Classe di scienze morali, che dimostrò di interessarsi vivamente della proposta e di apprezzarla, come provò praticamente colla nomina di una Commissione, col mandato di studiare il modo più opportuno per attuarla e per applicare in tutte le sue parti il programma enunciato dal Vice-Presidente.

Il Presidente avverte che la Classe di scienze morali lo pregò di comunicare alla nostra la proposta Chironi, e che la Commissione nominata non si è finora riunita per l'assenza del Vice-Presidente, ed apre la discussione sulla proposta stessa ed eventualmente sul modo migliore per assecondarla ed effettuarla.

Alla discussione prendono parte col Presidente i Soci Guidi, Segre, Peano, Grassi, Guareschi, Panetti, D'Ovidio, tutti d'accordo sulla bontà ed opportunità del concetto informativo della proposta, ma discutendo con vedute diverse riguardo all'effettuazione. In fine la Classe si accorda nell'idea di procedere, in conformità alla deliberazione dell'altra Classe, alla nomina di una Commissione di sei membri, compresi il Presidente e il Segretario, coll'incarico di studiare i problemi, di competenza della nostra Classe, connessi alla proposta Chironi, in accordo coll'altra Commissione, in quanto è necessario perchè ne risulti un lavoro armonico ed utile, che attesti come la nostra Accademia si preoccupi dei gravi problemi di alto interesse nazionale, che urge di risolvere nel modo migliore.

Si procede alla votazione e sono eletti i Soci Mattirolo, Guareschi, Guidi e Foà.

Il Presidente invita il Socio Guareschi a leggere la commemorazione del Socio corrispondente Ugo Schiff. La lettura è accolta col plauso della Classe ed il Presidente ringrazia il Socio Guareschi. La commemorazione sarà stampata negli *Atti*.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Jadanza una Nota del Prof. Ing. Ottavio Zanotti-Bianco col titolo *La trepidazione in Dante?*;

Il Socio Somigliana la Nota del Dott. Ing. Gustavo Colonnetti, *Sopra un caso di frattura spontanea di un acciaio temprato*;

Il Socio Peano una sua Nota sui *Valori decimali abbreviati e arrotondati*.

LETTURE

COMMEMORAZIONE

DI

UGO SCHIFF

letta nell'adunanza 14 gennaio 1917 dal Socio I. GUARESCHI.

Egregi e cari Colleghi,

Nel mio lungo lavoro *Francesco Selmi e la sua opera scientifica*, pubblicato nel 1911, e che volentieri oggi ricordo perchè in quest'anno a punto compiesi il centenario della nascita dell'illustre uomo, benemerito anche della patria, essendo stato condannato a morte da Francesco IV di Modena, io avevo scritto: “ Gli elogi storici dovrebbero essere sempre dettati non “ prima di cinquanta o di trenta anni dopo la morte dello “ scienziato che vuolsi onorare: quali sono Amedeo Avogadro “ e Francesco Selmi „. Ed oggi sarei ancora di quel parere, qualora fosse possibile, ma a me non è più dato di attendere troppi anni per ricordare l'opera scientifica di U. Schiff.

Cosa è questo desiderio, e direi, eccessiva brama che tutti oggi spinge a pronunciare le commemorazioni o elogi storici di un collega, di un amico o di un maestro, non appena sceso nella tomba? Arago scrisse i suoi mirabili elogi sempre alcuni anni dopo la morte del commemorato: Volta morì nel 1827 ed il suo elogio fu letto nel 1833. Per l'uomo di scienza che veramente lascia una traccia profonda è bene che l'esposizione dei suoi meriti venga fatta dopo qualche tempo cessata la vita materiale; il tempo, giusto estimatore di tutto e di tutti, accresce la fama, o almeno fa meglio scorgere l'importanza delle scoperte del commemorato. Tale parmi sia il caso di Ugo Schiff, chimico di valore superiore a quello di altri che hanno fama

più ampia e popolare. La fama di un cultore della scienza è talora superiore ai meriti reali, se ha fatto delle scoperte le quali colpiscano la mente anche di chi non ha competenza alcuna; mentre talvolta il valore reale dell'uomo non può essere giudicato se non da coloro che conoscano la scienza; eccetto il caso in cui le scoperte siano tanto elevate che il nome allora diventa universale: Galileo e Volta, a cagion d'esempio.

Comunque la si voglia riguardare, l'opera scientifica del nostro commemorato è tale che non teme l'azione demolitrice del tempo, anzi si innalzerà, perchè noi tuttora scorgiamo essere le sue ricerche fonti di studi successivi.

Affinchè il racconto della vita scientifica di un uomo riesca di maggiore e benefico ammaestramento, fa d'uopo dare una più o meno breve esposizione dello stato della scienza nel tempo in cui si sviluppò e crebbe la mente di colui che si vuole ricordare; era perciò mio proponimento di delineare lo stato della chimica nel tempo in cui lo Schiff incominciò la sua carriera; ma date le condizioni attuali mi fu impossibile. Basterà il dire che egli visse e studiò in quel magnifico periodo della chimica nel quale presero ampio sviluppo, e si diffusero, le teorie di Laurent e di Gerhardt. Berzelius trovò la chimica bambina e la lasciò adulta (periodo 1800-1840), ma Laurent e Gerhardt, seguìti poco dopo da Kekulé, da Cannizzaro e da Wurtz, la misero su una via nuova che doveva produrre splendidi frutti. Questo è indubbiamente il periodo più brillante della chimica moderna; l'edificio innalzato da Lavoisier, Davy, Berzelius, Mitscherlich, Liebig e Wöhler, Dumas, si innalza e si consolida in modo meraviglioso.

Dal 1860 al 1868 si pubblicano in Francia le belle ricerche di Pasteur *Sulla dissimetria molecolare*, le lezioni del Wurtz *Sulla teoria atomica*, le lezioni di Berthelot *Sulla sintesi chimica*, quelle di Deville *Sulla affinità*, ecc. Tutti lavori geniali che hanno servito mirabilmente a diffondere le idee allora modernissime su i problemi più delicati della chimica. Alcune delle ricerche sopraccennate furono tradotte nel nostro giornale " Il Nuovo Cimento ".

Schiff all'inizio della sua carriera si trovò a punto nel momento in cui, sviluppata in tutta la sua pienezza la teoria dei tipi, questa a poco a poco si trasformò nella teoria della va-

lenza; è il momento in cui si stabiliscono e si differenziano le varie funzioni chimiche ed in cui la sintesi chimica organica, mineralogica e geologica, particolarmente per opera di Berthelot e di Daubrée, entra in pieno sviluppo. Molti giovani e distinti chimici volsero le loro ricerche in questa nuova direzione e basti il ricordare Odling, Williamson, Friedel, Erlenmeyer, Butlerow, Schorlemmer, Wislicenus, Beilstein, Ugo Schiff.

Da antica famiglia israelita, d'origine spagnuola, nacque Ugo Schiff, in Francoforte sul Meno il 3 aprile 1834 e morì in Firenze l'8 settembre 1915. Di fibra molto robusta, egli lavorò assai, specialmente sino al 1899; nel dicembre di quello stesso anno cadde per istrada, ed un biroccio, carico di non lieve peso, passò sul suo corpo. Nei primi momenti il male parve non grave, ma poi si manifestò con molta gravità; fu ammalato di diabete, di nefrite, e da quel giorno non ricuperò più la sua florida salute, se non a brevi intervalli.

Il suo primo insegnante di chimica fu il Böttger, ma senza dubbio la sua coltura chimica veramente solida deve alla scuola di Göttingen, capitanata dal Wöhler. È curioso il fatto che il grande movimento in Germania favorevole al Gerhardt incominciò quasi nel laboratorio di Wöhler ove studiava lo Schiff; da quel laboratorio uscì nel 1855 il *Trattato di chimica organica* del Limpricht, che fu concepito sulle tracce del sistema gerhardiano (1).

Lo Schiff, di idee a quel tempo rivoluzionarie, lasciò Francoforte nel 1856 e si trasferì a Berna, poi tornò a Göttingen per la Laurea in filosofia e di nuovo a Berna quale libero do-

(1) La prefazione del *Grundriss d. org. Chem.* del Limpricht porta la data del luglio 1855 e nelle prime righe dichiara che tratterà della chimica organica seguendo in tutto il sistema di Gerhardt. In questo libro sono accettate tutte le formole quali erano state corrette da Gerhardt e Laurent. È curioso il fatto che questo libro usciva dal laboratorio del Wöhler il quale nel 1838 accolse col ridicolo la teoria delle sostituzioni e scrisse una lettera satirica! Per la storia delle idee è bene conoscere anche questi particolari, come dirò più ampiamente in un mio lavoro su *Augusto Laurent e la teoria delle sostituzioni*. Il libro del Limpricht aveva tanto del modernismo che incomincia il capitolo degli alcaloidi colla: *Piridina*.

cente; e nel 1858 incaricato della chimica. Nel 1862-63 venne in Italia insieme al fratello Maurizio, illustre fisiologo, chiamato dal Matteucci, e dopo essere stato breve tempo nel laboratorio di Pisa, fu nominato dal Ministro C. Matteucci professore straordinario di Chimica nel Museo di storia naturale di Firenze, poi passò alcuni anni (1876-79) nell'Università di Torino e finalmente ordinario nel 1880 in Firenze.

Egli si compiaceva a raccontare i sacrifici sopportati nei primi anni della sua carriera, specialmente quando era in Isvizzera. Ma era molto, molto economo, e dopo 50 anni ha potuto lasciare un notevole patrimonio.

Egli, ancor molto giovane, prese parte al Congresso famoso di Carlsruhe (1860). In quel Congresso si trattò specialmente della legge di Avogadro, e delle idee, del sistema, di Gerhardt. Cannizzaro vi ebbe una parte importantissima. L'animosità personale contro Gerhardt era così evidente nel Presidente Dumas, che il Cannizzaro non potè a meno di rispondergli: " Au moins, à présent que M. Gerhardt est mort, on " pourrait lui rendre justice „. Io ebbi collo Schiff delle lunghe conversazioni intorno a questo celebre Congresso e in una lettera del 14 giugno 1901, che spiacemi di non poter riprodurre per la strettezza dello spazio, mi scriveva: " La gloria dell'As- " semblea appartenne senza dubbio a Cannizzaro. Lo vedo an- " cora a passo concitato e dietro di lui Pavesi con un grosso " pacco del *Sunto*, che distribuiva a destra e a sinistra. Il di- " scorso di Cannizzaro (in francese), chiaro, conciso, senza flo- " rilegio oratorio, fece una impressione immensa; e molti sol- " tanto allora sapevano distinguere fra atomo e molecola... „.

Spero di tornare su questo argomento in un capitolo di storia della chimica dal 1840 al 1870.

Di rado lo Schiff andava in Germania ed in una lettera del 23 aprile 1899 mi descriveva lo stato della Germania quale era già alcuni anni prima: " ...tutto puzza di caserma e di mi- " litarismo... ma sono sulla via di farsi ricchi, forse a spese del " predominio intellettuale, che loro sfuggirà lentamente dalle " mani, senza che per ora si preveda chi potrà esserne l'erede... „.

Quando io nel settembre 1870 giunsi a Firenze per frequentare per alcuni mesi il Laboratorio di Chimica, ero già imbevuto delle idee di Laurent e Gerhardt: avevo già letto molte

annate del " Bull. Soc. Chim. „ del Wurtz, i due *Traité* di Gerhardt e il *Méthode de chimie* di Laurent. Lo Schiff fu assai contento di trovare con chi discorrere di queste cose. Io mi trovai là in un bell'ambiente scientifico, tra il 1870 e 1871, quando nello Istituto Superiore insegnavano insieme ad Ugo Schiff il fratello suo Maurizio, Donati l'astronomo, che teneva a noi giovani delle conferenze di matematica, Parlatore il botanico, Cocchi il valoroso geologo, Herzen, Targioni-Tozzetti ed altri distinti cultori della scienza. Nella bella e gentile Firenze, culla della civiltà del mondo moderno, come Roma lo fu pel mondo antico, si studiava unicamente per amore allo studio, si discutevano i problemi più ardui e scottanti, quali le teorie chimiche moderne, la teoria di Darwin, ecc.

Bei giorni, nei quali la gioventù studiosa non pensava che ai grandi ideali della scienza.

Nel principio del 1871, al tempo della Comune di Parigi, venne in laboratorio un chimico russo, Luginin; lo Schiff, Herzen ed altri allora andavano d'accordo coi partiti politici estremi. Conobbi in quei giorni Carlo Vogt naturalista di Ginevra e Valentin fisiologo a Berna. Nessuna meraviglia quindi se lo Schiff, uno dei soci fondatori del giornale l'" Avanti „, era socialista, come lo furono i suoi due connazionali e correligionari: Lasalle e Marx.

Egli era un grande lavoratore; non conosceva cosa fosse divertimento ordinario, mondano; il suo vero divertimento era il lavoro, lo studio, la esperimentazione, la coltura letteraria e scientifica. La sua coltura linguistica era assai notevole; conosceva bene le principali lingue viventi, oltre che il greco, il latino, l'arabo e l'ebraico. Alla sera faceva qualche passeggiata attorno alle mura di Firenze dopo i lavori di laboratorio.

Era Socio Corrispondente della nostra Accademia dal 1898, e per quanto egli disdegnasse gli onori e le onorificenze, quando ricevette la notizia, non aspettata, della sua nomina nella nostra Accademia mi dimostrò, anche per iscritto, tutta la sua contentezza.

A Lui nel 1902 io dedicai il mio lavoro d'indole storica: *Faustino Malaguti e le sue opere.*

Nel 1904 furono a lui tributate solenni onoranze pel 70° anno di nascita.

L'opera scientifica di U. Schiff, compiuta in sessant'anni di lavoro, è assai vasta e complessa; versa su quasi tutti i campi della chimica: le sue pubblicazioni sono numerosissime: più centinaia.

I suoi primi lavori, che portarono un buon contributo allo sviluppo delle teorie moderne e fatti in tempi nei quali non era ancora immenso il numero dei chimici lavoratori, sono ricordati con onore nelle opere classiche del tempo, quali quelle di Wurtz e di Kekulé.

Egli ha affrontato dei problemi molto difficili e se non sempre tutti li ha risolti completamente, li ha però portati a buon punto.

Le ricerche di Ugo Schiff si possono raggruppare nei capitoli seguenti:

I. *Distinzione fra atomicità e basicità. Acidi condensati.*

II. *Contributo alla teoria dei tipi e passaggio alla teoria della valenza. Relazioni fra la chimica organica ed inorganica.*

III. *Chimica organica.*

IV. *Derivati ammoniometallici.*

V. *Chimica inorganica e mineralogica.*

VI. *Chimica fisica.*

VII. *Chimica analitica.*

VIII. *Zoochimica.*

IX. *Lavori di indole storica e didattica.*

X. *Apparecchi e strumenti.*

Le sue prime ricerche risalgono al 1854; in quell'anno egli pubblicò l'analisi completa di un'acqua minerale, la quale presentava non lievi difficoltà; lavoro fatto sotto la direzione di J. Löwe. Ma le sue prime ricerche scientifiche furono fatte nel laboratorio di Wöhler sotto la direzione di Limpricht, col quale collaborò.

Nel 1856 lo Schiff osservò che l'acetato ferroso agisce come riduttore sui nitroacidi e si comporta come il solfuro di ammonio. Il m.nitrobenzoato di etile per l'azione del ferro e dell'acido acetico è ridotto allo stato di etere aminobenzoico (1).

(1) " Jahresb. f. Chem. ", 1856, pag. 467. Questo lavoro è ancora ricordato nei Trattati.

Contemporaneamente questa reazione era applicata da Boullet a diversi derivati nitrici. È un metodo di riduzione che fu poi applicato da Béchamp alla preparazione in grande dell'anilina dal nitrobenzene.

Poco dopo (1857) pubblicò le sue ricerche *Su alcuni derivati della naftilamina*, che presentò quale Tesi di Laurea in filosofia.

Nel periodo 1858-64 dai principali chimici si discusse la questione della *atomicità* e della *basicità*; la confusione che regnava intorno alla basicità degli acidi, cioè la proprietà di formare dei sali neutri reagendo coi carbonati alcalini, ecc., dipendeva dal fatto, ora noto a tutti, ma allora perfettamente ignoto, che molti acidi, organici ed inorganici, oltre a contenere dell'ossigeno che imprime all'acido la basicità, contengono un'altra parte di ossigeno del quale non si conosceva l'ufficio, la funzione. Tra gli acidi minerali, ad esempio, gli acidi fosforoso ed ipofosforoso, e fra gli acidi organici, il lattico, il glicolico ed il salicilico.

A questa discussione presero parte i principali fra i chimici di quel tempo: Kolbe, Wurtz, Friedel, Kekulé, ecc. Allora non si conosceva cosa fosse la funzione *mista*, cioè che in uno stesso composto vi fossero dei gruppi con due o più modi diversi funzionali: che un acido fosse nel tempo stesso alcole, o fenolo, o amina, ecc. La discussione cadde prima sugli acidi glicolico, lattico e salicilico e poi specialmente sugli acidi tartarico e citrico, e intorno a questi ultimi due prese viva parte Ugo Schiff.

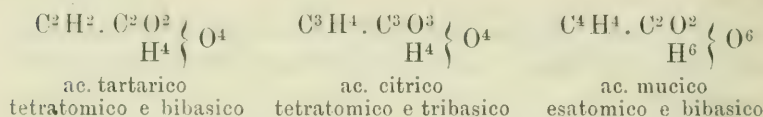
Stabilito il fatto che l'acido citrico è veramente tribasico, perchè forma de' citrati mono-, bi- e trimetallici e fornisce dei citrati trialchilici, restava da spiegare in quale stato vi esistesse il settimo atomo di ossigeno. Ugo Schiff e Kammerer ottennero de' citrati di ferro, di antimonio e di rame, in cui 4 at. di H sono sostituiti dai metalli.

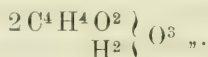
Nel 1862 ottenne de' tartrati della forma

$$\left.\begin{matrix} C^4H^2O^2 \\ Sb'''\,Me \end{matrix}\right\} O^4 \quad \text{e} \quad C^4H^2Pb^2O^6$$

e considerò l'acido tartarico come tetrabasico.

Poco dopo (1863) egli fece meglio notare la distinzione fra atomicità e basicità, e per gli acidi tartarico, citrico e mucico diede le formole seguenti:

$\left.\begin{matrix} C^2H^2 . C^2O^2 \\ H^4 \end{matrix}\right\} O^4$	$\left.\begin{matrix} C^3H^4 . C^3O^3 \\ H^4 \end{matrix}\right\} O^4$	$\left.\begin{matrix} C^4H^4 . C^2O^2 \\ H^6 \end{matrix}\right\} O^6$
ac. tartarico tetratomico e bibasico	ac. citrico tetratomico e tribasico	ac. mucico esatomico e bibasico

Nel 1862-63 egli fece conoscere le sue ricerche sull'*acido tartarico*; lavoro che fu tenuto in grande considerazione dai migliori chimici del tempo. " Dans un mémoire fort important de M. U. Schiff „, scriveva il Wurtz, nel 1864, nelle sue *Leçons de philosophie chimique*, " vient de faire connaître un acide " ditartrique:

$$\left.\begin{matrix} 2\,C^4H^4O^2 \\ H^2 \end{matrix}\right\} O^3 \text{ „.}$$

Lo Schiff riassunse in un quadro, che meriterebbe di essere riprodotto, la costituzione de' principali acidi organici, ove è reso manifesto che la basicità dipende dal numero di CO (carbonile, o, come si direbbe oggi, dal numero di carbossili).

Egli fece vedere le relazioni fra gli acidi condensati organici e inorganici, quali, ad esempio, l'acido disolforico o pirosolforico $H^2S^2O^7$.

In una memoria molto importante del 1862: *Sur les combinaisons polyacides de la chimie inorganique*, egli fa vedere come da un idrato poliossidrilico si possano ottenere dei composti organo-minerali: delle cloridrine, acetocloridrine, solfocloridrine, sostituendo successivamente i gruppi OH con Cl, NO^2, ecc. Il Wurtz, che fu il più grande chimico atomista francese, dopo Gerhardt, teneva in alta stima il nostro Ugo Schiff e si valse specialmente delle ricerche suaccennate per discutere nelle sue *Leçons de philosophie chimique* il problema: *De l'alliance de la chimie organique et de la chimie inorganique*. Queste sue ricerche portarono un buon contributo per dimostrare che le stesse leggi governano i due rami della chimica.

Ma dove egli ha lasciato una impronta anche maggiore si è in altri suoi lavori di chimica organica; non vi è, può dirsi, nessun capitolo della chimica organica ch'egli non abbia toc-

cato. Il suo lavoro più vasto ed importante si è quello che potrebbesi denominare: *Della reazione aminica*, cioè lo studio dei prodotti che si formano per l'azione delle aldeidi (e può dirsi anche dei chetoni e dei chinoni) sulle amine, esteso poi agli acidi aminici, alle amidi ed in generale a tutti i corpi contenenti uno o più gruppi $-NH^2$. Dimostrò che H^2 può essere sostituito dal gruppo $=CH^2$, o meglio, $=CHR$; reazione questa che nella sua maggiore semplicità può essere rappresentata con:

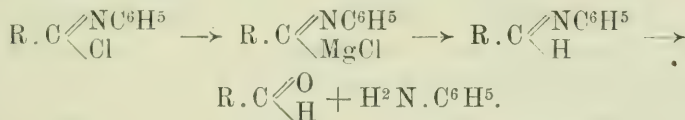
$$R . NH^2 + CHOR' = R . N = CHR' + H^2O.$$

Io credo che questa sia la reazione più generale che si conosca in chimica organica, eccetto forse quella di Barbier-Grignard, ma quella di Schiff è più originale, più tutta sua. Le ricerche sue furono incominciate nel 1864 ed i prodotti basici, o debolmente basici che si formano, sono ora conosciuti dai chimici col nome di *Basi di Schiff*. In alcuni casi la reazione avviene fra 2 mol. di aldeide e 3 mol. di anilina; ed è poi estendibile alle diamine e poliamine. Questa reazione ricevette una ampliazione o generalizzazione enorme quando Em. Fischer, scoperta nel 1875 la fenilidrazina, l'applicò subito alla sintesi facendola reagire colle aldeidi, coi chetoni, cogli eteri chetonici (da cui l'*antipirina*, ecc.) nel senso della reazione di Schiff.

In modo analogo reagisce l'idrossilamina (*aldossime* e *chetossime* di V. Meyer) e la *semicarbazide*. Poi la reazione di Schiff fu estesa alle amidi, agli acidi aminici ed in tanti altri casi.

È assai interessante il fatto che le *Basi di Schiff* si formano anche quale termine di passaggio nella trasformazione degli acidi nelle loro aldeidi per mezzo degli iminocloruri (Staudinger, 1908):

$$R . C \begin{matrix} \nearrow NC^6H^5 \\ \searrow Cl \end{matrix} \longrightarrow R . C \begin{matrix} \nearrow NC^6H^5 \\ \searrow MgCl \end{matrix} \longrightarrow R . C \begin{matrix} \nearrow NC^6H^5 \\ \searrow H \end{matrix} \longrightarrow$$

$$R . C \begin{matrix} \nearrow O \\ \searrow H \end{matrix} + H^2N . C^6H^5.$$

Le stesse basi si formano pure quali prodotti intermedi dagli eteri α chetonici (Bouveault, 1896, Mauthner, 1909).

Queste basi di Schiff alla loro volta sono capaci di dar luogo ad un gran numero di reazioni e furono oggetto di studio

per parte di molti chimici: reagiscono coi chetoni, coi cheteni, coll'idrogeno nascente, ecc.; si prestano cioè a numerose ricerche. Mediante la reazione Barbier-Grignard queste basi si trasformano in amine secondarie: R . R''. CH = NHR'.

Questa grande reazione generale già per se stessa basterebbe alla meritata rinomanza di un chimico.

Anche in questo caso il tempo si dimostrò galantuomo; poco dopo che lo Schiff pubblicò la sua prima grossa memoria: *Sopra una nuova serie di basi organiche* (1), essendochè alcune di queste basi erano liquide o amorfe e di difficile depurazione, si volle criticare il lavoro, non però con pubblicazioni apposite, ma nel silenzio, ma in via privata; si disse: ecco il chimico che fabbrica prodotti impuri. Accade purtroppo talvolta nella scienza ciò che avviene nella politica.

Estendendo questa reazione all'urea egli ottenne una numerosa serie di composti detti: *uree condensate*, mediante le aldeidi; e nel 1877 studiando l'azione del gliossale sull'urea, scoprì la *acetilendiurea*, la quale è il tipo di quei corpi che oggi diconsi *acetilendiureine*:

```
   NH — CR — HN
CO<    |       >CO.
   NH — CR — HN
```

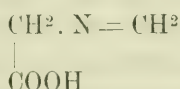
Queste numerose ricerche dello Schiff sono in istretta relazione colla sintesi effettuata da Em. Fischer dei polipeptidi, perchè lo condussero allo studio degli albuminoidi, alla *disammidazione* di questi, alla *reazione biuretica*, agli *acidi poliaspartici*. Egli fece vedere che la reazione del biureto per gli albuminoidi è dovuta principalmente alla presenza nella molecola di due gruppi $-CONH^2$ vicini, come nel biureto, nella malonamide, nell'ossamide, e potè stabilire la regola generale seguente (1906): *Reazioni biuretiche dovrebbero sistematicamente chiamarsi soltanto le reazioni colorate che i sali di rame o di nichelio producono con aminoacidi o diamidi, che si possono riferire alle tre forme fondamentali tipiche: biureto, malonamide ed ossamide ed ai loro prodotti di sostituzione.* Molti altri corpi azotati

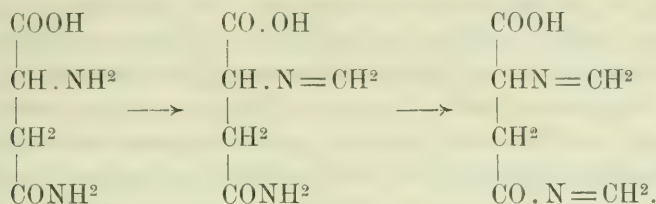
(1) " Giorn. di Sc. Nat. ed Econ. ", Palermo, 1867, vol. II.

possono fornire dei composti rameici di colore più o meno violetto senza che però si tratti di vera reazione biuretica.

Lo Schiff ebbe poi in questi ultimi anni un'altra idea felice: quella di applicare la sua reazione *alla separazione della funzione basica dalla funzione acida contenute in una stessa molecola,* mediante la formaldeide.

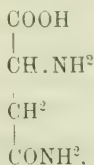
Egli ha utilizzato il modo di agire della formaldeide sul gruppo aminico $-NH^2$ *basico* e trasformarlo in $-N=CH^2$ *neutro* per separare in uno stesso composto la funzione acida dalla basica. Ad esempio dalla glicocolla si ha un composto:

$$\begin{array}{l} CH^2.N=CH^2 \\ | \\ COOH \end{array}$$

che è un acido *nettamente* monoacido. E quando uno stesso composto contiene $-NH^2$ e $-CONH^2$ possono neutralizzarsi l'uno o l'altro o tuttedue: dall'asparagina ordinaria (1) ottenne:

$$\begin{array}{lcl} COOH & & CO.OH & & COOH \\ | & & | & & | \\ CH.NH^2 & & CH.N=CH^2 & & CHN=CH^2 \\ | & \longrightarrow & | & \longrightarrow & | \\ CH^2 & & CH^2 & & CH^2 \\ | & & | & & | \\ CONH^2 & & CONH^2 & & CO.N=CH^2. \end{array}$$

Questo importante modo di comportarsi degli aminoacidi colla formaldeide scoperto dallo Schiff nel 1899-1900, è stato, dopo alcuni anni, utilizzato dal Sörensen (1908) per determinare

---

(1) La formola strutturale dell'asparagina ordinaria:

$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH.NH^2 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ CONH^2. \end{array}$$

ora ammessa da tutti i chimici, fu la prima volta data da me nel 1876 (*Studi sull'asparagina e sull'acido aspartico,* " Atti della R. Accademia dei Lincei „ II, 1876, t. 3°).

gli aminoacidi nelle urine, negli estratti di carne, ecc. e, specialmente dai non chimici, è stato molto ingiustamente chiamata: *reazione di Sörensen*, il quale invece ha ripetuto nè più nè meno, ciò che aveva scritto e dimostrato lo Schiff. È atto di vera giustizia il chiamarla: *reazione di U. Schiff per gli aminoacidi* (1).

Ma un'altra impronta profonda egli lascia nella chimica organica coi suoi studi sui *glucosidi.* Nel 1836 Wöhler e Liebig scoprono che l'amigdalina si può decomporre in acido cianidrico, aldeide benzoica e glucosio: Stas nel 1838 studia la florizina e dal 1838-42 Piria pubblica le sue classiche ricerche sulla salicina.

Lo Schiff può dirsi il primo che abbia tentato metodicamente di conoscere la vera costituzione dei glucosidi; studiò principalmente la esculina, la salicina, la populina, l'amigdalina, l'arbutina, la florizina.

Innanzi tutto dimostrò che il glucosio fornisce un pentacetile ed un pentabenzoile derivato e che quindi contiene cinque ossidrili di natura alcolica e già nel 1870 pubblicò tre belle memorie: sulla salicina, sull'arbutina e sulla amigdalina, e l'acido amigdalico. In questi tre glucosidi vi ammette il glucosio con ancora liberi quattro ossidrili ed assegna a questi tre glucosidi delle formole che sono pressochè quelle ammesse ancora oggi. Nella terza di queste memorie sviluppa la costituzione del glucosio in relazione alla mannite, che è quella ammessa ancor oggi. È vero che anche Baeyer e Fittig contemporaneamente diedero pressochè la stessa formola pel glucosio, ma ciò nulla toglie al merito dello Schiff, anche perchè egli l'applicò

(1) Ecco le pubblicazioni di U. Schiff su questo argomento: *Metilenasparagine e composti affini,* in " Gazz. Chim. ", 1899, t. 29, pag. 285, e in " A. ", 1899, t. 310; *Separazione delle funzioni basica e acida nelle soluzioni degli aminoacidi per mezzo della formaldeide,* in " Gazz. Chim. ", 1902, t. 32 (*a*), p. 97, e in " A. ", 1901, t. 319, pagg. 59 e 287; e 1902, t. 325, pag. 348; *Separazione delle funzioni basiche e acide in soluzioni di corpi albuminoidi,* in " Gazz. Chim. ", 1902, t. 32 (*a*), 115; *Separazione delle funzioni basica e acida per mezzo della formalina,* in " Gazz. Chim. ", 1903, t. 33, P. I, pag. 104. In questa ultima nota III dà un *Metodo semplice di dosamento della formaldeide.* Il lavoro di Sörensen invece si trova in " Bioch. Zeits. ", 1908, t. VII, pag. 45. Si può essere più chiari?

subito ai glucosidi pei quali diede delle formole che furono poi confermate.

Per riconoscere l'importanza di questi lavori fa d'uopo pensare che furono intrapresi quando ben poco si conosceva intorno alla costituzione del glucosio e degli altri zuccheri.

Nè vanno dimenticate le sue ricerche sul *furfurolo* o *aldeide piromucica*; egli fu il primo a considerare il *diacetilene* o *tetrolo* C^4H^4 come il nucleo o carburo fondamentale dal quale derivano il pirrolo e i composti piromucici e li confrontò col benzene. Ed invero poco dopo fu assegnata al pirrolo la formola attuale.

Lo studio del furfurolo lo condusse alla bella reazione, coll'acido cloridrico e l'anilina, che serve a scoprire il fuselöl negli alcoli commerciali.

Nè vanno dimenticate le sue ricerche sull'idrossilamide, sugli acidi benzamossamici, sugli acidi tartraminobenzoici, sulle toluilendiamine, sull'acido gallico, ecc., ed i numerosi derivati che ottenne dalle fenilendiamine coll'etere ossalico, ecc.

Elegante assai è il suo metodo pratico (1885) per preparare in grande quantità l'*acido aspartico* dalla asparagina con soluzione titolata di acido cloridrico. Con questo metodo si ottengono le quantità teoriche, ed assai presto; il che prima non si era riusciti ad ottenere.

Anche nelle ricerche di minore importanza apparente si scorgeva l'impronta del suo ingegno. Si sa che la sintesi dell'acido cinnamico col metodo di Bertagnini ha luogo per l'azione del cloruro di acetile sull'aldeide benzoica in presenza di poco acido cloridrico; si è interpretata in vario modo la funzione dell'acido cloridrico per iniziare la reazione (Kekulé, Perkin, Kraut), ma egli pel primo (1870) ammise che si formi un prodotto intermedio, una cloridrina benzoica. Sarebbe in fondo una reazione aldolica.

Egli ha iniziato delle ricerche su dei composti naturali importanti poco studiati, per tentare di conoscerne la costituzione e conseguirne la sintesi: tali sono le sue ricerche *sulla sintesi della conina* e *sull'acido tannico*. Se non è riuscito in tutto a risolvere il problema con dei risultati decisivi, i suoi studi hanno funzionato come si direbbe da svegliarino, ed hanno servito ad altri o per risolvere il problema o portarlo a buon punto.

Sino al 1881 si ammise per la *conina* la formola $C^8H^{15}N$. Lo Schiff nel 1868 scaldando in tubi chiusi l'aldeide butirrica con ammoniaca ottenne una base $C^8H^{15}N$ che aveva pressochè tutti i caratteri fisici e chimici della conina naturale. Questo fatto fece una notevole impressione. Però qualche tempo dopo si osservò che mentre la conina naturale ha potere rotatorio quella creduta sintetica era inattiva e perciò lo Schiff chiamò la sua base: *paraconina*. Questo lavoro risvegliò gli studi sulla conina naturale e l'Hofmann nel 1881 dimostrò che la conina aveva realmente la formola $C^8H^{17}N$, come aveva ammesso il Gerhardt. E dalla conina si ottennero delle basi $C^8H^{15}N$ isomere della paraconina.

Quando Schiff (1870) scoprì la *paraconina* non si aveva ancora idea di un vero alcaloide artificiale e per quanto siasi riconosciuto che la base di Schiff non è identica colla conina, resta sempre un lavoro importante assai nella storia della scienza, come il primo serio tentativo di sintesi di un vero alcaloide. Tanto più importante perchè la stessa base di Schiff fu poi ottenuta da altri, in diversa maniera.

Posso dire che l'Hofmann, e qualche altro chimico, si comportarono in questa occasione poco cavallerescamente collo Schiff; tanto più che facevano le grandi meraviglie perchè egli non si era subito accorto della mancanza del potere rotatorio!

Egli ha pure con numerose ricerche risvegliata la questione della natura delle *materie tanniche* contenute nelle piante e si occupò specialmente del tannino o acido gallotannico, facendo studi interessanti anche sull'acido gallico. Il problema della vera costituzione del tannino non è ancora risolto anche dopo le ricerche di Nierenstein, di Em. Fischer e di altri chimici; ma si deve dar merito a Schiff di averlo portato a buon punto, sia pure dopo critiche e controversie.

Il suo nome non è estraneo nemmeno alla storia delle materie coloranti artificiali, perchè nel 1863-64 discusse intorno alla quantità di acido arsenico nella formazione del rosso di anilina, e sulle proporzioni di anilina e toluidine necessarie da impiegarsi, e sui colori di naftilamina. Sono però lavori che oggi non hanno più che importanza storica.

Importanti sono le sue ricerche *sulle metallamine* o *derivati ammoniometallici*; incominciò collo studio delle combinazioni del-

l'*ammoniaca coi sali di rame e di cobalto* nel 1861, cui fecero seguito le ricerche ammoniometalliche dell'anilina ed altre basi; queste sue ricerche sulla costituzione dei derivati ammoniometallici furono subito tenute in considerazione dal Wurtz, il quale nelle sue: *Leçons sur quelques points de philosophie chimique* (1863) scriveva:

" Toutes les formules que nous avons données précédemment " et dans lesquelles entrent des métaux diatomiques sont doubles " de celle que M. U. Schiff a adoptées dans *son remarquable* " *travail* ". E più avanti a proposito delle cobaltamine:

" Ces bases ont été étudiées, dans ces dernières années, " par M. Fremy et par MM. Gibbs et Genth. M. U. Schiff y " admet, avec raison, l'existence d'un groupe $(CoO)^1$; il envisage " ce groupe comme monoatomique et comme formé par la com" binaison de l'oxygène diatomique avec le cobalt (Co = 59) " triatomique ".

Nel 1864 riunì tutte queste ricerche in un opuscolo: *Untersuchungen über metallhaltige Anilinderivate u. über die Bildung des Anilinroths,* Berlin, 1864, di 137 pag. in-8°.

È vero che ora, dopo cinquant'anni, le vedute teoriche sulle metallamine, secondo le idee di Werner, sono state di molto modificate. Ma nulla toglie al merito di U. Schiff, che anche in questo capitolo della chimica organominerale fu uno dei primi a portare delle buone pietre all'edificio. Non si devono mai dimenticare coloro che nei primordi di una grande questione hanno contribuito a rischiarare la via oscura.

Anche nella chimica inorganica e mineralogica lo Schiff ha fatto delle scoperte di non lieve importanza; non vi è quasi elemento, metallo o metalloide, che egli in qualche parte non abbia toccato. Lo studio del percloruro di fosforo su composti inorganici, incominciato da lui nel 1858 coll'ottenere i cloruri di cianogeno dai solfocianati, diede ottimi frutti. Già nel 1857 egli aveva adottato la teoria dei tipi di Gerhardt e nelle sue prime memorie mette in evidenza la sostituzione di OH con Cl negli acidi inorganici, fa il raffronto fra i composti solforosi e solforici, denomina il gruppo SO *tionile*, scopre il *cloruro di tionile* $SOCl^2$, il cloruro di nitrile NO^2Cl, la *tionilamide*, ecc.; prepara con un buon metodo l'ossicloruro di fosforo; scopre e studia molti derivati azotati o aminici del fosforo, ecc.

La scoperta del *cloruro di tionile* fatta nel 1858 è una delle più interessanti sia dal lato teorico che pratico. Ora è un prodotto diventato industriale e non privo di importanza.

Nel 1866 (1) fece conoscere una bella memoria di *chimica mineralogica* nella quale discute la questione degli acidi polibasici e loro anidridi, e delle fluoridrine siliciche. Discusse anche la questione de' composti fluosilicici e degli ossicloruri di silicio (1864 e 1885) e fa vedere come i composti a formole empiriche di Gorgeu e di Le Chatelier possano essere interpretati con formole razionali moderne.

E qui vanno ricordate come intermedie fra la chimica organica ed inorganica le sue belle e non facili ricerche *sugli eteri borici*, le quali dopo quelle di Ebelmen sono le più importanti e furono in parte eseguite coll'amico suo Emilio Bechi. Egli preparò gli *eteri normali* $B(OC^nH^{2n+1})^3$ e i *metaborati* $BO(OC^nH^{2n+1})$; come pure l'etere borico neutro della glicerina. Nel 1869 pubblicò una memoria che può dirsi classica: *Ricerche sugli eteri dell'acido borico*, la quale fu subito tradotta in francese dal Naquet. In questa memoria considera il boro come trivalente e l'acido borico come tribasico, e fa vedere come ne possano derivare delle serie di *acidi poliborici*, e dei *poliborati*.

Nè posso ora se non ricordare le sue ricerche sul perossido di cromo, sul tunsteno e molibdeno, sull'acido fosforoso e l'acido metilfosforoso, sull'idrato ferrico, sull'antimonio solforato, sulla preparazione del protossido di azoto, sull'azione dell'acido solforoso su molti corpi, sui polisolfuri dei metalli pesanti, sugli ossidi di stagno e di bismuto, ecc.

Negli anni che vanno dal 1858 al 1864 si occupò inoltre di argomenti che interessano la *chimica fisica*, che allora incominciava appena a svilupparsi, colle sue ricerche: sulla determinazione del peso specifico dei solidi, sui volumi specifici di composti organici, sulle relazioni fra il calorico specifico e la densità di vapore e la composizione dei gas, ecc. Fece una lunga serie di determinazioni del peso specifico di molte soluzioni saline (1859), che furono raccolte in tabelle le quali ancora oggi

---

(1) *Cenni di chimica mineralogica*, in " Giorn. di Sc. Nat. ed Econ. „, Palermo, 1866, vol. II.

si trovano insieme a quelle del Gerlach nelle agenda e nei prontuari di laboratorio. Interessanti sono le sue *ricerche sulla cristallizzazione delle soluzioni sovrasature e sull'influenza della temperatura sulla colorazione delle soluzioni* (1859): e forse ancora più interessanti sono quelle *sui cambiamenti di volume prodotti per la soluzione dei sali* (1860 e 1897).

Schiff si è occupato inoltre *delle doppie decomposizioni*; era noto che scaldando miscele di cloruro di sodio con solfato di ammonio si forma del solfato di sodio e cloruro di ammonio: ma Schiff dimostrò che già a temperatura ordinaria ha luogo la reazione inversa tra solfato di sodio e cloruro di ammonio ed ottenne un sale doppio $SO^4NaNH^4 . 2H^2O$.

Le sue ricerche già molto vecchie sulla solubilità dei sali in alcol a diversi gradi di concentrazione, quelle sul peso specifico dei liquidi, sull'applicazione delle formole di interpolazione (1858) sono ricordate con onore nei trattati più recenti e di valore, come il *Lehrb. d. allg. Chem.*, vol. I, dell'Ostwald. Talora però queste ricerche ed altre sono confuse con quelle del nipote suo.

Anche nella *chimica analitica*, specialmente organica, il nostro commemorato ha lasciato una traccia profonda; molti de' suoi lavori sono tuttavia utilizzati ed anche molto apprezzati. Tra le numerose ricerche posso ricordare il suo *Metodo di acetilazione e di determinazione del numero dei gruppi acetilici* introdotti in una molecola organica, e ciò mediante l'idrato di magnesio. È un metodo ottimo, che serve bene tuttora. Pure importante è il suo metodo per dosare gli alogeni nelle sostanze organiche e che si chiamò *Metodo Piria-Schiff*, perchè egli modificò e rese pratico un metodo di Piria.

Bella è la sua reazione caratteristica delle aldeidi mediante una soluzione diluita di fucsina decolorata col gas solforoso o coi bisolfiti, detto *reattivo fucsinico per le aldeidi*; trovò questo reattivo quando studiava l'azione delle aldeidi sulla rosanilina (1865-1866): questa reazione è la migliore e più sensibile per riconoscere le aldeidi negli alcoli, ecc. Pure interessante è la sua reazione generale per riconoscere i carboidrati per via secca mediante una cartina imbevuta di acetato di xilidina o di acetato d'anilina.

Bellissima poi la sua reazione derivante dalla precedente

per riconoscere il furfurolo nel fuseloel e quindi il fuseloel nei prodotti alcolici di fermentazione.

Egli fu il primo a riconoscere che non tutti i composti fenolici si colorano col percloruro di ferro (1). E meritevoli pure di molta attenzione sono le sue ricerche *Sui metodi di analisi indiretta* (1858), intorno al quale argomento si occupò di nuovo nel 1895. Fu il primo a dare una reazione colorata dell'urea.

Taccio delle sue reazioni dell'acido urico, della colesterina, del glucosio, del gas solforoso, della tintura di guaiaco, ecc.

L'insegnamento pratico nel suo Laboratorio era molto bene organizzato, ordinato; l'analisi chimica specialmente era insegnata proprio sul serio, con molta cura; il giovane laureato che usciva da quel Laboratorio conosceva benissimo l'analisi. In ciò egli era giustamente rigoroso.

Fra i suoi lavori in relazione colla *zoochimica* ricorderò: la formazione della vivianite nell'organismo animale (1858); sulla ricerca dell'acido urico, sulla ricerca del glucosio, sull'urina della tartaruga, ecc. Interessano molto la chimica fisiologica o zoochimica le sue ricerche sui polipeptidi aspartici, sulla disammidazione degli albuminoidi, sulla reazione biuretica. Egli accolse con grande piacere il mio libro: *Nozioni di zoochimica* (lettera 10 febbraio 1898).

Egli era amante anche delle cose storiche ed è molto bello il suo *Discorso su Priestley* come chimico, fisico, teologo e filantropo (2); le sue ricerche sullo Studio di Firenze, ecc.

A proposito delle mie *Notizie storiche su Macedonio Melloni*, mi scriveva il 6 marzo 1908: " Aspetto il vostro Melloni, " già per vedere se vi si trova qualche cenno su una proposta " di farlo succedere a Firenze a Nobili (1836). Ma il Granduca " non volle il rivoluzionario nella Capitale, come non volle il " Matteucci, il quale poi, raccomandato da Humboldt, riuscì a " Pisa ". Notizia questa che non trovasi nelle biografie del [Mell]oni.

[Al]tro merito infine non lieve, che io direi grandissimo, si [è] di aver dato ai Laboratori di chimica una serie di

(1) [Queste o]sservazioni si trovano in una Nota poco conosciuta, ma [...]zen zur organischen Analyse*, in "A. ", 1871, t. 159, p. 164.

(2) [*Il fil]osofo Giuseppe Priestley e la Pneumatologia*, Firenze, 1890.

istrumenti e di apparecchi utilissimi e che tutti i giorni i chimici hanno sotto mano. Ricordo: le lampade a vite micrometrica, un apparecchio per regolare la pressione del gas illuminante, la lampada a soffieria, la lampadina per reazioni microchimiche, l'apparecchio per densità di vapore, di Hofmann, modificato, un autoclave per tubi chiusi, un apparecchio per disseccare l'aria e l'ossigeno nell'analisi elementare, un apparecchio a sviluppo di gas solfidrico, un refrigerante, ecc. ecc.; ma sovratutti più importante è il suo ora celebre *azotometro,* che ideò nel 1867 e resterà esempio insuperabile dell'utilità scientifica e pratica di un istrumento di laboratorio, non solamente di chimica, ma per ricerche gazometriche, in fisica, nell'industria, ecc. Diecine di migliaia di questo suo azotometro si sono costruiti dal 1868 in poi.

Berzelius, Bunsen, U. Schiff sono i tre chimici che più hanno contribuito alla creazione e al perfezionamento degli apparecchi di Laboratorio. Con ciò egli ha inoltre contribuito allo sviluppo della nostra industria, perchè ha dato il buon esempio di far costruire molti di quegli oggetti in Italia dando anche agli industriali, pareri, consigli e incoraggiamenti.

Da quanto io ho esposto, chiaro appare come Ugo Schiff abbia toccato molti punti della scienza con vera genialità; molti e molti suoi lavori che possonsi veramente dire originali, hanno spinto a ricerche posteriori; sono stati, come suol dirsi, punti di partenza.

Egli ha inoltre contribuito molto a diffondere le cognizioni della chimica moderna in Italia; dal 1866 al 1875 circa ha scritto numerosi ed importanti capitoli della *Enciclopedia di chimica* del Selmi, e basti ricordare le voci: *Acidi*, *alcoli*, *aldeidi*, *benzoica serie*, *aromatici,* ecc., ecc.; ove erano esposte le teorie allora appena appena nate e che si andavano sviluppando e che non si trovavano in altri libri di lingua italiana. Questo, a mio parere, è un merito grandissimo. Di lui abbiamo inoltre una *Introduzione allo studio della chimica*, Torino, 1876, libro di pregio non comune.

Egli ha sempre avuto per principio lo studio della scienza per la scienza; non ha mai fatto della cattedra una sorgente di guadagno, non ha mai chiesto incarichi, nulla. Con pochi

mezzi ha ottenuto risultati notevoli, e, pure con pochi mezzi, impiantò in Firenze, dopo il 1880, un Laboratorio magnifico, relativamente a quello preesistente nel Museo di storia naturale.

Lo Schiff è stato uno di quei professori di scienze sperimentali che ha costato meno all'erario dello Stato ed ha fatto, relativamente, molto. Con mezzi limitati ha sempre lavorato, e compiuto scrupolosamente il suo dovere; e coll'esempio ha pure insegnato ai numerosi suoi allievi (professori nelle Università, nei Politecnici, nelle Scuole medie o impiegati in Laboratori dello Stato o nell'industria) a compiere il loro dovere. Nell'andamento del suo Laboratorio ha usato la più rigorosa parsimonia, la più rigida economia, che confinava, potrebbe anche dirsi, quasi, coll'avarizia.

Io avevo preparato un vasto materiale per una completa biografia analoga a quella che ho scritto per il mio primo Maestro, l'anima buona, nobile, geniale di Francesco Selmi, ma ho dovuto, date le circostanze attuali, ridurre il mio lavoro al *minimum*.

La figura di Ugo Schiff quale cultore ed amante della scienza, nel più elevato senso della parola, rimarrà sino a che la chimica sarà tenuta in onore, rimarrà impressa in tutti coloro che l' hanno intimamente conosciuto; direi che questo amore per la scienza era in lui quasi eccessivo, perchè sovrastava a tutto il resto, che pure contribuisce a quel po' di bello e buono che ha la vita umana. La scienza, è vero, è, o dovrebbe essere, l'aurora che illumina e guida l'umanità nel cammino che deve percorrere; ma sola non basta per lo spirito, e sovratutto per il cuore umano.

La trepidazione in Dante?

Nota dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

Il sig. Pietro Duhem, professore nell'Università di Bordeaux, di recente rapito alla scienza, ha pubblicato i primi quattro volumi di una poderosa opera intitolata: *Le système du Monde, Histoire des Doctrines Cosmologiques de Platon à Copernic*: di essa, vide testè la luce il quarto volume (Parigi, Hermann, 1916). In questo, il capitolo X, che occupa 117 pagine, è dedicato all'astronomia italiana nel medio evo: di esse sette trattano nel paragrafo V di Dante Alighieri.

Non ci occuperemo qui che dell'ultima parte di questa trattazione, che contiene una interpretazione di una terzina del *Paradiso*, nuova affatto, e contraria a tutte quelle proposte fino ad oggi, e che a nostro modestissimo avviso non regge affatto. Ecco le due terzine, trascritte dal sig. Duhem:

Ma prima che gennaio tutto si sverni,
Per la centesma ch'è laggiù negletta,
Ruggeran sì questi cerchi superni,

Che la fortuna, che tanto s'aspetta,
Le poppe volgerà u' son le prore,
Sì che la classe correrà diretta;

E vero frutto verrà dopo il fiore.

(*Paradiso*, XXVII).

Il sig. Duhem si ferma alla parola *diretta*, dopo la quale mette un punto fermo, mentre in Dante sta un punto e virgola: se egli avesse considerato anche il successivo verso, che è l'ultimo del canto, e meditato questo, non avrebbe certo messa innanzi la sua interpretazione astronomica.

Sull'interpretazione astronomica della prima terzina tutti sono d'accordo ed essa è accolta anche dal sig. Duhem, e più sotto

la svolgeremo; l'interpretazione invece della seconda non regge punto punto. Ecco ora testualmente il brano in questione:

" La première partie de l'allusion est absolument claire: " *la* " *centesma ch'è laggiù negletta* „ c'est l'excès de l'année julienne " sur la véritable année tropique, excès qui atteint presque un " centième d'année (*sic*, *sic*), et dont la négligence, en avançant " toujours la date de l'équinoxe, finirait par mettre Janvier tout " entier au printemps. Dès lors, ne semble-t-il pas que l'inter- " prétation la plus naturelle du tercet suivant soit celle-ci: Avant " le temps où le continuel déplacement de la date de l'équinoxe " aurait produit un tel effet, on verra se renverser le mouvement " de la flotte des étoiles fixes? Ce mouvement au lieu de se " poursuivre d'Occident en Orient, marchera d'Orient en Oc- " cident?

" Si cette interprétation est exacte, et il paraît difficile de " la révoquer en doute, c'est donc que en écrivant le *Paradis*, " Dante aurait abandonné la théorie de Ptolémée pour celle de " Thäbit ben Kourrah. Les critiques qui regardent la rédaction " du second livre du *Convito* comme antérieure à la composition " du *Paradis*, trouveraient là un nouvel argument en faveur de " leur opinion. Ils en ont un, d'ailleurs plus convaincant encore; " au huitième chant du *Paradis*, un ange dit à Dante: " Dans " un même cercle, d'un même mouvement, avec un même désir, " nous tournons avec les princes célestes auxquels, dans le " monde, tu as dit autrefois:

" *Voi che intendendo il terzo ciel movete.*

" Or ce vers est le thême de toutes les considérations astro- " nomiques développées au *Convito* „.

Prima di tutto avvertiamo il *lapsus calami* sfuggito al sig. Duhem asserendo che la differenza tra l'anno giuliano ed il vero anno tropico raggiunge quasi un centesimo di anno, vale a dire 3,6525 giorni solari medii; mentre si tratta di un centesimo di giorno, cioè $14^{m}\,24^{s}$.

Osservo ancora, che io non intendo neppure delibare la questione dell'epoca in cui fu scritto il *Convito* rispetto a quella in cui fu dettata la *Divina Commedia*, o se vuolsi il *Paradiso*: non è affar mio. Intendo unicamente dimostrare che l'interpretazione della seconda terzina non può essere quella astronomica del

Duhem, ma è quella morale data da tutti i dantisti, senza eccezione per quanto io mi sappia; o meglio, per stare nel campo astronomico, che in quella terzina la trepidazione non c'entra.

I.

La prima terzina presuppone in Dante la nozione della lunghezza dell'anno giuliano e di quello tropico, e pertanto della loro differenza: è poi a vedersi se la *centesma* debba riguardarsi come un valore esatto, o non pure, che, come pare anche al prof. Filippo Angelitti non inverosimile, egli abbia voluto parlare in cifre tonde (1). A mio modestissimo avviso, quella ultima supposizione è assai attendibile; un poema non è un trattato d'astronomia, nè una raccolta di dati numerici esatti. A questo proposito ne piace qui riportare quanto scriveva un dottissimo storico della scienza, l'abate Caverni (2): " ... parendomi che la " scienza astronomica sia, più spesso che non si crede, trasfor- " mata da Dante in poetica fantasia. Questo io asserirei ora di " certo, che il pretendere di ritrovare in tutto il poema quel " rigore matematico che in un trattato astronomico è un'ubbia " incominciata a entrare nei nostri cervelli da pochi anni in qua. " I nostri vecchi, che meditavano più serio di noi, non la pensa- " vano così, e io mi ricordo di aver letto in quei bei dialoghi " del Manetti pubblicati dal Gigli, che benchè Venere, alla quale " accenna nella terzina 7 del canto I del *Purgatorio*, fosse astro- " nomicamente a 15° dell'Acquario, nonostante il Poeta la pone " nei Pesci, perchè così *quadrava alla sua fantasia*. E anche la " luna, seguita il Manetti, che Dante dice essere stata piena " quando si smarrì nella selva, non era piena che al *proposito* " *suo*. Quante altre cose accomoda il divino cantore al suo pro- " posito e alla sua fantasia! Ma i commentatori moderni vor- " rebbero della *Commedia* farne un Almagesto „ (3).

(1) *Sulla data del viaggio Dantesco*, in "Atti dell'Accademia Pontaniana„ vol. XXVII, 1897, N. 7, pag. 24 della Memoria.

(2) Ferrazzi, *Manuale Dantesco*, vol. V, pag. 69; Zanotti Bianco, *Nel Regno del Sole*, Torino, Bocca, 1899, pag. 68.

(3) Intorno alle posizioni di Venere e della Luna è importante il già citato lavoro del prof. Angelitti; egli però non menziona il Manetti.

Di parere diametralmente opposto a quello del Caverni è il sig. Angelitti, il quale nel suo pregevole studio già ricordato così scrive: “ Nelle descrizioni dei fenomeni naturali, che qui “ ho avuto occasione di esaminare, in altre, che frequentemente “ s'incontrano nella *Commedia*, e che forse saranno oggetto di “ nuovi studi, nelle allusioni e negli accenni rapidi a questioni “ scientifiche, il poeta mostra una grande sicurezza ed estensione di conoscenze fisiche, cosmografiche, geodetiche ed astronomiche; egli parla con grande accorgimento, e con tutto il “ rigore, che si può desiderare. Ciò è bello e magnifico, perchè “ rivela quanto felicemente egli riuscisse a rendersi padrone “ della scienza dei suoi tempi. Ma più bello e meraviglioso è “ che le sue descrizioni celesti, cimentate con le tavole, che “ oggi costituiscono il più grande monumento dell'astronomia di “ precisione, rispondono esattamente alla realtà, e manifestano “ in lui lo scienziato dedito a ricercare il vero, osservando e “ sperimentando. Pochi, forse, potranno imaginare il piacere, che “ io ho provato ogni volta quando, dopo calcoli lunghi e faticosi, ho veduto confermate le indicazioni date da Dante; ma “ tutti vorranno meco partecipare all'ammirazione per lui, che, “ esempio forse unico, accoppiò il genio della poesia con l'osservazione attenta ed accurata dei fatti della natura, e seppe “ disposare lo splendore delle concezioni artistiche con l'esattezza delle cognizioni scientifiche „.

A questo modo di vedere si accosta un valoroso storico della scienza, il sig. J. L. E. Dreyer, inglese (1).

Per la differenza fra l'anno tropico e l'anno giuliano, le cognizioni astronomiche di Dante sono esattissime per i suoi tempi: ma dove le attinse egli? Si ritiene generalmente che Dante attingesse le sue cognizioni astronomiche dagli scritti dell'astronomo arabo Alfergano, che però egli nomina una volta sola (2) col nome. Nel trattato II del *Convito* menziona il *libro dell'ag-*

(1) *History of the planetary systems from Thales to Kepler*, Cambridge, 1906, University Press.

(2) *Convito*, trattato II, cap. XIV, pag. 154, linea 13 dell'edizione del Fraticelli: ho scritto una *volta sola*, stando all'*Enciclopedia Dantesca* del Dr. Scartazzini. Il prof. Angelitti afferma che nella *Quaestio* Alfergano e Orosio sono non solo seguìti, ma anche nominati, senza citazioni.

gregazione delle stelle (1), che sarebbe il titolo di un'opera di Alfergano (2). Il sig. Angelitti non si pronunzia al riguardo e scrive: “ ma sembra che Dante si sia attenuto alla determina-“ zione di Albategno, se pure non si voglia ammettere che egli, “ pur stimando più esatta quella degli Alfonsini, abbia ritenuto “ la differenza con l'anno giuliano della centesima parte del “ giorno per parlare in numero tondo „ (3). Il signor Orr — pseudonimo della signora Evershed — ritiene che Dante probabilmente non conosceva gli scritti di Albategno (4).

A me pare perfettamente ozioso il costruire ipotesi e supposizioni, naturalmente campate in aria, sul modo col quale Dante potè acquistare le cognizioni che egli dimostra nei suoi scritti: sono tanti i modi coi quali un uomo avido di istruirsi poteva farlo anche ai tempi di Dante. È poi immensa la libertà che un poeta ha, così che non è certo un poeta che starà a dare le frazioni esatte. Il Mazzoni nella sua *Difesa della Commedia di Dante* (4°, Cesena, 1573, lib. III, cap. 26) (5), che non è menzionato nè dal sig. Angelitti, nè dalla signora Evershed, prende la parola *centesma* letteralmente e dà per lunghezza dell'anno tropico accettata da Dante 365 g. 5 ore 45 min. 36 sec., che differisce dall'anno giuliano di 14 m. 24 s., che è appunto

---

(1) Ediz. del Fraticelli, pag. 129, linee 4 e 5.

(2) Questo titolo sarebbe scomparso nelle edizioni a stampa, ed avrebbe assunto espressioni diverse. Schiaparelli scrive: *Elementi di Astronomia* (“ Pensiero Italiano „, fascicolo XVI, aprile 1892); il Fraticelli nel luogo citato *Introduzione all'Astronomia*. Il P. Boffito scrive *Libro dei movimenti celesti e compendio della scienza delle stelle*, che nella traduzione latina porta il titolo di *Chronologica et astronomica elementa* (ediz. del Christman, Francoforte, 1590, in 8°) o di *Elementa astronomica* (ediz. del Golio, Amsterdam, 1669, in 4°). *Intorno alla “ Quaestio de Aqua et Terra „ attribuita a Dante*, Mem. I, pag. 17, in “ Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, anno 1900-1901, pag. 89. L'*Enciclopedia Dantesca* dello Scartazzini registra *Rudimenta Astronomica*, Norimberga, 1537, ecc., ecc., e varie altre edizioni portano altri titoli.

(3) Memoria citata, pag. 24.

(4) *Dante and the early astronomers*, London, Gall and Ingle's, pag. 274.

(5) L'opera qui citata dall'Houzeau non è del 1573, ma del 1587: del 1573 è l'opuscolo del Mazzoni intitolato *Discorso di Giacopo Mazzoni in difesa della “ Commedia „ del divino poeta Dante*. Questo *Discorso* era già stato pubblicato in Bologna nel 1572 dall'autore stesso, ma sotto il pseu-

la centesima parte di un giorno. Il parere di Jacopo Mazzoni deve avere un peso preponderante, poichè un dantista come il Ferrazzi fa suo l'avviso di un altro grande dantista e scrive: " Il Mazzoni, a giudizio del prof. Giuliani, vuolsi annoverare fra " i più degni che agevolandone la dichiarazione fecero migliore " stima e promossero lo studio del gran testo della nostra lingua " e poesia „. FERRAZZI, *Manuale Dantesco*, vol. IV. Bassano, Pozzato, 1871, p. 565.

Sia come vuolsi, giova non scordare, che Dante conobbe personalmente Brunetto Latini, che aveva visitato la corte spagnuola di Alfonso; e che per di più egli ebbe certo occasione di udire menzione dell'appello di Ruggero Bacone al papa Clemente IV nel 1267, per la correzione del calendario richiesta dalla ricorrenza dell'equinozio di primavera in relazione colla solennità della Pasqua. Ad ogni modo Dante colla sua *centesma* non si è scostato molto dal valore. È assai facile calcolare anche per i tempi di Dante, ad esempio, pel 1300, la differenza fra l'anno giuliano e l'anno tropico: il sig. Angelitti già lo fece adottando la lunghezza dell'anno tropico calcolata da Hansen ed Olufsen: qui lo faremo pel 1300 adottando la lunghezza dell'anno tropico data dalla *Connaissance des temps*, che è

$$365{,}24219647 - 0{,}00000624\, t,$$

ove t è espresso in secoli di 36525 giorni solari medii caduno: per il 1300, 365,24223391, e la differenza dell'anno giuliano 0,00776609 giorni solari medii, che è circa $\frac{1}{129}$. Ed ora passiamo alla seconda terzina.

donimo di Donato Boffia. Nel *Discorso* è detto solamente: " (Dante) mostrò " di hauer penetrato molto a dentro le teoriche dei pianeti quando disse:

Ma prima che gennaio tutto si sverni,
Per la centesma ch'è laggiù negletta „.

Vedasi l'edizione di quel *Discorso* fatta a cura di Mario Rossi nel 1898 dal Lapi di Città di Castello. Forse nella *Difesa* è detto di più: ma non potei consultarla.

II.

I versi dei quali dobbiamo occuparci sono i seguenti:

> Che la fortuna, che tanto s'aspetta,
> Le poppe volgerà u' son le prore,
> Sì che la classe correrà diretta;
> E vero frutto verrà dopo il fiore.

In questi versi il sig. Duhem ha creduto di vedere la teoria della trepidazione: e prima di tutto che cosa è la trepidazione? Giova vederlo brevemente, anche perchè in libri anche recenti si leggono notizie molto inesatte intorno ad essa. Il primo autore nel quale noi troviamo menzione della trepidazione è Teone da Alessandria (seconda metà del secolo quarto d. G. C.): il brano che vi si riferisce è contenuto in uno scritto intitolato *ΚΑΝΟΝΕΣ. ΠΡΟΧΕΙΡΟΙ Tavole manuali.* A proposito di esse Délambre scrive: " Tel est le titre d'un manuscrit de la Bi" bliothèque du Roi, dont le numéro est 2399. Cet ouvrage est " encore inédit, Dodwell en a publié les cinq premières pages " à la suite de ses *Dissertationes Cyprianae*, Oxford, 1684, in-8°. " Il n'en a tiré que ce qui pouvait intéresser la chronologie. " Nous allons y prendre tout ce qui nous paraîtra neuf et qui " concernera l'astronomie „. Dopo ciò, crediamo vero pregio dell'opera il riferire alcune notizie bibliografiche intorno agli scritti di Teone Alessandrino, a completare il cenno di Délambre: le desumiamo dall'opera oggi rarissima di J. C. Houzeau, intitolata *Vade-mecum de l'Astronome*, pubblicata negli " Annales de l'Observatoire de Bruxelles „, Bruxelles, 1882. L'opera principale di Teone Alessandrino è un Commentario sull'Almagesto di Tolomeo; ma non fu conservato intiero. Esso constava di tredici libri. Manca il libro III, che Nicola Cabasilas cercò di ricostituire. Nicola Cabasilas era arcivescovo di Tessalonica nel 1350. Lo scritto di Cabasilas fu pubblicato a Basilea nel 1538 insieme all'Almagesto di Tolomeo ed al Commentario di Teone. In questa edizione il principio del V libro di Teone, che non era ancora stato scoperto in un manoscritto di S. Marco in Venezia, è sostituito da una parte del Commentario di Pappo sul

libro medesimo. Mancano ancora la fine del decimo libro, tutto l'undecimo ed il Commentario del dodicesimo. Giovan Battista Della Porta ha dato una traduzione latina del primo libro della *Sintassi* di Tolomeo, e del Commentario di Teone che vi si riferisce. Napoli, 1605.

I primi tre libri nel testo greco e tradotti in francese sono stati pubblicati da Halma: *Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier (second, troisième) livre de la composition mathématique de Ptolémée*, traduit pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi, par N. Halma, 3 vol., in-4°, Paris, 1821-22. Il 3° volume è in due parti, delle quali la seconda è intitolata: *Tables manuelles des mouvements des astres de Ptolémée et de Théon*, traduites pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi, par N. Halma, in-4°, Paris, 1825, secondo Houzeau...; Duhem scrive: Paris, 1822. Circa il valore della traduzione dell'abate Halma, Duhem così scrive: " La traduction " de l'abbé Halma, comme il arrive trop souvent, est un perpétuel " contre-sens „. Noi riporteremo da Délambre (1), che oltre essere un sommo astronomo era anche un ellenista di grande valore, il brano di Teone che concerne la trepidazione: esso forma un capitolo a sè intitolato: *περὶ τροπῆς*, *Della conversione*.

" Questo capitolo, puramente storico, ci insegna un fatto " curioso ed assai poco noto: lo tradurremo tutto.

" Secondo certe opinioni (*κατά τινας δόξας*), gli *antichi* astro- " logi (*παλαιοὶ τῶν ἀποτελεσματικῶν*) vogliono che i segni sol- " stiziali, a partire da una certa epoca (*ἀπὸ τινος ἀρχῆς χρόνου*), " abbiano un movimento di 8°, secondo l'ordine dei segni, dopo " il quale indietreggiano della medesima quantità (*πάλιν τὰς* " *αὐτὰς ὑποστρέφειν*); ma Tolomeo non è di questa *opinione*, " giacchè senza introdurre questo movimento nel calcolo, quello " che si fa sulle tavole è sempre d'accordo coi luoghi osservati " cogl'istrumenti. In conseguenza anche noi consigliamo di non " adoperare questa correzione, e tuttavia noi esporremo l'anda- " mento di questo calcolo; e prendendo come un fatto che " 128 anni prima del regno di Augusto, il più grande movi- " mento, che è di 8°, avendo avuto luogo in avanti, le stelle

(1) Délambre, *Histoire de l'Astronomie Ancienne*, II, pagg. 625-26-27.

" cominciavano a ritornare indietro; ai 128 anni trascorsi prima " del regno di Augusto, noi aggiungeremo i 313 fino a Diocle- " ziano, ed i 77 dopo Diocleziano, e della somma (518) noi pren- " deremo la 80ª parte, poichè in 80 anni il movimento è di 1°. " Il quoziente (6°,45 = 6°,27') (1) sottratto da 8°, darà la quan- " tità (1° 33'), della quale i punti solstiziali sarebbero più avan- " zati di quanto si ottiene colle tavole ".

Duhem dice che i latini hanno chiamato questo moto oscillatorio degli equinozi, *motus accessus et recessus*, senza indicare alcun autore. Délambre adotta quel nome nella sua *Histoire de l'Astronomie au moyen âge*, pag. 74, linea 7; ma la numerazione delle pagine è sbagliata. Dalle parole di Teone appare che gli *antichi astrologi* erano secondo lui anteriori a Tolomeo: Délambre scrive a questo proposito: " Hipparque n'en " fait (del moto di accesso e recesso) aucune mention dans ses " recherches sur la précession; Ptolémée n'en parle pas davan- " tage. Cette *opinion* était donc entièrement ignorée, ou totale- " ment méprisée par ces astronomes. On peut soupçonner que " des astrologues cherchant les lieux de quelques étoiles dans " les écrits de diverses astronomes, avaient trouvé des différences " notables, et que pour les sauver, ils avaient imaginé ce mou- " vement: mais qui a pu les porter à faire ce mouvement alter- " natif; comment en ont-ils fixé l'étendue et la période? c'est ce " qu'il n'est pas aisé de deviner, et ne vaut guère la peine d'être " discuté. Le plus simple est de regarder cette rêverie des astro- " logues comme étrangère à l'astronomie " (2). Th. H. Martin ritiene che gli *antichi astrologhi* menzionati da Teone fossero posteriori ad Ipparco: il sig. Duhem ritiene più prudente il dubbio (3). Albatenio (astronomo arabo) dice che Tolomeo *di-*

---

(1) Dividendo 518 per 80 si ha 6°,475, pari a 6° 28′ 30″, e non come scrive Délambre 6′,45 = 6° 27′. Questa svista di Délambre è anche corretta a pag. 204 dell'opera di Dreyer intitolata *History of the planetary systems from Thales to Kepler*, Cambridge, University Press, 1906. Così il numero 1°,33′ dato in seguito da Délambre diviene 1° 31′ 30″.

(2) *Histoire de l'Astronomie Ancienne*, II, pag. 627.

(3) MARTIN, Mémoire sur cette question: *La précession des équinoxes a-t-elle été connue des Égyptiens ou de quelque autre peuple avant Hipparque?* in " Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres ", tome VIII, 1869, ch. II, § 3; DUHEM, op. cit., vol. II, 1914, pag. 195.

chiara apertamente nel suo libro che le stelle hanno un moto alternativo di 8° in ragione di 1° in 80 anni; Letronne, cui si accosta Martin (1) ha dimostrato che il libro di Tolomeo, menzionato da Albatenio, non è la *Grande composizione matematica*, ma il Commentario di Teone di Alessandria. Tolomeo, come afferma Délambre e conferma Martin, ignora, come lo ignorava Ipparco, l'accennato moto alternativo. Il prof. Nallino osserva, in nota a pag. 299 dell'opera citata in nota, che Martin non conobbe il passo di Albatenio, che dalla dissertazione di Letronne. Egli poi corregge alcuni giudizii di Letronne e Martin, appoggiatisi ad una inesatta affermazione di Columella: della quale Schiaparelli chiarì la causa: osserva ancora che non è attendibile quanto Albatenio afferma che gli *antichi astrologi* menzionati da Teone fossero prima d'Ipparco: notando come Letronne e Martin con validi argomenti abbiano dimostrato, che essi furono senza dubbio posteriori ad Ipparco, ma forse fiorirono prima di Tolomeo. Lo spazio ristretto, assegnato, per le condizioni economiche cagionate dalla guerra, alle pubblicazioni dell'Accademia, non consente che ci dilunghiamo, come meriterebbe, sulla trattazione del sig. Nallino intorno al moto oscillatorio degli equinozii: ma di essa ci gioveremo ancora brevemente.

La dottrina della trepidazione è anche menzionata da Proclo Licio, detto spesso Proclo Diadoco (il successore), il celebre commentatore di Euclide, di Tolomeo e di Esiodo: questo fatto però è sfuggito a Délambre; ma lo avvertirono Letronne e Martin, come nota Nallino. Questi riferisce così il brano di Proclo: " Alii autem arbitrati sunt puncta tropica quidem moveri; non " tamen per totum circulum (eclipticae), sed aliquot gradibus, " et postea denuo iisdem regredi „ (2). Proclo negava recisa-

(1) Letronne, *Nouvelles recherches sur le calendrier des Anciens Égyptiens*, Mem. II, § 4, N. 2, pagg. 105-109; Martin, Mem. cit., pag. 371 del volume che la contiene. Vedasi a questo riguardo la classica opera di Carlo Alfonso Nallino su Albatenio, che costituisce il N. XL delle " Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano „, Parte I, Milano, 1903, pagine 126, 298-300.

(2) " *Hypothèses* „ *de C. Ptolémée et* " *Hypotyposes* „ *de Proclus Diadocus* (publiées et) traduites par Halma, Paris, 1820, pag. 88, così citato anche

mente la precessione degli equinozii, da buon scuolaro di Platone, quale egli era; vedi Martin, Duhem, Dreyer, Bouché-Leclercq (1): è quindi inesatto, sotto varii aspetti, l'asserto di Délambre (*Astronomie ancienne*, I, pag. 314), che Proclo supponga, come Tolomeo, la precessione di 36″ all'anno, senza aggiungere altro.

Secondo espone Teone, ritenevano dunque molti antichi astrologi, che il moto di accesso e recesso delle stelle si compiesse in 1280 anni, 640 a percorrere gli 8 gradi di accesso e 640 gli 8 di recesso: questo movimento avrebbe, secondo loro, cominciato a rivolgersi verso occidente nell'anno 128, prima di Augusto. Qui ci si consenta una breve parentesi. Martin scrive: " 128 prima di Augusto, vale a dire l'anno 158 prima di Gesù " Cristo (l'anno —157 astronomico) „ (p. 446); Duhem vuole che l'anno 128 prima di Augusto corrisponda a 155 prima di Gesù; Délambre poi scrive: " *128 avant Auguste ou 170 ans avant* " *notre ère* „. Certo questi tre autori partono da momenti diversi della vita di Augusto. Albatenio nel suo *Opus astronomicum* (Nallino, part. I, pag. 127) scrive: " Dixerunt quoque progres- " sionem desiisse 128 annos Aegyptios ante Augustum regem, " scilicet anno 166 Alexandri Macedonis „. In nota poi Nallino riporta la seguente osservazione di Platone Tiburtino, autore di una traduzione in latino dell'*Opus* di Albatenio: " Aera Alexandri " Macedonis vel ab Alexandro mortuo est aera Philippi Aredaei " quam auctor noster incipit die 29 Aug. 324 ante Christum " natum „. Per quest'êra di Filippo è importante quanto scrive Nallino (I, p. 243): vedasi intorno ad essa anche Biot, *Résumé de Chronologie astronomique*, " Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris „, tomo XXII, 1849, e Ginzel, *Handbuch der Matematischen und Technischen Chronologie*, vol. I, Leipzig, 1906. A mezzo dei metodi insegnati in queste opere si può riconoscere che l'anno 166 dell'êra di Alessandro il Macedone, ossia 128 ante

---

da Martin a pag. 447 del volume menzionato nella nota precedente. Si ha anche un'edizione recentissima delle *Hypotyposi* di Proclo Diadoco a cura di Carlo Manitius, Lipsia, 1909.

(1) Per Martin, Duhem, Dreyer, vedi le opere già citate; Bouché-Leclercq, *L'astrologie grecque*, Paris, Leroux, 1899. È curioso che Bouché-Leclercq non menzioni nè Teone Alessandrino, nè la trepidazione.

Augustum regem, corrisponde all'anno 158 prima di Gesù Cristo (— 157 astronomicamente): e ciò si può anche ottenere facilmente a mezzo delle tavole di SCHRAM, *Kalendariographische und Chronologische Tafeln*, Leipzig, 1908: e si cade così appunto sulla proclamazione di Augusto quale *imperator*.

Poichè secondo gli *antichi astrologi* nell'anno 158 a. C., vale a dire circa l'epoca presunta delle prime osservazioni d'Ipparco, i punti equinoziali avevano cominciato a muoversi verso occidente, e dovevano impiegare 640 anni a percorrere gli 8 gradi di *recesso*, così verso il 483 d. C. essi avrebbero dovuto cominciare a muoversi in senso opposto, nell'*accesso* verso oriente. Trascorso qualche anno, quel movimento non constatandosi, era necessario o ammettere il movimento degli equinozii progressivo pel medesimo verso, od aumentare l'ampiezza dell'arco della loro supposta oscillazione o *trepidazione*, o rinunziare a questa.

Martin che ha scritto con molta erudizione la storia di quella strana teoria, proveniente, senza fallo, o da cattive osservazioni, o da inesatta interpretazione di osservazioni buone, così si esprime al riguardo: " Ce dernier parti (quello di aumentare " l'arco di oscillazione) fut pris, comme nous le verrons, par des " astronomes indiens et arabes. Nous ignorons si des astronomes " grecs leur en avaient donné l'exemple „ (1). Non è qui nostro scopo l'esporre quelle considerazioni storiche, ma ne occorre fermarci alquanto sopra un astronomo arabo, che il sig. Duhem pretende fosse noto a Dante e da lui seguito. Questo astronomo arabo è Thebit ben Kourrah (spesso scritto Thābit ibn Qurrah): di esso e della sua teoria della trepidazione si sono occupati Délambre ed a lungo il sig. Duhem.

Nella teoria della trepidazione veniva stranamente ad ammettersi che l'oscillazione degli equinozii si compieva con velocità uniforme per cambiare bruscamente di direzione: questa incongruenza meccanica assieme alla constatazione sopra menzionata indussero certo Thebit a proporre la sua Teoria, che egli espose nel suo libro *De motu octavae spherae*, che non fu mai stampato. A pag. 466 del tomo I della *Bibliographie générale de l'Astronomie*, di HOUZEAU e LANCASTER, Bruxelles, 1887, nell'elenco delle opere di Thebit, si legge: *Tractatus de motu octave spere*, 1480.

(1) Memoria e volume citati, pag. 447.

Eccessivamente raro. Questo volume non porta nome d'autore. Non è dato il luogo della pubblicazione. A proposito di questo libro a stampa il sig. Nallino scrive quanto segue (1), alludendo a certe parole del testo: " Eadem, cum aliis, iisdem fere verbis " sunt in libello anonymo *De motu octave spere*, in calce *Theo-* " *ricae planetarum* (Bononiae, 1480), impresso, f. 39, r. Suspicor " illius libelli auctorem esse ipsum Gherardum a Sabloneta. — " Vehementer errat Steinschneider in compluribus suis scriptis, " hunc confundens cum inedito libro eiusdem tituli a Thābit ben " Qurrah conscripto; praeterea Steinschneider (2) librum Thābit " etiam Venetiis anno 1518 (impensa heredum Octaviani Scoti) " prodiisse affirmat, cum haec editio Tebith *De imaginatione* " *sphere* praebeat (cfr. BONCOMPAGNI, *Delle versioni fatte da Pla-* " *tone Tiburtino*, pag. 261 e 269-70) (3). Steinschneider aucto- " ritas in errorem induxit Suter, *Nachträge und Berichtigungen* " *zu die Mathematiker und Astronomen der Araber*, in " Abhand- " lungen der Geschichte der Mathematischen Wissenschaften ", " t. XIV, 1902, pag. 163 ". Non sappiamo quindi comprendere come il sig. Duhem affermi che il sig. Nallino attribuisce a Gherardo da Cremona il *De motu octave spere*, mentre, come appare da quanto sopra, il sig. Nallino scrive ben chiaramente *Gherardum a Sabloneta*. Il sig. Marie (*Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, tomo II, pag. 163) avvertiva già che i due Gherardi dianzi nominati vengono spesso confusi.

Per sommi capi e in breve la teoria di Thabit è la seguente: Oltre l'ottava sfera o cielo stellato, egli immagina una nona sfera senz'astri animata dal solo moto diurno, che accolta dalla scuola araba, ebbe poi il nome di *primo mobile* (4); e che Dante menziona spesso col nome di *cielo cristallino*, così detto perchè *diafano e tutto trasparente*. Su questa nona sfera sta un'eclittica fissa, la quale taglia l'equatore in due punti (equinozii medii o

(1) *Opus astronomicum*, I, pag. XXXVI, nota 1.

(2) " Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei ", 1851.

(3) A pag. 410 del vol. II della sua opera il sig. Nallino pone una nota che dice: " Steinschneideri errores repetit BJÖRNHO, *Die Mathem. S. Marcohandschriften*, " Bibl. Mathem. ", 3 Folge, VI, 1905, n. 3 ".

(4) Délambre afferma, che questa *nona sfera* è stata chiamata anche *secundum mobile*, ma non dice quando nè da chi.

fissi), con un angolo di 23° 33′ 30″ (1). Sull'ottava sfera poi, o cielo stellato, sta un'eclittica mobile, attaccata in due punti diametralmente opposti a due piccoli cerchi aventi i loro centri nei due equinozii fissi ed un raggio sferico di 4° 18′ 43″. I due punti tropicali (solstiziali) del Cancro e del Capricorno non si scostano mai dall'eclittica fissa, ma si scostano in qua ed in là di 8° 37′ 26″ lungo essa, mentre due punti dell'eclittica mobile distanti 90° dai punti tropicali, percorrono le circonferenze di due piccoli cerchi, di guisa che l'eclittica mobile s'alza e s'abbassa rispetto a quella fissa, mentre i punti d'intersezione dell'equatore e dell'eclittica mobile procedono e retrocedono di 10° 45′ dalle due bande. Questo è un moto dell'ottava sfera comune a tutte le stelle: e così a mezzo di un movimento continuo lungo i detti due piccoli cerchi, veniva evitato il brusco cambiamento di senso del movimento supposto da Teone. Allo scritto di Thäbit vanno unite, in alcuni manoscritti, certe tavole per il computo del moto di accesso e di recesso: Délambre le riproduce a pag. 75 della sua *Histoire de l'Astronomie au moyen âge*, scrivendo: “ *ces données sont pour les années et l'époque des* “ *arabes* „. Duhem afferma che esse tavole “ *sont construites les* “ *unes au moyen de l'année arabe, les autres au moyen de l'année* “ *chrétienne. Ces dernières* (dunque quelle *construites au moyen de* “ *l'année chrétienne*) *nous enseignent que la tête du Bélier et la* “ *tête de la Balance* (cioè i punti equinoziali) *accomplissent cha-* “ *cune leur révolution en 4171 ans et demi* „. Quel numero di 4171,5 anni è dato da Délambre coll'aggiunta della parola *environ*: esso è dato anche da Martin: ma mentre Délambre dichiara che esso è espresso in annate arabe, Martin non accenna all'unità di misura del tempo. Ma l'affermazione di Délambre è esatta e Valentiner esprime quel periodo in anni giuliani (*Handwörterbuch der Astronomie*, I, pag. 52), colla cifra 4056 anni e 331 giorni: che però va corretta in 4047 anni e 67 giorni in cifre tonde (2). Non tutti gli astronomi posteriori a Thäbit ac-

(1) Non, come scrive Duhem, II, pagg. 241 e 245, 23° 30′. Vedi Dreyer, loc. cit., pag. 276.

(2) A questo risultato si giunge ricordando che 30 anni mussulmani costituiscono un ciclo comprendente 10631 (in cifre tonde) giorni solari medii.

cettarono la sua teoria, della così detta *trepidazione* o *titubazione*, o moto di *accesso* o *recesso*, ma è certo che essa si mantenne nelle tavole astronomiche finchè Tyco Brahe fece vedere, come essa fosse stata immaginata a spiegare irregolarità nelle posizioni delle stelle, che invece provenivano da osservazioni errate o male interpretate. Délambre e Martin sono molto severi con Thābit: Duhem, molto meno autorevole di quelli, lo è meno. Keplero non era però alieno dall'ammettere qualche piccola irregolarità nel valore della precessione annua. Ancora Copernico s'atteneva all'antico errato concetto, di un moto irregolare degli equinozii, non essendosi a lui affacciata l'idea che alcuni errori d'osservazione bastavano a chiarire i divarii fra i diversi valori della costante della precessione provenienti da osservazioni eseguite nell'antichità e nel medio evo. Copernico adottò come valore medio annuo della precessione 50″,2; presso che esattamente il vero valore; ma non respinse l'infelice teoria della trepidazione di Thābit.

Molte inesattezze si leggono intorno alla trepidazione in quasi tutte le istorie dell'astronomia: a noi bastino i sommarii cenni qui dati (1).

III.

Ed ora veniamo all'affermazione del sig. Duhem, che cioè nelle terzine scritte in principio di questa Nota, Dante alluda alla trepidazione.

È ammesso che Dante attinse le sue cognizioni astronomiche da Alfragano, divulgatore scrupoloso della scienza astronomica di Tolomeo, che come questi ignora o tace la trepidazione: par quindi naturale che anche Dante nulla ne sappia. Se ne avesse saputo alcunchè, nel *Convito* qualche cosa n'avrebbe pur detto, accennando alla nona sfera, o *cielo cristallino*; invece non vi si riscontra neppure l'ombra del più lontano accenno.

E poi è egli mai possibile che Dante chiamasse *fortuna che tanto s'aspetta* il cambiar di verso nel movimento degli equinozii,

---

(1) Per una curiosa modificazione alla teoria della trepidazione, introdotta da Fracastoro, vedi Günther, *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie*, Halle, 1877, 1° fasc., pag. 40.

che in un verso sarebbe stato *fiore* e nell'altro *frutto*, e che ignorato dalla gran parte degli uomini, sarebbe passato inavvertito e senza influenza sui destini umani. Solo chi non è compreso e conscio del senso morale altissimo che tutto pervade e informa il divino poema poteva proporre una simile spiegazione a sostituire quella generalmente accolta, che costituisce la convenientissima chiusa di quel canto, collegata a tutto il canto medesimo, ed adombrata nella terzina 42:

> Ben fiorisce negl'uomini 'l volere;
> Ma la pioggia continua converte
> In bozzacchioni le susine vere.

che il Tommaseo chiama de' più belli di tutto il poema. Chiusa che accenna al miglioramento morale degli uomini, all'avvento della giustizia, alla condanna di quella cupidigia che ci distoglie dalle alte e migliori cose, cupidigia della quale il poeta riversa la colpa sui pessimi esempi e sull'incuria di chi governa (Tommaseo). E quel miglioramento, quella virtù largiti agli umani dall'alte sfere, sarebbero state allora, e sarebbero oggi, per fermo, più che mai la *fortuna che tanto s'aspetta*, ma invano pur troppo. come attestano gli orrendi giorni in cui viviamo (1).

Torino, dicembre 1916.

---

(1) È assai importante un recente libro della sig.ª John Evershed (che ha il pseudonimo M. A. Orr.) intitolato *Dante and the Early Astronomers*, Londra, Ingle's, 1913. Ivi giustamente si fa Dante studioso di Alfragano, e quindi seguace di Tolomeo, e pertanto ignaro affatto della trepidazione, sia secondo Teone o secondo Thābit. Il “ Bulletin des Sciences mathématiques „ degli ultimi anni contiene diffuse recensioni dei primi tre volumi dell'opera del sig. Duhem, dettate dal ch.^{mo} sig. prof. Gino Loria, dotto e autorevole cultore della storia delle matematiche. Il “ Bulletin Astronomique „ degli anni 1914-1916 ha pure stampato larghe recensioni dei primi quattro volumi della detta opera, scritte dal sig. Doublet, astronomo all'osservatorio di Bordeaux. Nella recensione del quarto volume è menzionata l'apparente, secondo il sig. Duhem, adesione di Dante alla teoria della trepidazione: opinione questa che a noi pare del tutto infondata e campata in aria, come dimostriamo nella presente Nota.

Sopra un caso di frattura spontanea di un acciaio temprato.

Nota del Dr. Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

(Con una Tavola).

Un caso tipico di frattura spontanea di una punta di punzone in acciaio temprato si è recentemente verificato nelle Officine della Società Anonima Italiana per la Fabbricazione dei Proiettili in Torino.

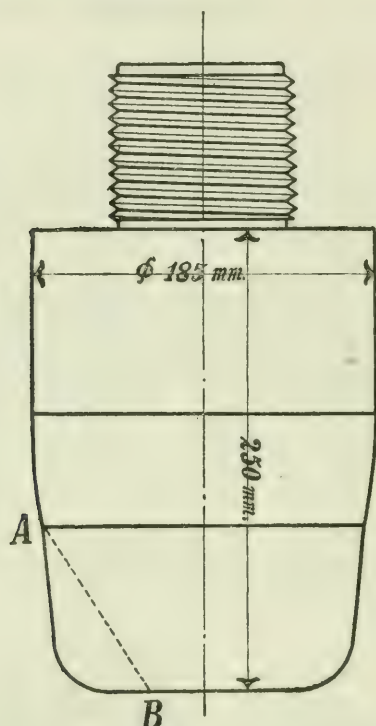
Le fratture occasionate dalla tempra sono per verità tutt'altro che infrequenti, sicchè gli operai stessi addetti a questo genere di lavori, per poco che siano sperimentati, le riconoscono al rumore caratteristico che le accompagna. Raramente però tali fatti si verificano in condizioni così interessanti e ben precisate come nel caso attuale: più raramente ancora le faccie della frattura presentano una struttura così caratteristica.

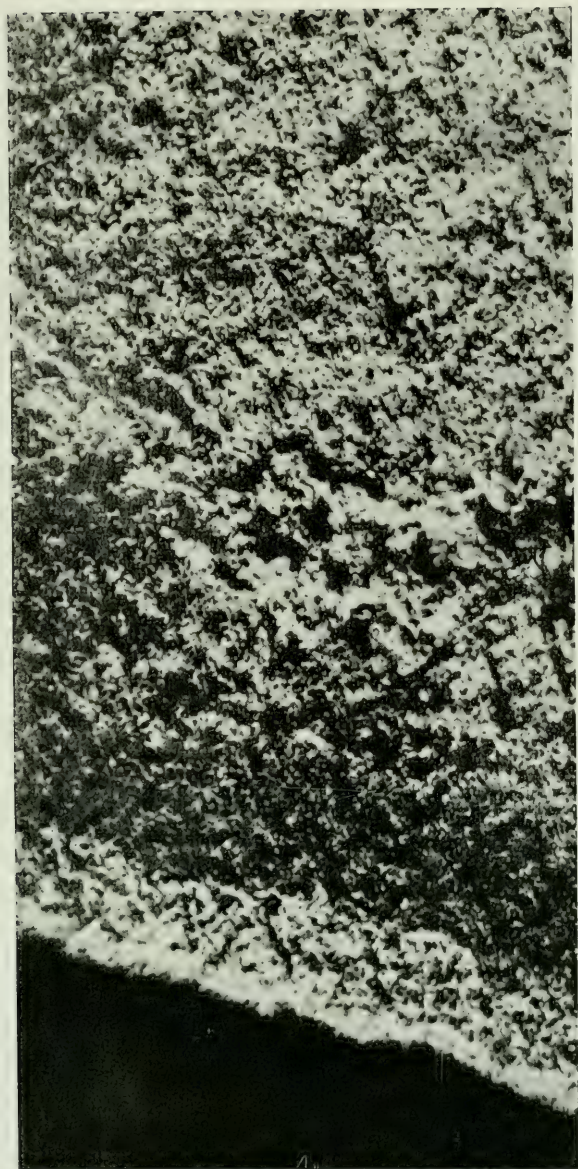
Mi è parso perciò che il fenomeno meritasse di essere brevemente documentato: questa la ragione della presente Nota.

*
* *

La punta di punzone in discorso, destinata alla lavorazione a caldo delle granate-mina da 260 mm., ed avente la forma, del resto assai semplice, rappresentata nel disegno, era stata forgiata da un massello di acciaio speciale al nickel-cromo avente la seguente composizione chimica:

C.	0,240	%
Mn.	0,554	„
Si.	0,280	„
Ni.	2,396	„
Cr.	0,782	„

Dopo lavorata al tornio, la punta era stata temprata a 900° in acqua: in questa operazione il materiale non aveva riportato nessun danno apparente: di ciò si può essere ben sicuri, sia perchè immediatamente dopo la tempra i punzoni vengono accuratamente esaminati in tutte le loro parti da un personale specialista, che nel caso speciale aveva dato il suo benestare alla continuazione della lavorazione, sia ancora perchè i bordi

della frattura che, come ora si dirà, venne scoperta più tardi, non presentavano alcuna sia pur minima traccia di ossidazione.

Per ragioni su cui qui sarebbe inutile soffermarci, il punzone di cui ci occupiamo non passò immediatamente ai forni di ricottura per il consueto rinvenimento, ma restò per parecchi giorni abbandonato in un magazzino. Quando si fece per rimuoverlo, si constatò che esso era rotto in due pezzi: la frattura si era verificata senza causa apparente e senza che alcuno l'avesse avvertita: essa seguiva quasi perfettamente un piano, la cui

Dettaglio della zona periferica (Ingrand.: 30 diam.).

Tip. Vincenzo Bona - Torino. (76172)

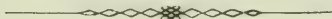
traccia su di un piano diametrale normale al primo aveva presso a poco la posizione indicata nel disegno con la linea punteggiata AB.

La struttura del materiale presentava delle differenze ben nette da un punto all'altro: basta uno sguardo alla fotografia d'assieme riprodotta nella tavola per riconoscere l'esistenza di tre grandi zone sensibilmente concentriche limitate da linee di separazione assai regolari e ben delineate. Particolarmente nitida è la linea che limita la zona periferica, la cui larghezza varia in modo assai caratteristico ed evidentemente connesso colla variazione di curvatura del contorno.

La seconda fotografia, che riproduce convenientemente ingrandito un breve tratto di questa zona periferica, mostra chiaramente come essa, che esaminata ad occhio nudo sembra sensibilmente uniforme, sia in realtà alla sua volta costituita da una serie di strati successivi di differente struttura.

Ora poichè, come si è già detto, la frattura non è stata occasionata da urti nè da sforzi applicati dall'esterno, essa non può attribuirsi che alle tensioni interne che la tempra aveva necessariamente dovuto produrre nel materiale, dipendentemente dalla diversa rapidità con cui le diverse parti del pezzo, più o meno lontane dalla superficie, si erano raffreddate.

Sarebbe molto interessante sapere se le superficie di separazione dei varii strati che la frattura ha messi in evidenza non sono anche delle superficie di discontinuità per quelle tensioni interne. Che se così fosse, l'osservazione di fenomeni come quello che ho descritto potrebbe forse portare qualche contributo allo ulteriore sviluppo di quel modernissimo fra i capitoli della statica elastica che si occupa degli stati di tensione che non dipendono da azioni esterne.

Torino, 14 gennaio 1917.

Valori decimali abbreviati e arrotondati.

Nota del Socio G. PEANO.

Per valore approssimato ad n cifre decimali di un numero reale a si suole intendere l'uno o l'altro dei due valori che indicherò con nomi diversi:

Il valore *abbreviato* ad n cifre decimali di a si ottiene cancellando le cifre che seguono quella di ordine n.

Il valore *arrotondato* ad n cifre decimali di a si ottiene cancellando le cifre che seguono quella di ordine n, e aumentando questa di una unità, se la prima cifra cancellata è 5 o maggiore di 5.

Alcuni Autori usano i valori abbreviati, ma la maggioranza preferisce i valori arrotondati, e quasi tutte le tavole dei logaritmi e simili adottano questi. E siccome nessuno dà ragione del suo operare, la scelta pare una questione di gusto. Per rilevare una differenza oggettiva fra i due metodi, esporrò sotto forma parallela le regole dei calcoli numerici sui due valori approssimati.

Un numero reale è dato per approssimazione, quando è dato un intervallo cui esso appartiene. Le notazioni:

$$a^{-}b\,, \qquad a^{\vdash}b\,, \qquad a^{\dashv}b\,, \qquad a^{\vdash\!\dashv}b$$

indicano l'intervallo da a a b, gli estremi a e b essendo esclusi, o compreso il primo, o il secondo, o tutti e due. Questa notazione figurata è molto comoda e discretamente diffusa.

Per distinguere i numeri decimali esatti dagli approssimati si sogliono usare dei punti. Volendo stabilire un parallelo fra i due metodi, introduco qui le notazioni:

$$1{\cdot}23.. = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}24$$

cioè con una scrittura della forma 1·23.. indico l'intervallo da 1·23 incluso ad 1·24 escluso; esso ha per ampiezza l'unità dell'ultimo ordine decimale, e 1·23 ne è il limite inferiore.

$$1{\cdot}23:: = 1{\cdot}225 \vdash 1{\cdot}235$$

cioè con una scrittura della forma 1·23:: indico l'intervallo da 1·225 incluso ad 1·235 escluso; esso ha per ampiezza l'unità dell'ultimo ordine decimale, e 1·23 ne è il punto medio.

Esempio:

$$\sqrt{2} \in 1{\cdot}41.. \qquad \sqrt{2} \in 1{\cdot}41::$$

significa:

$$1{\cdot}41 \leq \sqrt{2} < 1{\cdot}41 + 1/100 \qquad 1{\cdot}41 - 1/200 \leq \sqrt{2} < 1{\cdot}41 + 1/200$$

Il simbolo ϵ nella formula precedente si può leggere " è ", ed indica la proposizione singolare. Non si può confondere col segno =, perchè da " 1·41 ϵ 1·4.. " e da " 1·42 ϵ 1·4.. " non segue " 1·41 = 1·42 ".

Parimenti:

$$\sqrt{5} \in 2{\cdot}23.. \qquad \sqrt{5} \in 2{\cdot}24::$$

si può leggere:

Il valore abbreviato di $\sqrt{5}$ a 2 decimali è 2·23.

Il valore arrotondato di $\sqrt{5}$ a 2 decimali è 2·24.

Si hanno le proprietà seguenti:

§ 1. — **Abbreviazioni ripetute.**

Il valore abbreviato di un valore abbreviato è un valore abbreviato.

Il valore arrotondato di un valore arrotondato *non* è sempre un valore arrotondato.

Così il numero 0·445 arrotondato a due decimali diventa 0·45, e questo arrotondato ad 1 decimale diventa 0·5, mentre il valore arrotondato ad una cifra decimale del numero proposto è 0·4.

§ 2. — Somma di due numeri approssimati.

$1{\cdot}41.. + 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}64 \vdash 3{\cdot}66$

Il valore abbreviato a 2 decimali di questa somma è uno dei due numeri 3·64, ovvero 3·65.

$1{\cdot}41{::} + 2{\cdot}24{::} = 3{\cdot}64 \vdash 3{\cdot}66$

Il valore arrotondato a 2 decimali di questa somma è uno dei tre numeri 3·64 o 3·65 o 3·66.

In generale:

Il valore abbreviato ad *n* decimali della somma di due numeri è la somma dei loro valori abbreviati, o questa somma aumentata di una unità dell' ultimo ordine decimale.

La somma dei valori abbreviati è il limite inferiore della somma degli intervalli che essi definiscono.

Il valore arrotondato ad *n* decimali della somma di due numeri è la somma dei loro valori arrotondati, o questa somma aumentata o diminuita di una unità dell'ultimo ordine decimale.

La somma dei valori arrotondati è il punto medio della somma degli intervalli che essi definiscono.

§ 3. — Prodotto di due numeri approssimati.

Sia a calcolare

$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23..$

Se moltiplico i valori abbreviati dei due numeri, ho il limite inferiore del prodotto

$1{\cdot}41 \times 2{\cdot}23 = 3{\cdot}1443.$

Sia a calcolare

$1{\cdot}41{::} \times 2{\cdot}24{::}$

Se moltiplico i valori arrotondati ho un valore appartenente all'intervallo prodotto (non il punto medio)

$1{\cdot}41 \times 2{\cdot}24 = 3{\cdot}1584.$

Il limite superiore del prodotto vale

$$(1{\cdot}41 + 0{\cdot}01) \times (2{\cdot}23 + 0{\cdot}01)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 \times 2{\cdot}23 & = & 3{\cdot}1443 \\ 1{\cdot}41 \times 0{\cdot}01 & = & 141 \\ 2{\cdot}23 \times 0{\cdot}01 & = & 223 \\ 0{\cdot}01 \times 0{\cdot}01 & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{limite superiore} = 3{\cdot}1808$$

Quindi

$$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}1443 \vdash 3{\cdot}1808.$$

In pratica si suol dire

$$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23..\ ɔ\ 3{\cdot}1..$$

Il prodotto dei due intervalli (o numeri approssimati) è contenuto nell'intervallo 3·1..

Il limite inferiore del prodotto vale

$$(1{\cdot}41 - 0{\cdot}005) \times (2{\cdot}24 - 0{\cdot}005)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 \times 2{\cdot}24 & = & 3{\cdot}1584 \\ -1{\cdot}41 \times 0{\cdot}005 & = - & 705 \\ -2{\cdot}24 \times 0{\cdot}005 & = - & 1120 \\ +0{\cdot}005 \times 0{\cdot}005 & = & 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{limite inferiore} = 3{\cdot}140175$$

Il limite superiore vale

$$(1{\cdot}41 + 0{\cdot}005) \times (1{\cdot}25 + 0{\cdot}005)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 \times 2{\cdot}24 & = & 3{\cdot}1584 \\ 1{\cdot}41 \times 0{\cdot}005 & = & 705 \\ 2{\cdot}24 \times 0{\cdot}005 & = & 1120 \\ 0{\cdot}005 \times 0{\cdot}005 & = & 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{limite superiore} = 3{\cdot}176675$$

Quindi

$$1{\cdot}41{::} \times 2{\cdot}24{::} = 3{\cdot}140175 \vdash 3{\cdot}176675.$$

In pratica si suol dire

$$1{\cdot}41{::} \times 2{\cdot}24{::}\ ɔ\ 3{\cdot}1{::} \cup 3{\cdot}2{::}$$

Il prodotto dei due intervalli è contenuto nell'intervallo composto dagl'intervalli definiti dai valori arrotondati 3·1 e 3·2.

Il fatto che questo prodotto di due numeri abbreviati è contenuto nell'intervallo definito da un solo numero abbreviato, mentre il prodotto dei numeri arrotondati è contenuto nell'in-

tervallo composto da quelli definiti da due numeri arrotondati, è un caso; cambiando i fattori, si può anche avere l'opposto. È però sempre vero, che mentre il prodotto dei limiti inferiori, o valori abbreviati, è il limite inferiore del prodotto, invece il prodotto dei valori medii, o valori arrotondati, non è il valore medio del prodotto.

L'ultima formula scritta contiene il segno ɔ, che si può leggere " è contenuto ", e che indica la proposizione universale; e a destra c'è il segno $\cup$ che indica l'intervallo composto. I segni ϵ, ɔ, $\cup$ appartengono alla Logica Matematica.

§ 4. — **Simboli.**

Per passare alle regole aritmetiche un po' più complicate, introduco nuovi simboli. Uso il segno romano X per indicare *dieci*, o la base del sistema di numerazione. Quindi X^{-n} significa " l'unità decimale di ordine n ".

Essendo a un numero reale, positivo o negativo, pongo:

$\mathrm{V}a$ = valore intero (o parte intera) di a, cioè quel numero intero (positivo o negativo) x tale che

$$x \leqq a < x + 1.$$

$\mathrm{W}a$ = valore intero arrotondato di a, cioè quel numero intero x tale che

$$x - 1/2 \leqq a < x + 1/2,$$

cioè

$$\mathrm{W}a = \mathrm{V}(a + 1/2).$$

Indicando n un numero intero, positivo o negativo, porremo:

$\mathrm{V}_n a$ = valore abbreviato ad n decimali di a; si può definire così:

$$\mathrm{V}_n a = \mathrm{X}^{-n}\,\mathrm{V}(\mathrm{X}^n a).$$

Si ha

$$\mathrm{V}_0 a = \mathrm{V}a.$$

$\mathrm{W}_n a$ = valore arrotondato ad n decimali di a; si può definire così:

$$\mathrm{W}_n a = \mathrm{X}^{-n}\,\mathrm{W}(\mathrm{X}^n a).$$

Si ha

$$\mathrm{W}_0 a = \mathrm{W}a.$$

Se a è un numero reale, $V_n a$ è un numero con n cifre decimali. Usando i simboli del Formulario si ha:

$$a \epsilon q . \supset . V_n a \epsilon n \times X^{-n}.$$

Viceversa, se b è un numero con n cifre decimali, porremo

$$V'_n b = b + (0 \vdash 1) X^{-n}.$$

$V'_n b$ rappresenta l'intervallo di ampiezza X^{-n}, e il cui limite inferiore è b. Si ha:

$$V_n V'_n b = b$$
$$x \epsilon V'_n V_n a \cdot = \cdot V_n x = V_n a.$$

Esempio:

$$V'_2 1{\cdot}23 = 1{\cdot}23..$$

Parimenti:

$$a \epsilon q . \supset . W_n a \epsilon n \times X^{-n}.$$

Viceversa,

$$b \epsilon n \times X^{-n} . \supset .$$
$$W' b = b + (-1 \vdash 1) X^{-n}/2.$$

$W' b$ rappresenta l'intervallo di ampiezza X^{-n}, e il cui punto medio è b. Si ha:

$$W_n W'_n b = b$$
$$x \epsilon W'_n W_n a \cdot = \cdot W_n x = W_n a.$$

Esempio:

$$W'_2 1{\cdot}23 = 1{\cdot}23::$$

Il simbolo Va ha il valore del simbolo Ea di Legendre; il simbolo $V_n a$ fu introdotto nella mia Nota: *Approssimazioni numeriche*, " R. Acc. dei Lincei ", 2 gennaio 1916. Il simbolo V' indica l'operazione inversa di V. Il simbolo W è qui introdotto, provvisoriamente. per stabilire il parallelismo delle due teorie.

Se p e q sono numeri interi, e $p \leqq q$, allora la scrittura $p \cdots q$, che si legge " l'intervallo dei numeri interi da p a q ", indica l'insieme dei numeri interi x tali che $p \leqq x \leqq q$. È una notazione usata nel " Formulario " da me edito.

§ 5. — Somma di più numeri abbreviati.

Sia a calcolare la somma di m numeri, di cui conosco i valori abbreviati ad n decimali, b_1, b_2, ... b_m. Dalla definizione di V', sommando si ha:

$$(1) \qquad \Sigma V'_n b = \Sigma b + (0 \vdash m) X^{-n}.$$

I due membri di questa eguaglianza sono classi di numeri, e precisamente degli intervalli. Segue:

(2) $$V_n \Sigma V'_n b = \Sigma b + [0 \cdots (m-1)] X^{-n}.$$

I due membri sono classi di numeri con n cifre decimali. Questa proposizione si legge:

“ Il valore abbreviato ad n decimali della somma di m numeri, di cui si conoscono i valori abbreviati ad n decimali, è eguale alla somma di questi numeri abbreviati, aumentata di 0, o 1, ... o $(m-1)$ unità dell'ultimo ordine „. Quindi $V_n \Sigma V'_n b$ ha m valori.

Si suole cancellare l'ultima cifra decimale di Σb, perchè può differire dalla somma richiesta di più unità; si considera cioè $V_{n-1} \Sigma b$. Siccome Σb è eguale al valore abbreviato $V_{n-1} \Sigma b$, più l'ultima cifra moltiplicata per X^{-n}, segue:

$$\Sigma b \in V_{n-1} \Sigma b + (0 \cdots 9) X^{-n},$$

e dalla (2):

$$V_n \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + (0 \cdots (m+8)) X^{-n}.$$

Segue:

(3) $$V_{n-1} \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + \left(0 \cdots V \frac{m+8}{10}\right) X^{-n+1}.$$

“ Il valore abbreviato ad $n-1$ decimali della somma di m numeri, di cui si conoscono i valori abbreviati ad n decimali, è eguale alla somma di questi numeri abbreviati, in cui si cancelli l'ultima cifra, e si aumenti di alcune unità dell'ultimo ordine decimale rimasto (cioè di ordine $n-1$); il numero di queste unità varia da 0 al quoziente di $m+8$ per 10 „.

Fissando dei limiti ad m, si hanno formule particolari:

(4) $$m \in 2 \cdots 11 \,.\supset.\, V_{n-1} \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + (0 \cdots 1) X^{-n+1}.$$

“ Il valore con $n-1$ decimali della somma di più termini, il cui numero non sia superiore ad 11, e dei quali si conoscono i valori con n decimali, si ottiene facendo la somma dei valori abbreviati, e cancellando l'ultima cifra; però l'ultima cifra rimasta forse si deve aumentare di 1 unità „.

In modo analogo si ha:

$$(5) \qquad V_{n-2} \Sigma V'b \supset V_{n-2} \Sigma b + \left(0 \cdots V \frac{m+98}{100}\right) X^{-n+2},$$

da cui si deduce il caso particolare:

$$m \epsilon 2 \cdots 101 . \supset . V_{n-2} \Sigma V'_n b \supset V_{n-2} \Sigma b + (0 \cdots 1) X^{-n+2}.$$

" E se il numero dei termini non supera 101, si faccia la somma dei loro valori abbreviati con n cifre, e si cancellino le ultime due; tutte le cifre rimaste sono esatte, salvo l'ultima che forse si deve aumentare di 1 unità ".

§ 5'. — **Somma di più numeri arrotondati.**

Sia invece a calcolare la somma di m numeri, di cui conosco i valori arrotondati ad n decimali b_1, b_2, ... b_m. Dalla definizione di W', sommando si ha:

$$(1) \qquad \Sigma W'_n b = \Sigma b + (-m \vdash m) X^{-n}/2.$$

Il calcolo di W_n di questa espressione si può fare colla formula $Wa = V(a + 1/2)$; e si ottiene:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{per } m \text{ pari:} & W_n \Sigma W'_n b = \Sigma b + \left(-\frac{m}{2} \cdots \frac{m}{2}\right) X^{-n}, \\ \text{per } m \text{ dispari:} & W_n \Sigma W'_n b = \Sigma b + \left(-\frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-1}{2}\right) X^{-n}. \end{cases}$$

Quindi $W_n \Sigma W'_n b$, per m pari, ha $m+1$ valori, e per m impari ha m valori. Paragonato questo risultato con quello della (2) pei valori abbreviati, si ha che i valori abbreviati dànno un'approssimazione maggiore se m è pari, o eguale se m è impari, all'approssimazione ottenuta coi valori arrotondati.

Se cancello l'ultima cifra di Σb, e arrotondo il risultato, cioè considero $W_{n-1} \Sigma b$, sarà:

$$\Sigma b \epsilon W_{n-1} \Sigma b + (-5 \cdots 4) X^{-n}.$$

Il calcolo di $W_{n-1} \Sigma W'_n b$ si può fare riducendo i W ai V colla solita formula; il risultato è:

$$(3) \quad W_{n-1} \Sigma W'_n b \supset W_{n-1} \Sigma b + \left(V \frac{-m}{20} \cdots V \frac{m+17}{20} \right) X^{-n+1}.$$

Ne risulta che se il numero m dei termini è compreso fra 3 e 11, il valore arrotondato a $n - 1$ decimali della somma dei numeri di cui si conoscono i valori arrotondati ad n decimali può assumere 3 valori; mentre pei valori abbreviati si avevano soli 2 valori.

Se $m \varepsilon 12 \cdots 20$, si hanno 3 valori sia per V_{n-1} che per W_{n-1}.

Così continuando per valori successivi di m, si vede che i valori abbreviati dànno una approssimazione ora maggiore, ora eguale, mai minore, di quella rispondente ai valori arrotondati.

Delle formule precedenti pel valore approssimato d'una somma, la (4) ha importanza pratica; e ad essa si potrebbe limitare una esposizione elementare.

Nel caso più semplice della somma di 2 numeri abbreviati ad n decimali, la formula (2) dà 2 valori per V_n; la (3) dà 2 valori per V_{n-1}; la (5) dà 2 valori per V_{n-2}, e così via, sempre si ha un'ambiguità. Non esiste un numero intero n, tale che qualunque siano i numeri reali a e b, si abbia sempre $V(a + b) = V(V_n a + V_n b)$. Per esempio $V(1/3 + 2/3) = 1$, mentre $V[V_n(1/3) + V_n(2/3)] = 0$.

Quindi in pratica conviene introdurre una notazione, per esempio:

$$1{\cdot}23.... = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}25$$

indicante l'intervallo di ampiezza 2 unità dell'ultimo ordine. Esempio:

$$\text{“} 1{\cdot}41.. + 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}64.... \text{”}.$$

Una notazione consimile fu introdotta dal prof. Tanturri, *Radici di numeri approssimati*, “Atti della R. Acc. di Torino”, 21 maggio 1816, pag. 1156.

§ 6. — Prodotto abbreviato.

Per eseguire il prodotto di due numeri approssimati, non volendo fare calcoli inutili, bisogna adottare la moltiplicazione abbreviata.

Se i due numeri sono $a = \Sigma a_r X^{-r}$ e $b = \Sigma b_s X^{-s}$, ove r e s sono interi, positivi e negativi, e a_r, b_s sono cifre, il loro prodotto abbreviato ai termini di grado decimale n si può indicare con $a \times_n b$, e si può definire:

$$a \times_n b = \Sigma a_r \times b_s \times X^{-r-s}.$$

Si può anche ridurre alla forma:

$$a \times_n b = \Sigma (V_{n-s} a) \times b_s \times X^{-s}.$$

Questo prodotto è funzione simmetrica di a e di b, come risulta dalla definizione. Se nell'ultima formula, ai V sostituisco i W, cioè ai valori abbreviati sostituisco gli arrotondati, avrò un'espressione che non è più funzione simmetrica di a e di b.

§ 7. — Cifre negative.

I valori arrotondati presentano qualche analogia colle cifre negative considerate da Cauchy, nei " Comptes Rendus de l'Académie ", 16 novembre 1840 (*Œuvres*, série 1, tome 5, pag. 431). Ogni numero si può esprimere come somma di potenze di dieci, i cui coefficienti sono cifre positive o negative, non superiori a 5. Cauchy scrisse il segno — sopra le cifre (come facciamo noi per le caratteristiche negative).

Così 1917 = 2 1 2 3 = 2000 — 100 + 20 — 3. Se un numero è scritto colle cifre — 5⋯ + 4, troncandolo alla cifra decimale di ordine n, si ha il valore arrotondato del numero, eccetto quando la prima cifra soppressa è — 5, ed è seguìta da cifra negativa.

Cauchy propose l'uso delle cifre negative per semplificare la moltiplicazione, la cui tavola si riduce ad un quarto. Egli

dice: “ J'espère qu'en raison de leur grande utilité, l'Académie “ me pardonnera de l'entretenir un moment de cet objet „, e la stessa scusa serva anche per me, a trattare queste questioni molto utili e poco considerate.

Alcuni autori che usano i numeri arrotondati, sottolineano l'ultima cifra, se questa è aumentata (o forzata); così essi scrivono:

$$\mathrm{Log}\,2 = 0{\cdot}301 \qquad \mathrm{Log}\,5 = 0{\cdot}69\underline{9}.$$

Ma questa sottolinea, o segno qualunque, la cui presenza o assenza indica in quale delle due metà dell'intervallo definito dal numero arrotondato si trova il numero considerato, è precisamente una cifra in base 2. Le due pseudo-eguaglianze precedenti significano:

$$\mathrm{Log}\,2 \,\epsilon\, 0{\cdot}301 \vdash 0{\cdot}3015 \qquad \mathrm{Log}\,5 \,\epsilon\, 0{\cdot}6985 \vdash 0{\cdot}699,$$

cioè indicano degli intervalli, di cui sono scritti i limiti superiore o inferiore, e non i loro valori medii. Invece di aggiungere una cifra in base 2, si fa meglio dando una cifra decimale di più; o per dirla con Gauss (*Opere*, t. 3, p. 242) “ man besser thut eine Ziffer weiter zu geben „. La maggioranza degli autori che usano i numeri arrotondati, non introducono il segno per distinguere le metà dell'intervallo.

Per approssimare un numero si dà un intervallo cui esso appartiene. Questo intervallo si può definire mediante i suoi limiti inferiore e superiore, o mediante uno di questi limiti e l'ampiezza dell'intervallo, o mediante l'ampiezza dell'intervallo e il suo punto medio, detto valore arrotondato.

Questi metodi possono ritenersi equivalenti, finchè i numeri si rappresentano con lettere. Ma usando le cifre, l'operazione dell'arrotondare l'ultima cifra in nessun caso produce semplificazioni; produce spesso complicazioni, e qualche volta dà anche risultati meno approssimati.

— —

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Gennaio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Brondi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli Direttore della Classe, Manno, Carle, S. E. Ruffini, Sforza, Einaudi e Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 7 corrente.

Il Presidente comunica con grande dolore la morte del Socio nazionale residente Pasquale D'Ercole, avvenuta il giorno 16 del corrente mese. Ricordandone la lunga e feconda attività scientifica, non mai interrotta neppure dalla tarda vecchiaia, il nobile carattere e la rara bontà del cuore, invita il Socio Vidari a fare, a suo tempo, una speciale commemorazione del compianto Collega. Il Socio Vidari accetta. Legge, inoltre, il Presidente le numerose condoglianze pervenute all'Accademia per la morte del Socio D'Ercole da parte di Università, Istituti scientifici, Biblioteche e privati.

Il Presidente comunica alla Classe l'atto verbale dell'adunanza tenuta dalla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali il 14 corr., per la parte che concerne la formazione di una Commissione di sei membri da essa nominata con l'incarico di studiare i problemi, di competenza della Classe stessa, connessi alla proposta del Vicepresidente Chironi e in accordo con la Commissione già nominata dalla Classe nostra.

Il Socio Stampini propone che alla Commissione della nostra Classe sia aggiunto anche il Socio Vidari, la cui presenza è richiesta dalla necessità di portare l'attenzione anche ai molti e gravi problemi che riguardano ogni ordine di scuole. La Classe approva. Su proposta del Presidente, la Classe approva altresì che la Commissione possa aggregarsi anche qualche altro Socio, ma solo per l'eventuale studio di singoli determinati problemi.

Il Socio Segretario Stampini presenta, esponendone sommariamente il contenuto, la *Relazione* presentata dall'On. Boselli sull'opera svolta dal Comitato nazionale per la storia del Risorgimento, del quale è Presidente, dall'inizio dei suoi lavori (4 aprile 1909) al 15 giugno 1916; presenta inoltre la monografia del Socio corrispondente G. Biadego *Aleardo Aleardi nel quadriennio 1850-1853 (Carteggio inedito),* estratta dal " Nuovo Archivio Veneto ". La Classe ringrazia il donatore.

Infine il Socio Stampini riassume per sommi capi il contenuto di una sua *Nota* miscellanea, che sarà pubblicata negli *Atti,* su " Il prenome di Catullo e *Lucretiana* ".

LETTURE

Il prenome di Catullo e *Lucretiana* (V, 311 sg.).

Nota di ETTORE STAMPINI, Socio nazionale residente

I.

Il prenome di Catullo.

Poco manca ai cinquant'anni dacchè H. A. J. Munro, esaminando brevemente in *The Journal of Philology* (1) la questione, magistralmente trattata da Lud. Schwabe (2), del prenome di Catullo, riteneva che tale questione, per quanto l'Ellis la considerasse ancora aperta, fosse stata definitivamente risolta dal critico tedesco, il quale aveva sentenziato non doversi dire *Q. Catullus*, bensì *C. Catullus*. Se non che, nonostante l'esauriente dimostrazione, usciva poco appresso l'edizione teubneriana, che fu poi più volte ristampata, di Luciano Mueller, a rimettere in campo il Q. Trattandosi d'uno spirito ipercritico, di un contradditore sistematico pur nelle cose più ovvie e dimostrate, quale fu Luciano Mueller, il fatto non deve recare, come non recò, meraviglia, tanto più che l'infelice prenome figurava nella edizione critica del Lachmann (3), ed aveva avuto il suffragio del Haupt (4). Ma fa invece meraviglia che,

(1) Vol. II, p. 2 sg. Cito dalla ristampa dell'articolo nella seconda ed. del volume del filologo inglese *Criticisms and elucidations of Catullus* (London, 1905), p. 68 sgg.

(2) *Quaestionum Catullianarum liber I*, Gissae, MDCCCLXII, p. 8 sgg.

(3) Cito l'*editio altera* che s'intitola *Q. Valerii Catulli Veronensis liber ex recensione* Caroli Lachmanni, Berolini, 1861.

(4) Si può quasi dire che Maurizio Haupt ostentasse di mettere in rilievo tal prenome, che egli scriveva nella prima riga di *Quaestiones Ca-*

a tant'anni di distanza, abbia ora senza discussione accolto quel prenome una tempra di mente ben diversa, quale è quella di Carlo Pascal nella sua recentissima edizione critica (1). E dico " sensa discussione „, perchè, se non ho male esaminato il dotto lavoro del chiarissimo filologo, in nessun luogo della *Praefatio* e della *Appendix critica* è fatto cenno delle ragioni che lo hanno indotto a tornare a quel prenome Q., al quale l'autorità dello Scaligero aveva dato così immeritata fortuna.

Tuttavia chi ha qualche pratica dei mss. e delle edizioni catulliane, non che della questione del prenome, leggendo la breve *Praefatio* del Pascal indovina subito il perchè del ritorno al Q. dello Scaligero. Gli è che il Pascal, quantunque confessi di non averli veduti (2), ha creduto bene di dare una grande importanza a due codici, al Burneiano 133, indicato con *d* nella sua *editio maior* dall'Ellis, il quale di esso dice " Est ubi mire con-" sentit cum Cuiaciano „ (*Proleg.*, p. LIV), e al *codex Alani*, così detto perchè appartenente a quella collezione di codici che fu di proprietà di Enrico Allen di Dublino, editore di Cicerone, e passò poi a suo figlio, Samuele Allen, pure di Dublino (3). È risaputo che questo *codex Alani* non è altro che il *cod. Perusinus* dall'Ellis designato con P nell'*ed. maior* e con *p* nella *minor*, vale a dire quel codice " qui idem Cuiacianus fuerat " Scaligeri „ (4), sebbene l'Ellis nell' *ed. maior* facesse distinzione fra il *Cuiacianus* e il *cod. Alani*, pur ammettendone il quasi assoluto consenso fra loro (*Proleg.*, pp. LVI, LVIII). Ora,

---

tullianae (anno 1837), delle *Observationes criticae* (1841), di *De Catulli carmine LXIV* (1855) (cfr. i suoi *Opuscula*, vol. I, pp. 1 e 71; vol. II, p. 67), ecc. È poi noto che anche il Mommsen stampava *Quintus Valerius Catullus*. Cfr. *Römische Geschichte*, III[10], 1909, pp. 332, 600.

(1) *Q. Valerii Catulli carmina. Recensuit, praefatus est, appendicem criticam addidit* Carolus Pascal, Aug. Taurin. etc., 1916. È il primo volume del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum* diretto dallo stesso Pascal.

(2) *Praef.*, p. X. Cfr. la nota 1 a p. XI.

(3) Cfr. *A Companion to classical texts* di F. W. Hall, Oxford, 1913, p. 291.

(4) Ellis nella *Praefatio* dell'*ed. min.*, p. XII. Cfr. inoltre la sua monografia *Catullus in the XIV[th] century*, London, 1905, p. 4, ove del *Cuiacianus* è detto " now identified with a MS. in possession of Mr. Samuel " Allen of Dublin „.

come appunto notava l'Ellis (*Proleg.*, p. LIV sg.), " Scaliger ... " in commentario Catulli p. 3 ed. 1577 haec dicit. *In manu-* " *scripto eruditissimi viri Iacobi Cuiacii non Caius sed Quintus* " *praenomen exaratum est* „ (1); e il *Alani codex* " habet et *Quinti* " *Valerii Catulli*, quod ab eodem de Cuiaciano traditur „ (*ibid.*, p. LVI (2)). C'è altro ancora. Tenendo davanti agli occhi l'apparato critico delle due edizioni dell'Ellis, si osserva che il prenome Q. si legge altresì nel cod. Datano (D), e nel Riccardiano, già menzionati dallo Schwabe, non che nel Colbertino = Paris. 8234 (C), che lo Schwabe adibì più tardi tanto nella prima quanto nella sua seconda edizione (3). Con tutto ciò, se anche potesse esserci qualche altro codice che portasse scritto quel prenome, si domanda che cosa significhi tale documentazione di fronte alla testimonianza dei codd. più autorevoli e anche della grande massa dei mss. catulliani.

Dopo gli studi che si son fatti, non è più il caso di dar gran peso a D, che, se ha delle buone lezioni, dirò anche alcune importanti lezioni, non per questo cessa d'essere un manoscritto molto corrotto, e molto interpolato, variamente corretto, e di nessuna autorità poi relativamente ai titoli o iscrizioni, che si voglian dire. E ciò dicendo, non esprimo semplicemente una opinione mia, opinione, del resto, che mi son formata dopo di avere sottoposto tutto il materiale fornito da D ad attento e lungo esame per il mio studio su *Il codice Bresciano di Catullo* (4), il quale mi ha tratto a persuadermi che parecchi dei così detti codici secondari o *deteriores*, come non propriamente si chiamano, valgono assai più di D (5); sibbene io enuncio un giudizio già dato in forma più severa da Emilio Baehrens (6), e ricon-

(1) Cfr. più sotto, p. 389, nota 4.

(2) Cfr. p. 360, nei *Corrigenda*, ove è trascritto l'intero principio del *cod. Alani* (P): *Q. Valerii Catulli poetae Veronensis Ad Cornelium Nepotem. Liber incipit Feliciter.* Vedremo più sotto che nel *Cuiacianus* lo Scaligero leggeva alquanto differentemente, sebbene ciò a noi nella presente questione non monta guari.

(3) La prima ed. (Gissae) è del 1866; la seconda (Berolini) è del 1886.

(4) Negli *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, vol. LI, adunanze del 5 e 19 dicembre 1915, pp. 149-170 e 239-260.

(5) Pag. 155 (= p. 11 dell'Estratto), nota, e passim.

(6) Cfr. *Catulli Veronensis liber*, Lipsiae, 1876, *Proleg.*, p. XXIX: " habet " sane Datanus locos nonnullos, quibus quae in V leniter corrupta erant

fermato, con più miti parole, da uno de' più insigni, certo dal più informato fra i conoscitori di codici catulliani, W. Gardner Hale, il quale in un periodico tedesco e contro la opinione prevalente tra i filologi tedeschi, sentenziava che " D für die " Wiederherstellung des Catulltextes absolut keine selbständige " Autorität besitzt „ (1). E questa sentenza del dotto americano non parve esagerata ad un caldo estimatore di D, cioè K. P. Schulze, il quale, dopo ciò che del codice aveva scritto per esaltarne la creduta importanza (2), nel modo più esplicito finiva di arrendersi al Hale, facendo sue anche le parole di lui: " Jedenfalls stimme ich darin vollständig mit Hale überein, " dass D absolut keine selbständige Autorität für die Wieder- " herstellung des Catulltextes besitzt. „ (3)

Ho insistito alquanto ampiamente sullo scarso valore di D, nonostante l'estimazione in cui lo teneva l'Ellis (4), perchè, se non può avere autorità per la costituzione del *testo*, tanto meno ne può avere per riguardo ai *titoli* o *iscrizioni* che porta, e che

" correcta leguntur. sed haec fere uniuscuiusuis ex ς propria est uirtus... " et quis bene sanus hinc Datano maius aliquod quam ς ceteris pretium " adtribuet? reliquas autem lectiones eius si probe perpendis, nil aliud " inuenies esse quam meras sordes stercusque mundum: plurimae scripturae " a V diuersae partim ex supina scribae neglegentia socordiaque, partim " ex ista nouas lectiones procreandi libidine ortae sunt. omnium igitur ς " librorum infidelissimus improbissimusque est. „

(1) In *Hermes*, vol. XXXIV, a. 1899, p. 141. E ne dà la prova con l'osservazione " dass D seine guten Lesarten meistens R, in geringerem " Maasse G, sowie alle Abweichungen von R und G den italienischen " Abschreibern oder den Gelehrten des XV. Jahrhunderts verdankt „.

(2) Cfr. la sua ed. del 1893 (Lipsiae), *Proleg.*, p. xxxxviiii sgg.

(3) In *Berliner philol. Wochenschrift*, vol. XIX, 1899, col. 443. E anche il Morgenthaler in *De Catulli codicibus*, Argentorati, MCMIX, p. 5, nota 2, accolse come giusta cotale concessione dello Schultze, nonostante il parer contrario di quel dotto ma stravagante — lo dico io, non il Morgenthaler — editore e commentatore di Catullo, che si chiama Gustavo Friedrich, il quale dopo O, G e *g* (Korrektor des Sangermanensis), assegnava a D " eine vierte selbständige Abschrift „ del codex Veronensis. Cfr. il breve *Vorwort* alla sua ed. (Leipzig, 1908).

(4) Cfr. l'ed. *maior*, pp. xxxi sgg. dei *Proleg.*, e l'ed. *minor* p. xi della *Praefatio*, preceduta dal noto articolo *Notes on manuscripts of Catullus* in *Hermathena*, vol. XII (n° XXVIII), an. 1902, p. 18.

assolutamente — rubo all'Ellis una significativa espressione — " fictorum olent officinas „ (*Proleg.*, p. XXXIV); e a ciò nessuno oserebbe contraddire. E non contraddisse neppure lo Schulze, quando, nella sua edizione, ove tanto sosteneva l'autorità di D, faceva sue le gravi parole del Baehrens rispetto agli " interpolationis " apertissima signa „, fra cui quel *Quinti praenomen, quod Itali scilicet ex Plinii ... codicibus recentibus prauisque* (1) *imprudenter finxerunt* (*Proleg.*, p. LI). E allora che diremo del Cuiaciano? Tutti sanno quale stima facesse l'Ellis stesso di questo cod. " Ipsum codicem non magni pretii habeo „, egli scriveva (*Proleg.*, p. LVIII); e non ne faceva gran stima, non dirò lo Schwabe, per cui era un " liber et bonitate et prauitate memorabilis „, pur riferendosi solo alla *prima manus* (2), ma lo stesso Haupt (3), che, seguendo Giuseppe Scaligero nell'attribuire il prenome Quinto a Catullo, non ne condivideva il giudizio sul grande valore di quel cod. (4). Rimangono il Colbertino (C) che porta pure la iscr. Q. VALERI . CATVLLI . VERONENS . AD CORNEL . NEPOTEM LIBER, ed il Riccardiano, che ha del pari Q. CATVLLI; ma qual valore hanno questi codd., non perchè son del sec. XV ma perchè son segnati da larghe interpolazioni, per le loro iscrizioni di tardissima origine, di fronte alla grande massa della tradizione manoscritta? Sono iscrizioni uscite dalle stesse officine, da cui è venuto fuori il famoso Q. CATVLI VERONENSIS LIBER INCIPIT AD CORNELIVM, di D, e mostrano l'origine, diremo così, *pliniana* del falso prenome, nel senso, non già che Plinio lo attribuisse al poeta, ma che alcuni pochi manoscritti fra i meno autorevoli ed

---

(1) Come vedremo, non disse il vero l'Ellis affermando che il prenome Q. si trova *in Plini bonis codicibus* (*Proleg.*, p. XXXIV).

(2) Pag. XIII della prima ed. cit.

(3) In *Quaest. Catull.* cit., p. 1 = *Opusc.*, vol. cit., p. cit.

(4) Cfr. Iosephi Scaligeri Iul. Caes. Fili *Castigationes in Catullum, Tibullum, Propertium*, Lutetiae, MDLXXVII, p. 3: " Porro liber ille, quo usi " sumus ... longe alios huius poetae manuscriptos bonitate superare mihi " uidetur „. Si badi, per altro, ed è bene non dimenticarlo, che lo Scaligero stesso, op. cit., p. 82, osserva che nel v. 12 del carme LXVII si legge *quite*, rispondente al *qui te* della universalità dei codd., lezione che egli correggeva in *Quinte*, indottovi da quel Q.VALERI CATVLLI AD COR. NEPOTEM LIBELLVS che, soggiungeva egli, " disertim principio libri nostri exaratum est „.

i più recenti (1) in *N. H.*, XXXVII, 81, in luogo di *Catullus poeta*, dànno la lezione *Q. Catullus poeta*. Ma salta agli occhi che si tratta di un'autorità di nessun momento, tanto più che si spiega l'origine di questa interpolazione del Q. per via della confusione, che dovette fare qualche amanuense, fra Catullo e Q. Catulo, perchè Plinio non solo menziona lo schiavo *Amphionem Q. Catuli* in XXXV, 200, ma in XXXVI, poche righe dopo aver menzionato *Mamurra Catulli Veroniensis* (sic) *carminibus proscissus* (§ 48), scrisse *M. Lepidus Q. Catuli in consulatu collega* (§ 49).

Si risale adunque soltanto sino al sec. XIII per trovare questo Q., che poi riappare sporadicamente in qualche raro manoscritto pliniano e, per opera di mano erudita o semierudita, in mss. catull. interpolati del sec. XV avanzato, contro tutte le testimonianze, positive e negative, che noi abbiamo, dall'epoca augustea al periodo umanistico. Basta gettare un'occhiata sulle testimonianze raccolte dallo Schwabe nell'edizione del 1886 (2), per convincersi che il prenome non è mai nominato se non da Apuleio, per il primo, nella forma abbreviata *C.* (3) e da S. Gerolamo nella forma piena *Gaius* (4). Ma ognuno sa che dietro a S. Gerolamo c'è Svetonio; e perciò si ha questo dato positivo, che nel periodo imperiale il nostro poeta era conosciuto per *Gaius*, e non per *Quintus*, da Svetonio, Apuleio e S. Gerolamo. Risulta altresì che nell'età sua e nel periodo augusteo e imperiale il poeta era chiamato quasi solo *Catullus*, così da poeti (e se ne comprende la ragione), come da prosatori

---

(1) Si tratta specialmente del Paris. 6797 del sec. XIII e del Paris. 6801 del sec. XV, citati dallo Iahn, p. LXXXIV, vol. V della sua ed. del 1878; a cui io posso aggiungere, da me stesso veduto, il Torinese I. I. 25 (= 336 dell'*Invent.*) del sec. XIV, mentre la pluralità dei mss. ed i migliori, a partire dal *Bambergensis*, che servirono di base all'ed. dello Iahn e poi a quella del Mayhoff, non ha che *Catullus poeta*, precisamente come è scritto nel cod. Torinese I. I. 23 (= 338 dell'*Invent.*) del sec. XV, pur da me espressamente esaminato.

(2) *Index locorum quibus scriptores alii a poetae aetate ad annum MCCCLXXV p. Ch. n. Catullum nominaverunt aut eius versus citaverunt*, pp. VII-XXIII.

(3) Cfr. l'ed. crit. del Helm^2 (Lips., 1912), p. 11.

(4) Cfr. l'ed. Schoene, p. 133, e il *Text* del Helm (Leipzig, 1913), p. 150.

d'ogni specie: abbiamo qualche esempio isolato di citazione del semplice gentilizio *Valerius*: troviamo alcuni esempi di più dell'accoppiamento del gentilizio col cognome, cioè di *Valerius Catullus*, a principiare dal noto passo di Svetonio (*Div. Iul.* 73): e incontriamo poi, a partire da Plinio (*N. H.*, XXXVI, 48), il cognome *Catullus* seguìto dal soprannome indicante la sua patria. Io non so se questo *Catullus Veronensis*, che noi troviamo così in Nonio Marcello (p. 546 M = 876 Lindsay) come negli *Scholia Veronensia* (in Verg. *Ecl.* VI, p. 397 Hagen, *Veronensis Catullus*), si leggesse del pari nel famoso codice catulliano di Verona, da cui discendono i codici attuali (1); ma a me pare che l'esemplare del Thuaneo (T) non portasse che il semplice cognome, con la probabile iscrizione LIBER CATVLLI (2); in ogni modo è questo *Catullus Veronensis* adoperato nei primi albori dell'umanesimo accanto al semplice *Catullus*. E *Catullus poeta veronensis* scriveva Benzo (m. verso il 1330), che nella Capitolare di Verona trovò l'archetipo di Catullo (3); e *Catullus Veronensis*

---

(1) B. L. Ulman, *Hieremias de Montagnone and his citations from Catullus* (in *Class. Philol.*, V, 1910, p. 78), crede che " the Veronensis did not " have a book-heading at the time when Hieremias examined it or got " his copy from it "; e poichè Hieremias (il cui nome di vivente s'incontra citato per l'ultima volta nel 1321, cfr. Ellis, *Catullus in the XIVth century*, p. 8, e Sabbadini, *Le scoperte dei codici*, ecc., v. I, p. 219, n. 1) sarebbe stato il solo, secondo l'Ulman, eccetto il compilatore dei *Flores* (Ellis, p. 6 sgg., Sabbadini, I, p. 2; II, p. 93), a menzionare Catullo senza l'aggiunzione *Veronensis* o *poeta Veronensis*, egli ritiene che questa designazione sia penetrata nel ms. veronese " as a book-heading with the epigram of Benvenuto " de Campesanis. "

(2) Pur troppo non ho avuto modo di avere del Thuaneo più ampie informazioni: ma quella pagina, che è riprodotta dallo Chatelain in *Paléogr. des class. lat.*, pl. XIV, con quel VALERI MARCIALIS APOPHORETA ... EPITHALAMIVM CATVLLI (si sa che dopo questo carme seguono *sine ullo interuallo* molti carmi del florilegio Salmasiano, cfr. Baehrens *PLM*, v. IV, p. 9, e Riese *AL.*^{2}, p. XXXIV sg.) mi fa sospettare che l'esemplare catulliano, d'onde fu trascritto l'epitalamio, avesse scritto il solo cognome del poeta; e poichè la tradizione manoscritta, fatta eccezione di O, del testo catulliano ci riporta alla parola *liber* (nel che si accordano persino D e C: nel Cuiaciano lo Scaligero lesse *libellus*; ma l'Ellis ci attesta che il *cod. Alani* ha *Liber incipit Feliciter*, cfr. l'ed. *maior*, p. 360), non mi pare assurdo conchiudere che il titolo di quell'esemplare fosse precisamente LIBER CATVLLI.

(3) Cfr. Sabbadini, *Le scoperte dei codd.* cit., vol. II, p. 145.

poeta scriveva Guglielmo da Pastrengo (m. il 1363 (1)); e così pure scriveva, non di rado, il Petrarca (2), quel Petrarca al quale il Hale aveva persino attribuito il possesso del cod. O (3).

Or bene, dopo tutte queste osservazioni ci sia lecito trarre una conchiusione, ed è questa, che il prenome del poeta è sicuramente *Gaius*; ma, poichè tutta una lunga tradizione, passata nei mss., non ha tenuto conto di questo prenome, come non ha tenuto conto del gentilizio, così in una edizione critica di Catullo non dovrebbe figurare che il suo semplice cognome. Rimane incerto se *Veronensis* fosse nell'archetipo veronese perduto; ma poichè tale designazione ci è data dai mss. che ne sono discesi, un'edizione critica la potrà aggiungere e dire *Catulli Veronensis liber*; ma nessun *C.* e nessun *Valeri*, tanto meno *Q. Valerii*!

II.

Lucretiana

(V, 311 sg.)

denique non monimenta uirum dilapsa uidemus
quaerere proporro sibi cumque senescere credas

Tale è la lezione di O e Q. Il perfetto accordo dei due codd., e la considerazione che Q fu riveduto su un codice da cui il correttore tolse non di rado la vera lezione, fan ritenere che quella fosse pure la lezione dell'esemplare del sec. VII o VIII

---

(1) Cfr. Sabbadini, op. cit., vol. I, p. 14, n. 75; Ellis, *Catullus in the XIV^th century* cit., p. 15 sg. Vedi, del resto, Pierre de Nolhac, *Pétrarque et l'humanisme*, Paris, 1892, p. 137 nota, e 139 sg.

(2) Ellis, op. cit., p. 18: " He speaks of the poet as Catullus, sometimes " as Catullus Veronensis ".

(3) Cfr. *The Classical Review*, v. XX, 1906, p. 164. Si sa che il Hale ritirò poi, sebbene con non troppo piacere, questa " suggestion ", a cui era stato tratto particolarmente dalla scrittura dell'iscriz. *Catullus Veronensis poeta* di O (cfr. *Class. Philol.*, v. III, 1908, p. 243 sg.). Ma nessun dubbio v'è ormai che il Petrarca possedesse un esemplare di Catullo. Cfr. de Nolhac, op. cit., p. 141.

in scrittura " insulare ", da cui i due codd. furono trascritti. Devesi perciò aver per fermo che, se v'è guasto nel testo, se ne ha da cercare la causa o in uno sbaglio di chi copiò dall'archetipo l'esemplare di O e Q, ovvero in un errore di trascrizione già esistente nell'archetipo. Ora che il testo abbia subìto qualche alterazione, non fu dubbio per coloro che pensarono come pensò il Lachmann, il quale scrisse (*Comm.*, p. 288): " *cumque* nisi cum relativis coniunctum lingua Latina non " agnoscit ". Ma io, che ho conservato, nonostante la genialissima congettura del Lachmann *medicumque* (1), in Oraz., *carm.*, I, 32, 15 la lezione dei codd., i quali dànno concordemente " dulce lenimen, *mihi cumque* salve ", non posso ammettere che il guasto del verso lucreziano stia nel *cumque*, e perciò non vedo ragione di eliminarlo con una emendazione del testo, il quale deve essere ben altrimente sanato. Credo anzi che l'ostinarsi a trovare errato il *cumque* fu la precipua ragione per cui finora non si arrivò ad emendare in modo soddisfacente il verso lucreziano.

Certo avevano ragione da vendere il Benoist ed il Lantoine (2), quando rigettavano l'interpretazione del Wakefield (3), il quale, seguendo la lezione conservatrice del Gifanio, che nulla trovava da toccare (4) in quanto sarebbe *quaerere sibi cumque senescere credas? = credas ea quaerere sibi aliquando senectutem*, spiegava il v. seguente così: " Credas propemodum ea dato " quasi studio ad senectutem properanter contendere, quocumque " tandem modo " (5). Se si vuole essere conservatori a qualunque costo, bisogna per forza cadere in questa (o altra simile) infelicissima interpretazione giustamente respinta dagli interpreti di Lucrezio; come non ebbe sèguito la sentenza del Lambino

(1) Cfr. la mia edizione critica (*Mutinae,* an. MDCCCXCII).

(2) Nella nota al v. 312 della loro ediz. del lib. V (Paris, 1884).

(3) Nella nota al v. cit. della sua ediz. di Lucrezio (Glasguae, 1813).

(4) Ma notava: " haud scio etiam an sit spurius ", p. 158 dell'ediz. d'Anversa (1565).

(5) La lez. del Wak. fu, come è noto, accettata e difesa dal Forbiger, che nella sua ediz. (Lipsiae, 1828) più chiaramente la spiegava: " Nonne " saepe monimenta tam cito corruere uidemus, ut aliquis credere possit, " ea ipsa quocunque modo quaerere sibi senescere i. e. senectutem ".

che giudicava il v. 312 *spurium et suppositum* (1) non meno di quel

cedere proporro subitoque senescere casu

della vulgata, attribuito al Marullo, che, secondo il Lachmann, “ serio laudare nemo potest „ (*Comm.*, p. c.). Stimo pertanto che il verso deva essere emendato, ma senza toccare il *cumque*, come si dovette fare invece in un altro luogo di Lucrezio, dove (II, 721) l'originale *quamque* certamente era stato nell'archetipo, per errore, scambiato con *quomque*, cui i più recenti copisti sostituirono la forma classica *cumque*.

Ed ecco come ragiono io per la ricostruzione di questo tormentatissimo verso! Lucrezio vuol dimostrare che nulla può opporsi alle leggi della natura, *adsidue quoniam fluere omnia constat.* Così il tempo trionfa delle pietre; crollano le alte torri; le rocce si sgretolano; si spaccano i templi e le statue degli dei; così anche noi vediamo rovinati e sfasciati quegli stessi monumenti che furono innalzati ad onoranza degli uomini insigni. Badiamo che il citare i monumenti a prova della distruttibilità delle cose dà rilievo e forza alla dimostrazione solo in quanto il fatto della rovina contrasta con l'intenzione di chi ha innalzato i monumenti, che fu sempre quella di sfidare i secoli e di eternare la memoria o di uomini o di fatti, trionfando delle ingiurie del tempo. Proprio quello che si crede non possa, non debba in alcuna guisa *senescere*, proprio quello noi vediamo rovinato al suolo! L'intenzione umana è frustrata; come è frustrata la custodia, la protezione degli dei, che non vale a salvare dallo sfacelo i loro templi e le loro statue.

È un concetto che vien fuori evidente dal testo lucreziano, considerato nel suo tutto; ma molto infelicemente si procedette per adattare il verso corrotto alla espressione di tale concetto, sacrificando il *cumque*, e immaginando che i monumenti *dilapsa* parlino e chiedano “ sibi *sene* senescere credas „, secondo la congettura del Munro, il quale dava la seguente interpretazione dell'intero passo: “ Then see we not the monuments of men, “ fallen to ruin, ask for themselves as well whether you'd be-

(1) Pag. 438 seg. della sua ediz. del 1570 (Lutetiae).

" lieve that *they* decay with years? „ Confesso che, a parte quel *uidemus quaerere*, in luogo di *audimus quaerere* o sim., una interpretazione siffatta mi riesce inesplicabile, come appunto la giudicavano, pur senza discuterla, il Benoist e il Lantoine (l. c.). Monumenti caduti, per me, non son monumenti che *senescunt*: il *senescere* vuol dir deperire; ma ciò che deperisce, ciò che invecchia è cosa ancora viva: un monumento *dilapsum* al contrario è cosa morta, che ha finito di invecchiare, che, dopo un tempo più o meno lungo di vecchiaia, ha trovato nel suo crollo la morte. Non avvertì questa stonatura il nostro Giussani, che vide un'ironia nelle parole dei monumenti secondo il testo del Munro da lui seguìto, perchè annotava che " Fuor d'ironia il " pensiero è: non vediamo noi i monumenti proclamanti nelle " iscrizioni la propria eternità cadere in rovina? „, la quale interpretazione potrebbe reggere per il senso generale, non per il senso delle parole del verso così racconciato dal Munro, le quali, poche righe prima, avevano costretto il Giussani a scrivere: " il monumento stesso col cadere in rovina, ti chiede da " parte sua (alla sua volta, *proporro*) se tu non credi piuttosto " a lui stesso, che ti dice col fatto il suo invecchiare „. Ma che invecchiare? che ironia allora? Se l'ironia balza fuori da un contrasto, da una opposizione del senso proprio e letterale della locuzione, delle parole che s'impiegano, alla idea che si vuole significare, quale ironia si può scoprire nella infelicissima ricostruzione Munriana? Se il poeta avesse voluto far parlare ironicamente i monumenti caduti, non avrebbe egli cercata e usata una espressione che designasse piuttosto, nella sua propria accezione, un'idea opposta a quella della rovina e della morte? O io m'inganno, o il poeta avrebbe fatto chiedere dai monumenti, se si potesse credere che essi fossero *inviolabilia* (cfr. v. 305), che durassero eterni; se essi potessero, come poco appresso dice (v. 379) di tutte le cose " mortali corpore quae sunt „,

inmensi validas aeui contemnere vires,

e perciò *aeterna manere* (v. 351), *durare aetatem per omnem* (v. 356), *manere intacta* (v. 358); e altre simili espressioni avrebbe adoperato. E che? non gli sarebbe forse qui venuto a taglio l'im-

piego del verbo *uigescere*, che il poeta usò in I, 674 e 757? E allora sì che si avrebbe avuto una vera ironia con le parole

> non monimenta uirum dilapsa uidemus
> quaerere proporro sibi sene *uigescere* credas!

Ma io non voglio esaltarmi in questa mia congettura, a cui sono stato trascinato dal Munro e da' suoi seguaci, perchè, come posso paleograficamente spiegare che *senesenescere* sia stato ricopiato con un semplice *senescere* ma non posso spiegare in nessun modo la sostituzione fatta da un amanuense di un insolitissimo *cumque* al presunto *sene*; così non potrei, nè sotto l'aspetto paleografico nè per altro rispetto, spiegarmi l'intrusione nel testo di un *cumque senescere* in luogo di *sene uigescere*! È vero che io sarei un timido emendatore al cospetto dell'Ellis, il quale, per emendare un testo composto di *sei* parole, ne soppresse *quattro*, lasciando in piedi solo *proporro* e *senescere*, e regalando a Lucrezio questo bel verso

> *aeraque* proporro *silicumque* senescere *petras*,

che il Bailey ebbe il torto di accettare per la sua traduzione (1), e William A. Merrill di imitare proponendo recentemente il seguente " correct reading ", com'egli si esprime,

> *conquerier* porro sibi cumque senescere *petras*,

che traduce " keep complaining to themselves that their stones " continually decay. " (2)

Premesso ciò, io osservo che il guasto deve stare nella prima parola del verso, cioè in *quaerere*. Credo che questo *quae-*

---

(1) *Lucretius on the Nature of things translated*, Oxford, 1910, p. 196 (vedi anche la nota).

(2) Cfr. il suo *Criticism of the text of Lucretius with suggestions for its improvement*, Part II, books IV-VI (University of California Publications in Classical Philology, vol. 3, n°. 2, 1916), p. 79. Io vorrei domandare al Merrill se abbia trovato in altro luogo di Lucrezio il vocabolo *petra*, e se crede che i Latini chiamassero con tal vocabolo le pietre dei monumenti!

rere sia stato introdotto, non già nell'esemplare, da cui vennero direttamente O e Q, ma bensì nell'archetipo o come parola del testo o come correzione, cioè o dal copista o dal correttore (mentre l'originale doveva essere QVAENEQVE), tratto, o il copista o il correttore, dal ricordo di un altro verso del poeta (II, 979)

et *sibi proporro* quae sint primordia *quaerunt*,

verso a cui è dovuta, senza dubbio, la persistenza di troppi nella conservazione dell'impossibile *quaerere*. Io dunque, scrivendo *neque*, che, come vedremo, in Lucrezio ha parecchie volte il significato del semplice *non*, e mettendo in principio il relativo *quae*, a cui si collega il *cumque*, leggo così il verso

quae *neque* proporro sibi cumque senescere credas,

e interpreto: " e poi non vediamo forse crollati monumenti di " uomini, e precisamente tutti que' monumenti che tu d'altra " parte non crederesti soggetti a vecchiaia? ".

E spiego cominciando da *sibi senescere*. Quel *sibi* non dirò che abbia la stessa funzione che ha in un verso ricorrente poco appresso (V, 353)

nec penetrare pati *sibi* quicquam quod queat artas
dissociare intus partis,

e ripetuto da III, 808, perchè si appoggia bensì a *pati*, da cui è attratto, ma vale *in se*, avendo riferimento a *penetrare*; dirò invece che ha una funzione assai più forte dell'usitatissimo *dativus ethicus*, di cui non pochi esempi ci fornisce Lucrezio (1). E aggiungo anche più forte di quel *sibi quaerunt* più sopra ci-

(1) Cfr. Carolus I. Hidén, *De casuum syntaxi Lucretiana* I, Helsingforsiae, 1896, p. 105, ove si parla del dat. *sibi* lucrez. *ad similitudinem dativi ethici* o di quello che egli dice *praeter necessitatem additum*. È noto del resto che il così detto *dativus ethicus* è propriamente rappresentato dalla 1ª e 2ª pers. del pron. pers. Cfr. Kühner-Stegmann, *Ausführl. Gramm. der lat. Sprache*, II², Erst. Teil, pag. 323 sg.; e Ch. E. Bennet, *Syntax of early Latin*, Vol. II. - *The cases*, Boston, 1914, pp. 146 sgg.

tato (cfr. III, 919 *sibi...requirit*), più forte di quello che troviamo in III, 886 (qui possit uiuus *sibi* se lugere peremptum) o in V, 961 (sponte sua *sibi* quisque ualere et uiuere doctus); e mi spiego. Non v'è nulla di più suggestivo delle solide, vaste, grandiose costruzioni monumentali, destinate a sfidare i secoli, a conservare eterna freschezza in mezzo al languire e invecchiare di ogni altra cosa, in mezzo al succedere di generazioni giovani alle vecchie scese nella tomba, per dare un'idea dello inane sforzo dell'umanità nell'intento di imprimere perennità di durata a qualche cosa almeno, che conservi attraverso la fuga de' tempi la memoria di alcuni uomini, di alcuni fatti. Ma quello che nella sua intenzione non doveva invecchiare, eccolo invece a terra: e l'uomo allora malinconicamente pensa che anche i monumenti più maestosi e robusti invecchiano, ed invecchiano non solo per lui, ma per se stessi; che anche i monumenti portano in sè i germi della propria distruzione e a poco a poco si sfasciano. Così si verifica che ciò che non doveva invecchiare per gli uomini, invecchia invece per così dire al suo proprio cospetto, confermando l'eterna inflessibil legge di natura che ha segnato a tutte le cose senza eccezione i limiti della loro esistenza. Dunque le cose possono *senescere* sotto due rispetti, rispetto agli uomini e per sè, *sibi* (1). E il poeta ha voluto mettere particolarmente in rilievo quest'ultimo aspetto, perchè il più acconcio all'argomento di cui trattava.

---

(1) In altri termini *monimenta tibi senescunt* significa " i monumenti " invecchiano per te, a tuo giudizio „ e sim.: *monimenta sibi senescunt* " invecchiano per se, in realtà „. Così nella filosofia lucreziana le *res* non possono *funditus ad nilum redire*; i *primordia rerum* non possono *perire*; ma il poeta concepisce anche un diverso punto di vista nel suo lettore, anzi un'idea opposta come conseguenza logica, e perciò I, 797

ne *tibi* res redeant ad nilum funditus omnes

e I, 918

hac ratione *tibi* pereunt primordia rerum.

Chi non voglia accettare questa mia spiegazione del *sibi*, lo metta insieme con gli altri esempi lucreziani, in cui, come notò il Hidén (vedi nota preced.), è *praeter necessitatem additum*. Ma io credo alla necessità per la più precisa determinazione del concetto.

Spiegato il *sibi*, il resto non ha quasi bisogno di chiarimento. Non ne ha bisogno il *neque* = *non*, per il quale mi basta richiamarmi alla dottissima nota del Munro a proposito di II, 23

gratius interdum, *neque* natura ipsa requirit,

ove egli con numerosi esempi, tratti in parte dalla notissima opera del Ribbeck (1), dimostra che in quel v. " *neque*... means " simply *non*, a sense which *neque* and *nec* so often had in " archaic Latin, and which is not uncommon in classical „ (2).

E rimane il *quae*... *cumque*. Qui Lucrezio mi aiuta in modo straordinario, chè nessuno ignora qual largo uso egli faccia del *cumque* separato dalla forma relativa cui va riferito. E questo uso è fatto non soltanto con l'introduzione d'una parola in mezzo, cosa frequentissima, ma di due, tre e più. Non solo abbiamo p. e. (II, 865) " *quae* sentire uidemus *cumque* „; (IV, 737) " *quae* uariis ab rebus *cumque* recedunt „; ma addirittura (VI, 19)

quae conlata foris et commoda *cumque* uenirent;

(VI, 390)

cur *quibus* incautum scelus auersabile *cumquest*;

per non dire che persino s'incontra il relativo in un verso e il *cumque* in un altro, come (VI, 959 sg.)

huc accedit uti non omnia, *quae* iaciuntur
corpora *cumque* ab rebus...

A queste osservazioni una sola cosa mi preme di aggiungere, ed è che io mi sono studiato di emendare il verso lucre-

---

(1) *Beiträge zur Lehre von den lat. Partikeln*, Leipzig, 1869.

(2) Io giunsi anche ad ammettere *neque* = *ne*... *quidem*. Cfr. la mia nota a Virg., *Buc.*, III, 102 (Torino, 1904). Del resto il Holtze in *Syntaxis Lucretianae lineamenta* (Lipsiae, 1868), p. 167, sosteneva tale significato a proposito di Lucr. III, 730 e VI, 1214; ma si possono i due passi spiegare anche col semplice significato di *non*, specialmente il secondo

atque etiam quosdam cepere obliuia rerum
cunctarum, *neque* se possent cognoscere ut ipsi.

ziano applicando la teoria, che già ad altri passi di Lucrezio ho altrove applicato (1), quella “ del minimo impiego di mezzi „. Io non ho fatto altro che cambiare due consonanti, trasformando *rere* in *neque*, leggendo pertanto l'intero passo

> denique non monimenta uirum dilapsa uidemus
> quae *neque* proporro sibi cumque senescere credas? (2)

(1) Cfr. i miei *Lucretiana* in *Riv. di filol. e d'istr. class.*, vol. XXX, 1902, pp. 315-339; XLIII, 1915, pp. 263-277 (= *Studi di lett. e filol. latina*, Torino, 1917, pp. 233-269, 339-359).

(2) Chi volesse aver presente buona parte delle congetture che si son fatte per questo passo, veda, per le più antiche, il vol. 4°, p. 320 della citata ediz. del Wakefield: del resto legga la nota del Merrill a p. 671 della sua ediz. (New York, ecc., 1907), dove si cita bensì il nostro Nencini, ma si mostra di ignorare le acute osservazioni del Giri (*Alcuni luoghi controversi del quinto libro di Lucrezio*, pp. 215-222 del vol. XXX, 1902, della *Riv. di filol.* cit.), il quale ha difeso la lezione dei codd. sostenendo che “ i monumenti caduti a terra chiedono oltre a questo [*proporro*], oltre “ cioè ad essere caduti, d'invecchiare sino all'estremo. Sono crollati per “ vecchiezza, ma possono continuare a invecchiar lungamente co' più mi- “ seri aspetti fino alla totale distruzione „ (p. 221 sg.). E osservo in fine che il Merrill non cita la lezione di Benoist e Lantoine, che modificarono quella del Bernays, sostituendo *quicque* a *cumque* e scrivendo perciò

> *quare* proporro sibi *quicque* senescere credas.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Gennaio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Segre, Peano, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi e Parona Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Náccari.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente ricorda il compianto Socio Prof. P. D'Ercole della Classe di scienze morali, riferisce sulla parte presa dall'Accademia alle onoranze funebri dell'illustre Collega e sulle condoglianze alla famiglia; annuncia che al Socio Vidari fu affidata la commemorazione dell'Estinto, che sarà letta in adunanza delle due Classi riunite.

Il Socio Guareschi nell'annunciare la morte del Prof. Leone Pesci, ordinario di Chimica farmaceutica e tossicologica, già Rettore Magnifico della R. Università di Parma ed ora pure Rettore della R. Università di Bologna, esprime tutto il suo cordoglio, dolore vivissimo, per sì grave perdita; il Pesci, anima buona e nobile, era un chimico di valore notevolissimo; l'opera sua universitaria scientifica, didattica ed amministrativa è stata elevata ed efficace. — La Classe si associa al rimpianto ed all'elogio.

Il Socio Guidi presenta in omaggio la sua Memoria *Sulle dighe a volta*.

Il Socio Guareschi, anche a nome del Socio Mattirolo, fa omaggio della *Relazione della Commissione, nominata dalla R. Accademia di Medicina, per la scelta dei preparati sintetici usati come rimedio in relazione alle circostanze attuali.*

Il Socio Parona presenta a nome dell'A. Prof. T. Taramelli, Socio nazionale, due pubblicazioni: *Di alcuni problemi geologici che riguardano la valle dell'Isonzo; Descrizione geologica della Provincia di Pavia*, 2ª edizione, e ne rileva l'importanza.

Presenta anche da parte del Socio corrispondente A. Lacroix la sua *Notice historique sur Bory de Saint-Vincent.*

Il Presidente ringrazia i donatori, avvertendo che la Segreteria ringrazierà anche la R. Accademia di Medicina per l'omaggio presentato dal Socio Guareschi.

Il Presidente, riferendosi alle deliberazioni prese dalla Classe in merito alla proposta del Vice Presidente Chironi sullo studio di urgenti problemi di alto interesse nazionale, comunica che la Classe di scienze morali, storiche e filologiche ha ritenuto opportuno di nominare il Socio Vidari a far parte della Commissione propria e di delegare alla Commissione stessa la facoltà di aggregarsi qualche altro collega, ove lo creda necessario per lo studio di particolari problemi. — Propone alla Classe nostra di uniformarsi al deliberato dell'altra Classe e di procedere alla nomina del quinto membro della Commissione nostra, anche in vista di una prossima convocazione delle due Commissioni riunite, annunciando che quella della Classe di scienze morali, storiche e filologiche si propone intanto lo studio di alcuni problemi, due dei quali di particolare interesse per la nostra Commissione, e cioè: il problema delle acque sotto l'aspetto giuridico-economico e la questione delle cave e delle torbiere sotto l'aspetto giuridico-economico: sono problemi pure interessanti sotto l'aspetto tecnico e quindi anche per la nostra Classe.

La Classe, con una discussione alla quale prendono parte, col Presidente, i Soci Grassi, Guidi, Guareschi, Mattirolo, Segre, Peano, D'Ovidio, dimostra di interessarsi ai problemi ora accennati, anche in considerazione del lavoro compiuto nello stesso ordine di idee da altri Enti, dei progetti di leggi che saranno prossimamente presentati al Parlamento, e di altri problemi non meno urgenti, che richiedono provvide leggi. Ne risulta l'accordo sulla opportunità che il lavoro delle due Commissioni proceda di conserva e sollecitamente, e la Classe dà alla Commissione la facoltà di aggregarsi temporaneamente altri membri, e, con votazione, nomina il Socio Grassi a farne parte.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Febbraio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Carle, Pizzi, De Sanctis, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Manno, e S. E. Ruffini.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 21 gennaio u. s.

Il Presidente rende noto alla Classe che il Socio Grassi è stato nominato dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali a far parte della Commissione incaricata di studiare i problemi di sua competenza connessi alla proposta del Vicepresidente Chironi. Aggiunge che le Commissioni delle due Classi si sono già riunite insieme per dar principio al loro lavoro, e che è prossima un'altra adunanza. Confida che il lavoro procederà spedito e fecondo di risultati.

Il Socio Patetta presenta e riassume, con breve esposizione, una sua monografia stampata negli " Atti della Società

Piemontese d'Archeologia e Belle Arti „ (vol. VIII) e intitolata *A proposito del mosaico medioevale scoperto a Torino nel marzo del 1909.*

Il Socio Segretario Stampini presenta, riassumendola, la *Commemorazione* del nostro insigne e compianto Socio Carlo Cipolla, letta dal Socio corrispondente Giuseppe Biadego nella sala del Consiglio Provinciale a Verona (Estr. dagli " Atti dell'Accademia d'agricoltura, scienze e lettere di Verona „).

In fine il Socio Stampini presenta, per la inserzione negli *Atti*, una nuova sua puntata di *Lucretiana.*

LETTURE

Lucretiana

Nuovi appunti *

(V, 460-466; 467-470; 1012 sg.; 1408 sgg.)

Nota di ETTORE STAMPINI, Socio nazionale residente

(V, 460-466)

460 non alia longe ratione ac saepe uidemus
461 aurea cum primum gemmantis rore per herbas
462 matutina rubent radiati lumina solis
463 exhalantque lacus nebulam fluuiique perennes
464 ipsaque ut interdum tellus fumare uidetur
465 omnia quae sursum cum conciliantur, in alto
466 corpore concreto subtexunt nubila caelum

Tale è la lezione concorde di O o Q (1), nè parve ai più degli editori che questi versi presentassero una lacuna o che dovesse essere variato l'ordine in cui nei codd. si succedono. Vero è che il Lachmann (*Comm.*, p. 293) sospettò corrotta la lezione *uidemus* trasformandola in *uidentur* e cambiando *exalantque* (secondo la grafia dei codd.) in *exalare*, e che in questi due ritocchi consentirono il Bernays e Benoist-Lantoine. Ed è anche vero che il Munro, pur conservando la lezione dei codd., riscontrava in essa, per rispetto alla costruzione, " a violent change " which only impairs the beauty of the passage. „ Ma parve al Brieger *aliquid deesse* nella lez. dei codd., e perciò tra il v. 462 ed il 463 segnò una lacuna, " qua lacuna non animad- " versa Munro poetam dicentem facit nos mane aethera, qui

---

* Cfr. i miei *Lucretiana* (V, 311 sg.) in questo volume, p. 392 sgg.

(1) Entrambi, per altro, leggono *exalantque*, corretto in O da altra mano.

" scilicet videri non potest, se tollentem videre „ (*Proleg.*, p. LXVIII: cfr. *Appendix*, p. 223). Al Brieger succedette il Giussani, il quale pure trovò una lacuna, ma non quella del Brieger: ponendola dopo il v. 460, cioè dopo *uidemus*, e facendo seguire al v. 460 il 463, poi il 464, poi il 461, e finalmente, nell'ordine dei mss., il 465 e il 466, disordinando così la regolare successione dei versi, come prima di lui aveva fatto Hugo Purmann, che leggeva, per altro, *exalare* (1).

Cominciamo dall'esame di questa intrusione dei vv. 463 e 464 tra il 460 e il 461. Il Giussani pretendeva che " al posto " tradizionale non starebbero che come poetica determinazione " temporale „, e soggiungeva " trovo strano che per descrivere " il momento in cui avviene un fatto sull'acqua si usi un fatto " che avviene sulla terra „. Ora, con tutto il mio rispetto alla memoria del mio diletto amico, non posso celare che qui il Giussani si è mostrato poco felice osservatore. Sta il fatto che, quando in certe notti si è accumulata grande quantità di umidità nella campagna, al primo apparir del sole ciò che subito ci colpisce è un grande scintillio di raggi riflessi dalla rugiada dell'erba e — aggiungo io — dai vetri delle abitazioni; ma contemporaneamente si vedono i bacini e i corsi d'acqua mandar come un fumo, il quale a poco a poco innalzandosi si espande e si unisce a quello che, quasi ad un tempo, dopo il primo

---

(1) Per altro il Purmann (cfr. il suo scritto *Zu Lucretius* in *Neue Jahrbb. für Philol. u. Paedag.*, vol. 115, a. 1877, p. 278 sg., che non vedo citato dal Giussani) non volle ammettere che ci sia una lacuna. Considerando che dal Lachmann, coi mutamenti proposti, viene al poeta " etwas " imputiert, woran er sicher nie gedacht hat „; ma volendo evitare la lacuna dopo il verso 460, che pure sarebbe, secondo lui, la maniera più semplice di sfuggire alle difficoltà che, anche a suo giudizio, si presentano conservando inalterato il testo dei mss., prosegue con le seguenti parole: " da ich aber in der that nicht anzugeben wüste, was in der lücke gestanden " haben sollte, so will ich mich auf dies auskunftsmittel nicht einlassen " und lieber glauben, dasz eine falsche ordnung der verse hier wie an- " derwärts in den archetypus sich eingeschlichen habe. das heiszt, ich " meine dasz v. 463 und 64 (*exalare*.. und *ipsaque*..) hinter v. 460 (*non* " *alia* ...) zu setzen sind. dadurch kommen wir zwar um die veränderung " von *exalantque* in *exalare* nicht herum, ersparen uns jedoch wenigstens " die von *videmus* in *videntur*. „ E di fatto egli propone di leggere *videmus* | *exalare lacus etc.*

sfavillar di raggi, s'eleva e dai prati e dai campi e dai tetti. È un'osservazione da me fatta tante volte dall'alto, osservazione che, anzi, mi studiai, son passati molt'anni, di tradurre in pochi distici elegiaci che mi permetto di qui riportare:

> Dall'orïente il sol radïante alla terra si mostra,
>   e un fremito corre per l'universe cose.
> Veggo laggiù nel pian dorarsi le case fumanti;
>   lontan lontano mandano lampi i vetri.
> Striscia di densi vapor roteanti dal fiume s'aderge,
>   e lenta allarga sopra le ripe il seno;
> E su dai campi vien levandosi candida nebbia:
>   sembra incenso che doni la terra al sole (1).

Insomma il fatto è che non di rado, anche quando dalla terra non pare che s'elevino vapori, questi si notano invece sulle acque, e quindi le acque devono avere la precedenza nella riproduzione artistica del fenomeno che sempre, più o meno, si verifica su di esse, mentre solo *interdum tellus fumare uidetur*, proprio come dice Lucrezio, il quale, coerente alla sua osservazione, ripeterà più tardi la rappresentazione di tale fenomeno coi versi (VI, 476-480):

> praeterea fluuiis ex omnibus et simul ipsa
> surgere de terra nebulas aestumque uidemus;
> quae uelut halitus hinc ita sursum expressa feruntur
> suffunduntque sua caelum caligine et altas
> sufficiunt nubis paulatim conueniundo,

dove quel *simul* non vuol già esprimere una assoluta contemporaneità, ma una successione quasi istantanea dopo il primo balenio delle stille riflettenti i raggi del sol nascente.

Questi ultimi versi che ho citato del poeta mi apron l'adito a confutare l'osservazione, a cui s'associò il Giussani, fatta dal Brieger al Munro e da me qui sopra riferita. È assolutamente falso che, se non si ammetta una lacuna dopo il v. 462, come voleva il Brieger, o dopo il 460, come preferiva il Giussani,

(1) Pubblicai i due primi distici sin dal luglio 1879 nel mio studio *Le odi barbare di Giosuè Carducci e la metrica latina* in *Rivista di filologia e d'istr. class.*, vol. VIII, 1880, p. 96.

l'oggetto di *uidemus* sarebbe *aethera se tollentem* (*aethera se extollere* Giuss.). È un rilievo nato precisamente dal non aver ponderato bene le parole di Lucrezio, il quale con quel *non alia longe ratione* introduce una vera comparazione, vale a dire introduce l'esposizione di un altro fenomeno, e precisamente quello di un fenomeno visibile, quello della nebbia che si leva in alto dalle acque e dalla terra, per chiarir meglio, con un dato della esperienza, il fenomeno sfuggente alla vista, ma per la sua teoria non meno reale, dell'*aether ignifer* che (vv. 457-459)

> per rara foramina, terrae
> partibus erumpens primus se sustulit.....
> ...... et multos secum leuis abstulit ignis.

Dunque nessuna lacuna, nè alla Brieger nè alla Giussani. Solo conviene aver presente che quel *uidemus* ha per obbietto precisamente la duplice azione che è espressa in seguito ed è introdotta da *cum primum*, come ha ben notato il Merrill (1). Non era proprio necessario al poeta di dare al *uidemus* un obbietto speciale, quando è precisamente tutto uno svolgersi di azioni nel tempo, che forma l'oggetto della constatazione degli occhi nostri. Possiam benissimo dire: " non molto differentemente " da ciò che spesso è constatato da' nostri occhi, non appena " l'aurea matutina luce del sole rosseggia irradiandosi per " l'erbe gemmate di rugiada, e i laghi e i fiumi correnti esalan " nebbia ". Qui mi arresto per un tratto, dovendo fare un'altra avvertenza. Ed è questa, che il poeta divide in due parti distinte il fenomeno visibile che vuol contrapporre a quello invisibile dell'etere: la prima è introdotta da *non alia longe ratione* (v. 460), e la seconda da quell'*ut* = *quemadmodum* che vien dopo *ipsaque* (v. 464). Il non aver fatto questa avvertenza ha evidentemente reso più difficile e complicato il chiarimento di questo passo, mentre a me pare indiscutibile che il poeta ha spezzato in due la comparazione, e perciò presenta due distinti confronti introdotti ciascuno da una diversa espressione;

---

(1) Nella sua ed., nota al v. 462, p. 678: " but the action is the object: ' see occur, when ', etc. ".

il primo abbraccia i vv. 460-463, e il secondo è contenuto nel solo v. 464; mentre i vv. 465, 466 continuano, per così dire, il confronto complessivo del velo di nubi che ricopre il cielo e che s'è formato in alto dall'incontro di tutti i vapori venuti dalle acque e dalla terra, precisamente come dicono i vv. 479, 480 sopra allegati del lib. VI (1).

(V, 467-470)

sic igitur tum se leuis ac diffusilis aether
corpore concreto circumdatus undique saepsit
et late diffusus in omnis undique partis
omnia sic auido complexu cetera saepsit

È questa la lezione concorde di O e Q, salvo uno dei frequenti sbagli in Q, cioè *ceteras*. Pertanto è lecito argomentare che l'esemplare, da cui provennero O e Q, presentasse il medesimo verbo *saepsit* in fine dei vv. 468 e 470. Ma ebbe ragione il Lachmann quando, esaminando (*Comm.*, p. 293) il luogo di Plutarco (2), che suolsi considerare come un commentario

---

(1) Altre osservazioni fece, col suo solito acume, il Giri nello studio *Alcuni luoghi controversi del quinto libro di Lucrezio* in *Rivista di filol. e d'istr. class.*, pp. 224 sgg. del vol. XXX, 1902, sostenendo la lezione e l'ordine dei vv. tradizionale, senza ammettere " alcuna perdita nè fare alcuno spostamento ". Felicissimo è il confronto con un luogo di Ovidio (*Am.* I 7, 53-54). — Anche il Bailey nella sua ed. (1898) lasciò immutati il testo e l'ordine dei versi.

(2) *De placitis philosoph.*, I, 4. Vuol spiegare *πῶς συνέστηκεν ὁ κόσμος* e dice: *Τῶν ἀτόμων σωμάτων ἀπρονόητον καὶ τυχαίαν ἐχόντων τὴν κίνησιν συνεχῶς τε καὶ τάχιστα κινουμένων εἰς τὸ αὐτὸ, πολλὰ σώματα συνηθροίσθη ..... Ἀθροιζομένων δ' ἐν ταὐτῷ τούτων, τὰ μὲν, ὅσα μείζονα ἦν καὶ βαρύτερα, πάντως ὑπεκάθιζεν· ὅσα δὲ μικρὰ καὶ περιφερῆ καὶ λεῖα καὶ εὐόλισθα, ταῦτα καὶ ἐξεθλίβετο κατὰ τὴν σύνοδον τῶν σωμάτων εἴς τε τὸ μετέωρον ἀνεφέρετο. ὡς γὰρ οὐ μὲν ἐξέλιπε* [secondo l'emendazione del Brieger] *ἡ πληκτικὴ δύναμις μεθεωρίζουσα, οὐκέτι δ' ἦγεν ἡ πληγὴ πρὸς τὸ μετέωρον, ἐκωλύετο δὲ ταῦτα κάτω φέρεσθαι, ἐπιέζετο πρὸς τοὺς τόπους τοὺς δυναμένους δέξασθαι· οὗτοι δ' ἦσαν οἱ πέριξ, καὶ πρὸς τούτοις τὸ πλῆθος τῶν σωμάτων περιεκλᾶτο, περιπλεκόμενα δ' ἀλλήλοις*

della teoria lucreziana di cui i vv. citati fanno parte, e particolarmente fondandosi sul verbo *ἐπιέζετο*, ritenne impossibile il *saepsit* del v. 468. Questo dovette esservi introdotto per isbaglio ed in sostituzione di altro verbo dal copista dell'esemplare, il cui occhio, per distrazione, corse al *saepsit* col quale veramente terminava il v. 470. E in realtà il *se saepsit*, che attribuirebbe a Lucrezio l'idea di un etere, il quale sarebbe divenuto barriera a se stesso, è inammissibile; onde la sostituzione di *flexit*, fatta dal Lachmann, parve universalmente, sin ora, che ristabilisse bene il senso della teoria lucreziana, e si considerò come emendazione definitiva (1).

Io non nego che il *se flexit* sia una geniale emendazione, e non nego che dia un senso abbastanza soddisfacente; ma nego che non si possa trovar altro di meglio, e sopra tutto nego che corrisponda bene, non dirò all'*ἐπιέζετο*, come voleva il Lachmann, ma bensì all'*ἐξεθλίβετο* di Plutarco ed all'*ἐκθλίβεσθαι* di Simplicio. Anzi tutto il *se flexit* è, secondo me, espressione non lucreziana. Lucrezio adopera questo verbo non rade volte, così in senso proprio come in senso figurato, ma non mai, se io non ho male esaminato il suo lessico, espressioni quali *me flecto, te flectis, se flectit*. Egli dice " copia materiai cogitur ... flecti „ (II, 281 sg.); " mentem ... | ... flecti medicina „

κατὰ τὴν περίκλασιν τὸν οὐρανὸν ἐγέννησε. Vedi Usener, *Epicurea*, p. 215, fr. 308* ove in nota confronta *ἐξελθίβετο* con l'*expressere* di Lucr. (V, 453) e rimanda a un passo di Simplicio (op. cit., fr. 276, p. 196) in cui è lo stesso verbo: *Στράτων... τε καὶ Ἐπίκουρος, πᾶν σῶμα βαρύτητα ἔχειν νομίζοντες καὶ πρὸς τὸ μέσον φέρεσθαι, τῷ δὲ τὰ βαρύτερα ὑφιζάνειν τὰ ἧττον βαρέα ὑπ' ἐκείνων ἐκθλίβεσθαι βίᾳ πρὸς τὸ ἄνω, ὥστε εἴ τις ὑφεῖλε τὴν γῆν, ἐλθεῖν ἂν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ κέντρον, καὶ εἴ τις τὸ ὕδωρ, τὸν ἀέρα, καὶ εἰ τὸν ἀέρα, τὸ πῦρ*. Si vedrà più sotto la ragione di questo riferimento.

(1) Ma non al Merrill, che nel recente studio cit. *Criticism of the text of Lucretius etc.*, II, p. 82, considerò autentico il primo *saepsit*, spiegando: " The ether expanded until it got far enough away to enclose the world, " and then it hemmed itself in, that is, it stopped, restrained and enclosed " itself, and became a fence for all the rest. „ Per di più egli soggiunge: " we should rather expect 470 to be corrupt. „ E propone, in luogo di questo secondo *saepsit* che sarebbe ripetuto da quello del 468, il v. *cepit*, citando II, 1066, auido complexu quem tenet aether.

(III, 510 sg.); " naturam flectere „ (III, 516); " animus ... | ... flectitur a medicina „ (III, 521 sg.); " animam mutato corpore flecti „ (III, 755); " solis cursus ... | ... flectat natura gubernans „ (V, 76 sg.); " quod procul a nobis flectat natura gubernans „ (V, 107); " illorum nutu facere omnia flecti „ (V, 1187); " flectere cantus „ (V, 1406); e impiega poi parecchie volte il participio *flexūs* in varie forme. E sempre in tal verbo si scorge, o proprio o figurato, il senso di un cambiamento di direzione, di una deviazione da uno stato, da una data condizione. Ma anche ammesso che l'espressione *se flexit* fosse confortata da un altro esempio lucreziano, io mi domando se si addica perfettamente al senso del nostro passo. Leggiamolo bene, e vi troviamo quattro cose che hanno stretto rapporto fra loro: 1ª il concetto della diffusilità dell'etere (*diffusilis aether*); 2ª il concetto dell'azione che compie l'*aether* per questa diffusilità, concetto che doveva essere significato da un verbo, diremo così, riflessivo (*se undique saepsit* codd., *se undique flexit* Lachm.); 3ª la condizione in cui si venne a trovare l'*aether* per via di questa azione (cioè *late diffusus in omnis undique partis*); 4ª l'effetto finale di questa condizione (*omnia sic auido complexu cetera saepsit*).

Ora, dato il concetto rappresentato da *diffusilis* (nº 1), data la condizione di *late diffusus* dell'*aether* (nº 3) causata dall'azione rappresentata dal nº 2, a me pare sicurissimo che Lucrezio usò l'espressiene *se fudit*. L'etere *diffusilis se undique fudit*, *et late diffusus ... cetera saepsit*. Il *se fudit* ha il vantaggio di esprimere la stessa idea generica di movimento del *se flexit*, senza quella specifica di una deviazione, che non è per nulla nè nel pensiero nè nelle parole del poeta, e s'attaglia all'ἐπιέζετο ma ancor più all'ἐξεθλίβετο plutarcheo, in quanto l'etere *se fudit* per effetto d'una compressione, d'uno schiacciamento, che esso appunto subì, e che, per via della sua diffusilità o espansibilità, lo costrinse a *se fundere* (diffondersi, espandersi) *in omnis undique partis*. Che razza di *flexus* può mai essere quello di una massa, la quale, compressa, scappa, schizza da tutte le parti? Una cosa *diffunditur in omnis undique partis*, non già perchè *se undique flectit*, bensì perchè *se undique fundit* (oppure *diffundit*) sotto l'azione di una potente compressione. Nè, del resto, si tratta di una massa

la quale, avendo una determinata direzione, deva p i e g a r e verso un'altra. No: prendiamo Lucrezio, e leggiamo pochi versi prima (449 sgg.):

> quippe etenim primum terrai corpora quaeque,
> propterea quod erant grauia et perplexa, coibant
> in medio atque imas capiebant omnia sedis;
> quae quanto magis inter se perplexa coibant,
> tam magis *expressere* ea quae mare sidera solem
> lunamque efficerent et magni moenia mundi.
> omnia enim magis haec e leuibus atque rotundis
> seminibus multoque minoribu' sunt elementis
> quam tellus. ideo, *per rara foramina*, terrae
> partibus *erumpens* primus *se sustulit aether*
> ignifer et multos secum leuis abstulit ignis (1).

È proprio l'etere che *exprimebatur*, *ἐξεθλίβετο*, e *εἰς τὸ μετέωρον ἀνεφέρετο* (*se sustulit*). Qui dunque il poeta mise in rilievo l'azione della c o m p r e s s i o n e e l'e r o m p e r e dell'etere a traverso piccolissimi pori come suo effetto: più sotto quella del d i f f o n d e r s i di esso etere in tutte le direzioni, sì da avvolgere con l'avido suo amplesso ogni altra cosa. Dunque, in complesso, niente altro che c o m p r e s s i o n e, e s p r e s s i o n e, d i f f u s i o n e: niente, affatto niente *flexus*.

Si badi poi che, usando *se fudit*, noi abbiamo un'espressione perfettamente lucreziana. Cfr. IV, 375

> semper enim noua *se* radiorum lumina *fundunt*,

a cui corrisponde IV, 202

> per totum caeli spatium *diffundere sese*.

Vale a dire adoperiamo i due verbi stessi *fundere* e *diffundere* di cui, secondo la mia congettura, Lucrezio si servì nel passo in discussione, giusta una consuetudine sua, di usare in breve giro di parole, per enunciare lo stesso concetto, il vocabolo semplice ed il composto; tanto più quando, come qui, al sem-

---

(1) Cfr. sopra in nota il luogo di Plutarco, specialmente la prima parte sino ad *ἀνεφέρετο*, e quello di Simplicio.

plice è unita una determinazione che lo rende perfetto sinonimo del composto (*se undique fundit* = *se diffundit*). Anzi è frequente in Lucrezio l'impiego di un vocabolo che indica un'azione, per poi ripetere il concetto della stessa azione, o compientesi o compiuta, e da esso passare ad un terzo, precisamente come nel passo di cui ci occupiamo (*se fudit... diffusus... saepsit*). Cfr. I, 189 sg. (dove io non ammetto lacuna (1))

> paulatim *crescunt*, ut par est, semine certo
> *crescentesque* genus *seruant*

II, 80 sg.

> si *cessare* putas rerum primordia posse
> *cessandoque* nouos rerum *progignere* motus

VI, 355 sg.

> quae facile *insinuantur* et *insinuata* repente
> *dissoluunt* nodos;

e con passaggio dalla forma verbale al sostantivo, p. e., VI, 289 sg.

> tempestas *concussa* tremit fremitusque mouentur.
> quo de *concussu sequitur* grauis imber.

E per dare anche esempi di passaggio da composto ad altro composto, oppure dal semplice al composto, o per converso, cfr.

VI, 730 sgg.

> . . . . etesia flabra aquilonum
> nubila *coniciunt* in eas tunc omnia partis.
> scilicet ad mediam regionem *eiecta* diei
> cum *conuenerunt* . . .

I, 894 sg.

> scire licet non esse *in* rebus res ita *mixtas*,
> uerum semina multimodis *inmixta* latere

(1) Cfr. i miei *Lucretiana II.* in *Rivista di filol.* cit., vol. XLII, p. 272 (= *Studi di letterat. e filol. latina etc.*, Torino, 1917, p. 352).

III, 261

sed tamen, ut potero summatim *attingere, tangam*

VI, 690 sg.

fert itaque ardorem longe longeque fauillam
differt

VI, 968 sg.

umor aquae porro ferrum *condurat* ab igni,
at coria et carnem mollit *durata* calore.

Per tutte queste ragioni io con piena sicurezza ristabilisco il testo lucreziano leggendo l'intero passo così:

sic igitur tum se leuis ac diffusilis aether
corpore concreto circumdatus undique *fudit*
et late diffusus in omnis undique partis
omnia sic auido complexu cetera saepsit.

(V, 1012 sg.)

Sono perfettamente concordi fra loro O e Q nella lezione

et mulier coniuncta uiro concessit in unum
cognita sunt prolemque ex se uidere creatam

lezione evidentemente corrotta per coloro che non han la smania di veder lacune nel testo ad ogni pie' sospinto; monca per i cercatori di lacune. E ben vide il Lachmann che non si trattava che di emendare l'impossibile *cognita sunt*; onde scriveva: " paene irascor Marullo, qui hoc non viderit ac maluerit totum " versum inserere hoc modo, *Castaque privatae Veneris connubia* " *laeta* „ (*Proleg.*, p. 330) (1). Ma egli non fu seguìto, perchè propose di sostituire la voce *conubium*, che naturalmente devesi leggere trisillaba e con l'*i* consonante, qual è, del resto, in

(1) E questo verso intruso si leggeva ancora nell'ediz. del Wakefield (1813) e del Forbiger (1828).

III, 776 *conubia*, l'unico luogo, se non erro, di Lucrezio in cui questo vocabolo sia adoperato. Certo non si raccomandava molto l'espressione *concedere in unum conubium*, perchè l'idea di *conubium* (lezione accettata da Benoist-Lantoine e dal Crouslé (1)) e quella pure di *coniugium* (lezione preferita dal Bernays e dal Bergson (2)) par che implichino già di per sè un'unica convivenza; tanto più che il poeta non fa punto allusione a condizione di poliandria o di poligamia; onde quell'*unum* riesce di troppo. Propose il Munro *hospitium*, ma con esso fabbricava, come già il Marullo, tutto un verso (*hospitium, ac lecti socialia iura duobus*); mentre il Brieger, il Giussani, il Bailey e, nella sua ed., il Merrill adottarono semplicemente il comodo ripiego della lacuna fra i due versi (3).

Il Merrill, per altro, nel suo recente *Criticism of the text of Lucretius*, già da me citato (4), congetturò *in unum* | *congressum*, ritenendo che *cognita* sia una glossa che " has crept " into the text, perhaps from the margin ", soggiungendo: " cognita, euphemistic, displacing congressum became cogni- " tasum, which was then changed to cognita sunt. " Disposto ad accettare l'idea del Merrill, quanto alla glossa, ripudio la parola *congressus* come non lucreziana nel senso di unione carnale dell'uomo e della donna (5), per quanto in Cic., *De re publ.*, I, 24, 38 s'incontri *a prima congressione maris et feminae*; nè ha qui da fare il *nec ullo congressu* (6) *feminarum* di Plin., *N. H.*, XII, 54 invocato dal Merrill. Credo invece che s'adatti meglio

(1) Tanto nella sua ed. con la trad. francese a fronte (Paris, 1870), quanto ne' suoi *Extraits de Lucrèce* (Paris, 1892), p. 87.

(2) Che però la dice " conjecture douteuse ". Cfr. i suoi *Extraits de Lucrèce* (Paris, 1884), p. 118.

(3) Anche il Pichon ne' suoi *Morceaux choisis* di Lucrezio (Paris, 1903), p. 147, dice che " il y a là une lacune probable ", e lascia senza ritocchi la lez. dei mss.

(4) Part. II, p. 99.

(5) In II, 1065 si ha " esse alios alibi *congressus materiai* ": in V, 67 " et quibus ille modis *congressus materiai* ", e nulla più! E non esito a dire che, nel senso di *coitus*, è parola estranea alla età classica. Cfr. il *Thesaur. linguae latinae*, e Georges, *Ausf. Handwört.*[8] alla voce *congressus*.

(6) Si tratterebbe, in ogni modo, di una significazione postclassica del vocabolo.

il voc. *concubitus*, e il *concessit in unum | concubitum* designerebbe appunto il passaggio ad un'unica convivenza matrimoniale della donna con l'uomo da quel *concubitu vago* di cui parla Oraz. in *A. P.*, 398, quando gli uomini vivevano *venerem incertam rapientes more ferarum*, come lo stesso poeta s'esprime (*Sat.*, I, 3, 109), e quando, come pochi versi prima scrive Lucrezio (v. 962 sgg.),

> ... Venus in siluis iungebat corpora amantum;
> conciliabat enim uel mutua quamque cupido
> uel uiolenta uiri uis atque inpensa libido
> uel pretium, glandes atque arbuta uel pira lecta.

Non ho bisogno di confortare la mia proposta allegando i numerosi luoghi che circa il *concubitus coniugalis* si posson leggere nel *Thes. linguae lat.* (alla voce *concubitus*, § 2); mi basti rilevare come tal vocabolo conduce subito a quella idea della procreazione, della prole, che è immediatamente dopo indicata in Lucrezio; alla stessa guisa che in Plaut., *Amph.*, 1135 sg. *Iuppiter*, consolando *Amphitruo*, gli dice:

> primum ómnium Alcuménae usuram córporis
> cepi ét concubitu gráuidam feci fílio;

e Cicerone, in *De nat. deor.*, I, 16, 42, parlando delle assurde finzioni, con cui i poeti attribuirono agli dei fatti e debolezze umane, menziona altresì i *cum humano genere concubitus, mortalisque ex immortali procreatos.* Sono due concetti che vanno strettamente uniti (1); e perciò Lucrezio, volendo designare il trapasso della donna dall'esercizio della “ venere vaga „ alla condizione di “ vincolata materialmente e legalmente ad un solo *vir* „, non poteva adoperare più semplice e significativa espressione, che il *concedere in unum concubitum.*

---

(1) Anche numerosi esempi si potrebbero citare a proposito del v. *concumbere* = *coire*: basti qui Cic., *De fato*, 13, 30: “ quia ita fatum “ sit et concubiturum cum uxore Laium et ex ea Oedipum procreaturum „. Cfr. il § 2 a questa voce in *Thes.* cit.

(V, 1408 sgg.)

unde etiam uigiles nunc haec accepta tuentur
et numerum seruare genus didicere neque hilo
maiore interea capiunt dulcedine fructum
quam siluestre genus capiebat terrigenarum

Così O e Q; ma quel *genus* non mi va. A me par evidente che è penetrato nel v. 1409 dal v. 1411, ove la voce *genus*, occupando il terzo posto, veniva a trovarsi su per giù sotto al posto occupato nel v. 1409 da quel vocabolo che l'amanuense dell'esemplare di O e Q, o magari dell'archetipo, per distrazione saltò, copiando invece *genus*. È vero che la lezione dei codd. ebbe difensori e antichi e recenti, e, fra i recenti, mi basti ricordare il nostro Giussani (1), che, non acconciandosi nè al *numerum servare sonis* del Lachmann, accettato dal Bernays, da Benoist-Lantoine e dal Bergson (op. cit., p. 135), nè alla congettura stranissima *recens* (2) del Munro, conservava la parola *genus* col Brieger, ma senza ammettere la lacuna che questi vedeva tra il v. 1408 ed il seg. (3). Naturalmente, per difendere la lez. dei mss., bisogna concedere che *numerum* sia un gen. plur. Ora io consento col Cartault che “ Il n'est pas im-

(1) *numerum seruare genus* aveva pur stampato il Crouslé, traducendo “ observer la différence des mesures „; ma poi (in *Extraits* cit., p. 100) adottò la vecchia lezione congetturale *numeris seruare genus*, che dà lo stesso senso, del cod. Niccoliano (Laur. XXXV, 30) e del Laur. XXXV, 31 (cfr. Munro nell'app. crit.). Si sa che quest'ultima lezione penetrò nelle antiche edizioni (cfr. il quadro del Wakefield a p. 354 del vol. IV della sua ed. cit.), e si legge pure nel testo dell'ed. dello stesso Wakefield e di quella del Forbiger.

(2) Accolta dai minori editori inglesi, come il Duff (1896) e il Lowe (1907). Recentemente il Merrill in *Criticism* cit., Part. II, p. 106 sg., propose *numerum servare novum*.

(3) La lacuna è anche segnata a p. 167 dei *Morceaux choisis* del Pichon già cit. Al contrario il Bailey mantiene la lez. dei codd. senza indicare lacuna, e segna come guasta la parola *genus*; ma per altro traduce (*Lucr. on the Nat. of things*, Oxford, 1910, p. 232): “ have learnt to keep to the “ rhythm of the song „, annotando che “ The MS. reading *genus* is pro- “ bably right. „

" possible que *numerum* soit un ancien gén. „ (1), quantunque sarebbe una forma da non accettarsi senza beneficio d'inventario; ma poichè egli soggiunge, e giustamente, che " s'oppose " à *extra numerum* du v. 1401 „, si può domandargli subito la ragione del plurale anzichè del singolare. E la stessa domanda s'ha da fare a coloro che, per evitare cotesto insolito gen., emendarono con la congettura *numeris seruare genus* (2). Badiamo bene che son versi che appartengono a quel passo nel quale ai tempi in cui *agrestis ... musa uigebat* (v. 1398), e *lasciuia laeta monebat*

> ... *extra numerum procedere* membra mouentis
> duriter et duro terram pede pellere matrem,

sono contrapposti i tempi del poeta, tempi civili, ne' quali non c'è più quel sentimento di entusiasmo che era determinato dalla n o v i t à,

> omnia quod noua tum magis haec et mira uigebant;

ma, in compenso, pur conservandosi l'antica tradizione (*haec accepta tuentur*) per cui gli uomini continuano a

> ducere multimodis uoces et flectere cantus,
> et supera calamos unco percurrere labro,

non si va più, come una volta, nella musica e nel canto, *extra numerum*, ma s'è imparato a *numerum seruare*. Quando, ne' tempi primitivi, la rustica danza, accompagnata da suoni di agresti strumenti, procedeva sfrenata *extra numerum*,

> ... oriebantur risus dulcesque cachinni;

ne' tempi più civili, invece, se non c'è più l'entusiasmo della novità, e l'esecuzione musicale esige la stretta osservanza del ritmo, tuttavia la dolcezza, che dalla musica e dal canto ritmicamente eseguiti ridonda agli animi, non è minore di quella che da una goffa e arritmica esecuzione fra smodate risa prendeva il *siluestre genus terrigenarum*. Non si tratta adunque di

---

(1) *La flexion dans Lucrèce* (Paris, 1898), p. 19.
(2) Cfr. sopra la nota 1 a p. 418.

varietà di *numeri*; ma sì bene del *numerus* in genere, del ritmo, del tempo regolare, a cui s'hanno ad informare i *modi* (ecco la parola!), cioè la melodia che si svolge con ordine ritmico nel suon degli strumenti, nel canto, nei moti del corpo che accompagnano le note degli strumenti e del canto. Il Lachmann ebbe solo il torto di proporre una parola, *sonis*, troppo generica, la quale perciò non traduce esattamente l'idea specifica di musica, il concetto di melodia, che Lucrezio indica precisamente ai già citati vv. 1406 sg.

> ducere multimodis uoces et flectere cantus
> et supera calamos unco percurrere labro,

ciò che invece fa il vocabolo *modi* (1). Onde io conchiudo che, tolto *genus*, così debbasi leggere il v. lucreziano:

> et numerum seruare *modis* didicere neque hilo

Ma come si dovrà leggere il verso successivo? Anche qui io non mi so indurre ad abbandonare la lezione dei codd. che ho sopra riferito, pur avendo contrari, si può dire, tutti i moderni editori di Lucrezio. Sicuramente io non mi commuovo d'ammirazione davanti a quel *maiore dulcedine fructum* di cui il Wakefield trovava " nihil elegantius ... atque prorsus gemi-" nissimis nihil crebrius in poëtis ". Nondimeno dal non trovar bellissima, elegantissima questa espressione, nella quale a *fructum* è aggiunta una determinazione in forma d'ablativo di qualità, al giudicarla guasta, sì da doverci por le mani sopra per racconciarla, ci corre parecchio. Si tratta d'uno dei tanti ablativi di qualità, " qui substantivis artioris determinationis " loco adscribuntur " (2), e dei quali Lucrezio ci offre numerosi esempi. Cito I, 118

> detulit ex Helicone *perenni fronde coronam*.

---

(1) Non sarà inutile avvertire qui che *modi* era il termine tecnico con cui si indicava, in genere, anche la musica del dramma romano. Cfr. nelle didascalie di Terenzio: *modos fecit Flaccus*.

(2) Cfr. Hidén, *De casuum syntaxi Lucret.* II, Helsingforsiae, 1899, p. 51 sgg.

E così pure, per scegliere fra i tanti: *florenti aetate* iuvencus (V, 1074); *aeuo florente* puellas (III, 1008); *praeclara luce* nitorem (II, 1032); *candenti marmore* fluctus (II, 767); *magno molimine* nauem (IV, 902); *taetro odore* bitumen (VI, 807); *caecis feruoribus* ignem (V, 611); *praeclaro nomine* Athenae (VI, 2), ecc. E però non vedo ragione alcuna di adottare la vecchia duplice correzione del Lambino (1), che ha ottenuto sì universale favore anche ne' tempi nostri,

maiorem interea capiunt *dulcedini'* fructum:

nè punto m'importa che *maiorem* si trovi in Laur. XXXV, 31 (cfr. Munro, app. crit.): è sempre una lezione congetturale, e nulla più; ed io rimango col Gifanio, col Forbiger, col Wakefield, col Crouslé (2), fermo nella convinzione che non sia còmpito della filologia il toccare i testi, se non davanti all'evidenza di un guasto patito. Chi oserebbe emendare un brutto verso di Dante? Nè sarebbe buona ragione riferirsi ad altro verso lucreziano (II, 971)

aut aliquem fructum capiant *dulcedinis* almae,

come se il poeta fosse stato sì scarso di mezzi d'espressione, da non trovare altro modo di significare lo stesso pensiero! Lucrezio si ripete spessissimo; ma sa anche variare. Non bisogna dimenticarlo.

(1) Cfr. l'ediz. parigina del 1570, p. 517.

(2) Negli *Extraits* cit., p. cit., chè nel testo edito nel 1870 con la trad. a fronte aveva stampato il verso come era stato modificato dal Lambino.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

PROGRAMMA

PER IL

XXI PREMIO BRESSA

La Reale Accademia delle Scienze di Torino, conformandosi alle disposizioni testamentarie del Dottore Cesare Alessandro Bressa, annunzia che il *ventunesimo premio Bressa* sarà conferito a quello **Scienziato di qualsiasi nazione**, il quale durante il quadriennio 1915-18 " avrà fatta, a giudizio dell'Accademia, " la più insigne ed utile scoperta, o prodotta l'opera più celebre " in fatto di scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, " matematiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, " non escluse la geologia, la storia, la geografia, e la statistica ".

La somma destinata al premio, dedotta la tassa di ricchezza mobile, sarà di Lire italiane **9000** (novemila).

Gli Autori, i quali desiderino richiamare l'attenzione della Accademia sulle loro opere, potranno inviarle alla Segreteria dell'Accademia non oltre il 31 dicembre 1918. Esse dovranno essere stampate e non saranno restituite. Non si terrà conto dei manoscritti e dei lavori dattilografati.

L'Accademia aggiudicherà il premio allo Scienziato che le sembrerà più meritevole, abbia o no presentato le sue opere.

A nessuno dei Soci nazionali dell'Accademia, residenti o non residenti, potrà essere conferito il premio.

Torino, addì 1° gennaio 1917.

Il Presidente dell'Accademia
Lorenzo Camerano

Il Segretario della Classe
di scienze fisiche, matematiche e naturali
Carlo Fabrizio Parona

Il Segretario della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

PROGRAMME
DU
XXIe PRIX BRESSA

L'Académie Royale des Sciences de Turin, se conformant aux dispositions testamentaires du Docteur César Alexandre Bressa, annonce que le *XXIe prix Bressa* sera attribué au **Savant, à quelque nation qu'il appartienne,** lequel, durant la période quadriennale de 1915-1918, " au jugement de " l'Académie des Sciences de Turin, aura fait la découverte la " plus importante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage " le plus célèbre en fait de sciences physiques et expérimentales, " histoire naturelle, mathématiques pures et appliquées, chimie, " physiologie et pathologie, sans exclure la géologie, l'histoire, " la géographie et la statistique „.

La somme fixée pour ce prix, la taxe de l'imposition mobilière déduite, sera de **9000** (neuf mille) livres (value italienne).

Quiconque voudra attirer l'attention de l'Académie sur ses travaux pourra les adresser au Secrétariat de l'Académie avant le 31 décembre 1918. Les ouvrages devront être imprimés et ne seront pas rendus. On ne tiendra aucun compte ni des manuscrits ni des travaux dactylographiés.

L'Académie décerne le prix à celui des Savants qu'elle en juge le plus digne, bien qu'il n'ait pas envoyé ses ouvrages à l'Académie.

Aucun des Membres associés nationaux, résidants ou non résidants, de l'Académie de Turin ne pourra obtenir ce prix.

Turin, ce 1er Janvier 1917.

Le Président de l'Académie
Lorenzo Camerano.

Le Secrétaire de la Classe
des sciences physiq., mathém. et naturelles
Carlo Fabrizio Parona

Le Secrétaire de la Classe
des sciences morales, historiq. et philolog.
Ettore Stampini

PROGRAMME

FOR THE

XXI BRESSA PRIZE

Notice is hereby given by the Turin Royal Academy of Sciences, that, in conformity to the will of the late Dr. Cesare Alessandro Bressa, the *XXI Bressa Prize* shall be conferred to the **Scholar, of whatever nationality,** " who, during " the period 1915-18, will have made, according to the judgment " of the aforesaid Academy, the most important and useful " discovery, or published or produced the most renowned work " on physical and experimental sciences, natural history, pure " or applied mathematics, chemistry, physiology and pathology, " including also geology, history, geography, and statistics „.

The prize, free from taxes, amounts to nine thousand **(9000)** *lire italiane.*

The Authors, who wish to call the attention of the Academy to their works, ought to send them to the Secretaryship of the Academy not later than December 31st 1918. They must be printed and will not be given back. Manuscripts and typewritten works cannot be taken into consideration.

The Academy will award the prize to the Scientist more worthy of it, independently from the presentation of the works.

In no case any of the national Members of the Academy of Turin, resident or non-resident, will be awarded the prize.

Turin, January 1st 1917.

The President of the Academy
Lorenzo Camerano

The Secretary of the Class
of physical, mathematical and natural sciences
Carlo Fabrizio Parona

The Secretary of the Class
of moral, historical and philological sciences
Ettore Stampini

DE CONDICIONIBUS XXI PRAEMII EX BRESSAE TESTAMENTO ADIUDICANDI LIBELLUS

Sodales ordinarii Regiae Academiae Taurinensis doctrinae studiis provehendis XXI praemium a CAESARE ALEXANDRO BRESSA, medicinae doctore, institutum docto illi viro cuiuslibet nationis anno MCMXIX addicent, " quem, ut Bressae testamento cautum " est, proximis superioribus quattuor annis, hoc est eo temporis " spatio quod a kalendis ianuariis anni MCMXV ad kalendas " ianuarias fluxerit anni MCMXIX, praestantissimum omnium " atque utilissimum inventum Regiae Academiae iudicio com- " mendaverit, aut editum opus omnium nobilissimum, quod " quidem ad physica ceterasque doctrinas experimentis fultas " pertineat, vel ad naturalem historiam, ad mathematicorum " disciplinas, sive quae in puris notionibus positae sunt, sive " quae ad vitae usum et rerum exercitationem adhibentur, vel " ad chemiam, physiologiam, pathologiam, non exceptis geo- " logia et historia et geographia et doctrina quae numeris ac " rationibus universam populorum vitam expendit — " statistica „ " vocant Itali „.

Huius quadriennii praemium, dempta pecunia quae mobilibus opibus lege irrogatur, erit IX millium denariorum italicorum.

Qui autem praemii causa mentes Sodalium Academiae ad opera aut inventa sua perpendenda convertere cupiant, haec illis facultas dabitur, ut studia sua Sodalibus Taurinensibus ab actis ante kal. ianuarias anni MCMXIX denuntient, ea condicione ut libros typis exscriptos mittant; operum enim, quae aut manu exarata aut digitorum pulsu scripta sint, nulla ratio habebitur. Libri missi non reddentur. Nihilo minus Academia Taurinensis docto illi viro, quem dignissimum iudicaverit, praemium attribuet,

etsi is nullum librum mittendum curaverit. Nulli vero ex italis Academiae Sodalibus ordinariis, sive Augustam Taurinorum incolentibus sive alibi habitantibus, praemium adiudicari licet.

D. kal. ianuar. an. MCMXVII Augusta Taurinorum.

LAURENTIUS CAMERANO

Praeses Regiae Academiae Taurinensis
doctrinarum finibus proferendis

CAROLUS FABRICIUS PARONA

ab actis
Ordinis Sodalium studiis doctrinarum
physicarum, mathematicarum,
naturalium fovendis

HECTOR STAMPINI

ab actis
Ordinis Sodalium studiis doctrinarum
moralium, historicarum,
philologicarum fovendis

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Febbraio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Grassi, Somigliana, Balbiano e Parona Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Naccari, Foà e Mattirolo.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente dà lettura di una lettera direttagli dall'Associazione Chimica Industriale di Torino (9 febbraio 1917), la quale ha promosso la fondazione in Torino di una " Stazione sperimentale per l'Industria Chimica „ con gli scopi precipui seguenti:

Esecuzione per conto degli industriali di saggi, studii e prove sperimentali;

Graduale creazione di sezioni speciali per ogni più importante gruppo di industrie;

Studio delle condizioni più adatte per ottenere un rapido sviluppo dell'industria chimica;

Mettere in grado chiunque vi abbia interesse di fare studii e prove pratiche per l'impianto di nuove industrie e per il perfezionamento delle industrie esistenti.

L'Associazione, proponendosi di costituire un Comitato Generale per l'attuazione della " Stazione „, prega il nostro Presidente di farne parte.

Il Presidente desidera di conoscere il parere della Classe al riguardo, e la Classe, dopo breve discussione, delibera di far plauso all'iniziativa alla quale dà appoggio morale, e resta inteso che il Presidente accetterà di far parte del Comitato Generale.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Febbraio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Vice Presidente dell'Accademia, Carle, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato.

È scusata l'assenza del Socio Stampini, Segretario della Classe.

Funge da Segretario il Socio Prato.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente del 4 febbraio u. s.

Il Presidente informa la Classe circa l'andamento dei lavori della Commissione per lo studio dei problemi legislativi connessi allo stato di guerra ed alle riforme che seguiranno il ritorno alle condizioni normali.

Segue uno scambio di idee rispetto a taluna delle questioni che già formarono e formeranno oggetto dei lavori della Commissione.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Febbraio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano e Parona Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Segre e Mattirolo.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio D'Ovidio annuncia con vivo rimpianto la morte dell'Accademico Straniero G. G. Darboux e, rilevandone i meriti scientifici, propone che la nostra Accademia esprima le condoglianze alla famiglia dell'illustre estinto ed all'Istituto di Francia e che un nostro Socio ne faccia degna commemorazione. Il Presidente si associa alle condoglianze ed alle proposte.

Il Socio Peano presenta in omaggio cinque sue pubblicazioni e ne parla.

Presentano per la stampa negli *Atti* le seguenti Note:

Il Segretario a nome del Socio Segre, *Formole razionali per la correzione del tiro* di Mauro Picone;

Il Socio Jadanza, *Per una edizione italiana di Tavole di Logaritmi*;

Il Socio Peano, *Approssimazioni numeriche*;

Il Presidente, *Sopra una nuova specie di Lacertide del gen. "Algiroides" dell'Uganda* del Dr. M. G. Peracca.

LETTURE

Formole razionali per la correzione del tiro.

Nota di MAURO PICONE.

§ 1. — Introduzione.

1. — Chiamo *altitudine balistica* di un luogo ad un dato istante quella ben determinata altitudine a cui corrisponde, nella tavola del Saint Robert (*), un valore medio della densità dell'aria eguale al valore della densità dell'aria nel detto luogo al dato istante, valore questo che dipende dall'effettiva altitudine del luogo, dalla temperatura, dalla pressione barometrica e dallo stato igrometrico dell'atmosfera nel luogo e nell'istante che si considera.

Detta h l'altitudine balistica del luogo ad un dato istante, io studio il moto del proietto supponendo che esso moto abbia inizio da un luogo, all'altitudine effettiva h, assegnando poi sempre alla densità dell'aria all'altitudine variabile y del proietto il valore medio che le viene assegnato nella citata tavola del Saint Robert.

Facendo astrazione dalla curvatura della terra e dal suo moto, supponendo una costante l'accelerazione g della gravità e *diretta* la resistenza dell'aria, i parametri da cui unicamente dipende la traiettoria del centro di massa di un dato proietto sono: l'altitudine balistica h dell'origine del moto, la grandezza della velocità iniziale V e l'angolo di proiezione φ.

(*) Riportata anche nel libro del Colonnello Bianchi: *Corso teorico-pratico di Balistica esterna* [Torino, Libreria Pasta, 1910], Tavola IV.

2. — Per il tiro pratico delle artiglierie vi sono apposite tavole di tiro che forniscono i dati di tiro ed altresì i coefficienti per il calcolo della correzione da apportare a quei dati, quando varii qualcuna delle ipotesi, necessariamente particolari, che sono state contemplate nella compilazione delle tavole.

Detta h_0 l'altitudine balistica, alla quale, nelle tavole di tiro, è stato supposto il pezzo, per correggere i dati di tiro, forniti dalla tavola, per il tiro contro un segno alla distanza orizzontale x e verticale z dal pezzo, quando il pezzo sia all'altitudine balistica h, è riportato nella tavola un coefficiente H (che sarà funzione di x e di z), che, moltiplicato per $h - h_0$, dà la parte principale Δx della variazione dell'ascissa del punto in cui arriverebbe il proietto, sul piano orizzontale al dislivello z dal pezzo, qualora il proietto venisse lanciato cogli stessi dati di tiro forniti dalla tavola. Si dovrà allora, all'altitudine balistica h del pezzo, tirare con i dati che si ricavano dalle tavole, supponendo che le distanze orizzontale e verticale tra pezzo e segno siano $x - \Delta x$ e z (*).

Nelle tavole di tiro sono, naturalmente, riportati i dati di tiro per un certo numero di particolari valori delle distanze x e z tra origine e segno. Questi dati, a seconda della tavola, possono riferirsi ad un angolo fisso φ di proiezione oppure ad una velocità di grandezza fissa V. Nel primo caso la tavola si dice *ad angolo fisso*, nel secondo *a carica fissa*.

Supponendo ora che le distanze $x + \Delta x$, $z + \Delta z$, orizzon-

---

(*) Propriamente, nelle tavole di tiro oggi in uso per le artiglierie da assedio, i dati di tiro e i coefficienti di correzione sono calcolati nell'ipotesi $z = 0$. Le considerazioni del testo si rivolgono più specialmente alle nuove tavole di tiro che io sto compilando, per ordine del Comando Supremo, per il tiro in montagna dei medii e dei grossi calibri, nelle quali tavole appunto i dati di tiro e di correzione sono calcolati in funzione di x e di z, per z variabile tra -1000 m. e 2000 m. Una particolareggiata descrizione di tali tavole e il metodo che io seguo per calcolarle si trovano nella mia Nota: *Sul tiro dei medii e dei grossi calibri in montagna*, in corso di stampa nella " Rivista d'Artiglieria e Genio ". — Cfr., a proposito di tavole di tiro per $z \neq 0$, le due Note del Colonnello Bianchi: *Una modificazione alle formole di Siacci per la risoluzione di problemi speciali* [ibidem, 1911, vol. II]; *Il calcolo delle tavole di tiro per le artiglierie a tiro molto teso* [ibidem, 1914, vol. I].

tale e verticale, in cui vengono a trovarsi origine e segno, non siano contemplate nelle tavole, ed x e z siano le distanze più prossime, rispettivamente a $x + \Delta x$ e $z + \Delta z$, per le quali nelle tavole si trovano i dati di tiro, supposta l'origine alla stessa altitudine balistica considerata dalle tavole, per un più rapido aggiustamento del tiro, conviene che nelle tavole siano riportati due altri coefficienti di correzione A e B, che saranno funzioni di x e di z, tali che, la combinazione:

$$A\Delta x + B\Delta y,$$

dia, per una tavola ad angolo fisso, la correzione $\Delta\varphi$ da apportarsi a questo angolo, per una tavola a carica fissa, la correzione $\Delta\omega$ da apportarsi a questa carica.

3. — Scopo di questa Nota è di far conoscere un calcolo razionale dei coefficienti H, A e B di correzione.

Nei trattati di Balistica (*) a me noti questi coefficienti, in ipotesi più particolari, sono dedotti *empiricamente*.

Reputo utile far conoscere questo mio calcolo, che applico appunto nella compilazione delle nuove tavole di tiro citate al num. precedente, non ostante che si vada dicendo da molti che, data l'imprecisione con cui generalmente le bocche da fuoco realizzano la supposta velocità iniziale, data l'impossibilità di una esatta valutazione del coefficiente di forma dei proietti, *sia completamente inutile ricercare delle formole più esatte di quelle oggi in uso e sia persino consigliabile l'abbandono di ogni razionalità in Balistica*. Ma non potrebbe darsi che il frequente disaccordo riscontrato nel tiro in guerra fra i dati di tiro forniti dalle tavole in uso e quelli di aggiustamento del tiro, non sia sempre solamente dovuto al deterioramento della bocca da fuoco o all'inesatta valutazione del coefficiente di forma? Chi può escluderlo? (**).

(*) Cfr., per esempio, il citato libro del Colonnello Bianchi, Cap. XII; la " *Balistica esterna* „ dello Zabudski (Pietrogrado, 1895), Cap. IV, dal n° 115 al n° 120.

(**) Si possono benissimo adattare a questo caso le parole di Cesàro (a pag. 157 della sua " *Introduzione alla teoria matematica dell'Elasticità* „) per i denigratori della teoria matematica dell'Elasticità, domandandosi:

Pervengo al menzionato calcolo dei coefficienti A, B e H imitando il procedimento di Poincaré (*) per lo studio degli integrali, delle equazioni della Meccanica celeste, infinitamente vicini ad un noto integrale, integrando cioè il sistema delle *equazioni alle variazioni*, relative alle variazioni dei parametri h, V, φ, per il sistema di equazioni differenziali a cui soddisfano, in funzione dell'inclinazione θ della tangente alla traiettoria, la grandezza v della velocità del centro di massa del proietto, e le coordinate x e y di questo.

In questi giorni, il Prof. Fubini, mediante una nuova e semplicissima concezione del problema, è pervenuto (**), ponendosi da un punto di vista affatto nuovo e con mezzi analitici i più elementari, ad una valutazione approssimata dei due coefficienti A e B. E le mie formole per i coefficienti A e B, conducono, *in prima approssimazione*, a quelle del Fubini.

§ 2. — Equazioni alle variazioni per la traiettoria.

4. — Suppongo che la resistenza opposta dall'aria al moto del proietto sia *diretta*, il suo centro di massa si muoverà allora nel piano verticale passante per il vettore velocità iniziale. In questo piano assumo due assi cartesiani ortogonali di riferimento, l'asse x sull'orizzontale *al livello del mare*, volto nel verso del componente orizzontale della velocità iniziale, l'asse y sulla verticale passante per il punto origine del moto, volto verso l'alto.

Indico, come al solito, con θ l'angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, dell'asse x colla tangente alla traiettoria, con v la grandezza

---

L'accusa fatta alla Balistica razionale di non trovarsi in accordo coll'esperienza, non andrebbe forse rivolta alle varie pretese teorie escogitate per giustificare a posteriori e generalizzare oltre misura alcune formolette empiriche, mettendo insieme ipotesi contradditorie, ingiustificate ed ingiustificabili?

(*) Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* [Paris, Gauthiers-Villars], t. I, pag. 162.

(**) Nella Nota: *Su alcune formole di Balistica esterna con particolare riguardo al problema della correzione del tiro.* Presentemente in corso di stampa nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ".

della velocità del centro di massa del proietto, con $F(v)$ la funzione resistente, con i e C, rispettivamente, il coefficiente di forma e il coefficiente balistico, con $\delta(y)$ il valore medio della densità dell'aria all'altitudine y, con g l'accelerazione di gravità, supposta costante.

Posto:

$$\frac{iv}{gC} F(v) = \Phi(v),$$

il moto del centro di massa del proietto riesce definito, per *tutti* i valori di θ soddisfacenti alla limitazione:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

dal sistema di equazioni differenziali (cfr., per esempio, la citata *Balistica* del Bianchi):

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{d\theta} = v \operatorname{tang}\theta + \dfrac{\delta(y)}{\cos\theta} \Phi(v), \\ \dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{v^2}{g}, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = -\dfrac{v^2}{g} \operatorname{tang}\theta, \end{cases}$$

e dalle condizioni iniziali:

$$(2) \qquad \begin{cases} [v]_{\theta=\varphi} = V, \\ [x]_{\theta=\varphi} = 0, \\ [y]_{\theta=\varphi} = h, \end{cases}$$

ove, ricordiamo, con φ indichiamo l'angolo che la velocità iniziale fa coll'asse x, con V la grandezza di questa, con h l'altitudine balistica dell'origine del moto.

5. — Supponiamo di conoscere, in tutto il campo di variabilità di θ, cioè tra $-\frac{\pi}{2}+0$ e $\frac{\pi}{2}-0$, come è consentito dai noti metodi di integrazione approssimata del sistema (1), le *tre* funzioni v, x, y definite dalle (1) e dalle (2), di avere cioè, come si suol dire in Balistica, tracciato la traiettoria per

punti corrispondente ai valori h, φ, V, dei *tre* parametri da cui essa dipende, e proponiamoci, come prima cosa, il calcolo della parte principale dell'accrescimento subìto dalle funzioni v, x, y, quando *uno solo* dei detti parametri viene variato. Indichiamo con λ quello dei parametri che viene variato, ed indichiamo con $\Delta\lambda$ la variazione, le parti principali Δv, Δx, Δy delle corrispondenti variazioni subìte dalle funzioni v, x, y sono rispettivamente:

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\Delta\lambda, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda}\Delta\lambda.$$

Le funzioni

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda},$$

sono funzioni incognite di θ che si tratta appunto di calcolare.

Posto:

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = u(\theta), \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \xi(\theta), \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \eta(\theta),$$

le funzioni $u(\theta)$, $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$ soddisfano al seguente sistema di equazioni differenziali lineari:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = \left[\operatorname{tang}\theta + \dfrac{\delta(y)}{\cos\theta}\Phi'(v)\right]u + \dfrac{\delta'(y)}{\cos\theta}\Phi(v)\,\eta, \\ \dfrac{d\xi}{d\theta} = -\dfrac{2v}{g}u, \\ \dfrac{d\eta}{d\theta} = -\dfrac{2v}{g}\operatorname{tang}\theta \,.\, u, \end{cases}$$

ottenute eguagliando le derivate, rispetto a λ, di ambo i membri di ciascuna delle equazioni del sistema (1), equazioni che costituiscono appunto *le equazioni alle variazioni* per il sistema (1).

Poniamo:

$$(4) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}\theta + \dfrac{\delta(y)}{\cos\theta}\Phi'(v) = p(\theta), \qquad \dfrac{\Phi(v)}{\cos\theta} = q(\theta), \\ -\dfrac{2v}{g} = r(\theta), \qquad -\dfrac{2v}{g}\operatorname{tang}\theta = s(\theta), \end{cases}$$

le funzioni p, q, r, s sono note funzioni di θ. Per quanto riguarda la funzione nota di θ:

$$\delta'(y),$$

si sa (cfr. la citata tavola del Saint Robert) ch'essa possiede un valore negativo pressochè costante lungo tutta la traiettoria; inoltre esso valore non è mai inferiore al numero — 0,000095. Noi potremo dunque, senza errore sensibile, porre, in luogo di $\delta'(y)$, la piccola costante negativa $-\alpha$, rappresentante la media dei valori assunti da $\delta'(y)$ lungo tutta la traiettoria.

Pertanto, il sistema delle equazioni alle variazioni, che si tratta di integrare, è il seguente:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = p(\theta)\,.\,u - \alpha q(\theta)\,.\,\eta\,, \\ \dfrac{d\xi}{d\theta} = r(\theta)\,.\,u\,, \\ \dfrac{d\eta}{d\theta} = s(\theta)\,.\,u\,. \end{cases}$$

A questo sistema vanno aggiunte le condizioni iniziali, che dipendono dal significato del parametro λ. Siano, in generale, le condizioni iniziali rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$(6)\qquad u(\varphi) = c\,, \qquad \xi(\varphi) = a\,, \qquad \eta(\varphi) = b\,.$$

6. — Si dimostra in Analisi (*) che le funzioni u, ξ, η soddisfacenti alle (5) e alle (6) sono, al variare del parametro α che compare nelle (5), funzioni olomorfe di α, cioè rappresentabili per mezzo di serie di potenze in α:

$$(7)\qquad u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\theta)\,\alpha^i, \qquad \xi = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\theta)\,\alpha^i, \qquad \eta = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(\theta)\,\alpha^i,$$

convergenti per ogni valore di α. Si dimostra altresì che le serie indicate, insieme a quelle che se ne deducono derivandole,

(*) Cfr., per esempio, Picard, *Traité d'Analyse* [Paris, Gauthier-Villars], t. III, p. 92.

rispetto a θ, termine a termine, sono, per ogni valore di α, uniformemente convergenti per θ variabile in un qualunque intervallo interno al tratto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, per modo che si avrà:

$$(8) \qquad \frac{du}{d\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{du_i}{d\theta} \alpha^i, \qquad \frac{d\xi}{d\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d\xi_i}{d\theta} \alpha^i, \qquad \frac{d\eta}{d\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d\eta_i}{d\theta} \alpha^i.$$

Introducendo gli sviluppi (7) e (8) nelle equazioni (5) e (6), ne ricaviamo per le funzioni $u_i(\theta)$, $\xi_i(\theta)$, $\eta_i(\theta)$, le equazioni:

$$(5_0) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{d\theta} = pu_0 , \\ \dfrac{d\xi_0}{d\theta} = ru_0 , \\ \dfrac{d\eta_0}{d\theta} = su_0 , \end{cases}$$

$$(6_0) \qquad u_0(\varphi) = c , \qquad \xi_0(\varphi) = a , \qquad \eta_0(\varphi) = b ;$$

$$\left.\begin{array}{ll} (5_{n+1}) & \begin{cases} \dfrac{du_{n+1}}{d\theta} = pu_{n+1} - q\eta_n , \\ \dfrac{d\xi_{n+1}}{d\theta} = ru_{n+1} , \\ \dfrac{d\eta_{n+1}}{d\theta} = su_{n+1} , \end{cases} \\ (6_{n+1}) & u_{n+1}(\varphi) = \xi_{n+1}(\varphi) = \eta_{n+1}(\varphi) = 0 . \end{array}\right\} \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Queste equazioni permettono, mediante quadrature, un calcolo ricorrente delle u_i, ξ_i, η_i. Notiamo poi che, data la piccolezza del particolare valore di α che noi dobbiamo considerare, le serie (6) sono in generale rapidissimamente convergenti, per modo che basterà in pratica prendere per valore di ciascuna di esse la somma di pochi primi termini.

Possiamo dunque considerare come integrate, per il sistema (1), le equazioni alle variazioni (5).

§ 3. — Calcolo approssimato della variazione della traiettoria in funzione dell' inclinazione.

7. — Per l'effettivo calcolo della variazione della traiettoria, in funzione dell' inclinazione, conviene distinguere i *tre* diversi significati che può avere λ.

8. — **Variazione dell'altitudine balistica dell'origine.** — Rappresenti λ l'altitudine balistica h dell'origine, vogliamo dunque calcolare le parti principali delle variazioni delle funzioni v, x, y corrispondenti alla variazione Δh dell' altitudine balistica h dell'origine, supponendo che i parametri V e φ rimangano invariati.

Per le funzioni:

$$v(\theta, h+\Delta h) = v(\theta, h) + u(\theta)\,\Delta h\,,$$
$$x(\theta, h+\Delta h) = x(\theta, h) + \xi(\theta)\,\Delta h\,,$$
$$y(\theta, h+\Delta h) = y(\theta, h) + \eta(\theta)\,\Delta h\,,$$

sussistono le condizioni iniziali:

$$v(\varphi, h+\Delta h) = V, \qquad x(\varphi, h+\Delta h) = 0,$$
$$y(\varphi, h+\Delta h) = h + \Delta h\,,$$

se ne deducono, per le u, ξ, η, le condizioni iniziali:

$$\text{(h)} \qquad u(\varphi) = 0\,, \qquad \xi(\varphi) = 0\,, \qquad \eta(\varphi) = 1\,.$$

Dalle (5_0) e dalle (6_0) otteniamo perciò:

$$u_0(\theta) \equiv \xi_0(\theta) \equiv 0\,, \qquad \eta_0(\theta) \equiv 1\,.$$

Le (5_1) e (6_1) si scriveranno allora:

$$\frac{du_1}{d\theta} = pu_1 - q\,,$$
$$\frac{d\xi_1}{d\theta} = ru_1\,,$$
$$\frac{d\eta_1}{d\theta} = su_1\,,$$
$$u_1(\varphi) = \xi_1(\varphi) = \eta_1(\varphi) = 0\,.$$

Posto:

$$(9) \qquad e^{-\int_\varphi^\theta p(\tau)\,d\tau} = P(\theta),$$

risulterà:

$$(10) \qquad \begin{cases} u_1(\theta) = -\dfrac{1}{P(\theta)} \displaystyle\int_\varphi^\theta P(\tau)\, q(\tau)\, d\tau, \\ \xi_1(\theta) = \displaystyle\int_\varphi^\theta r(\tau)\, u_1(\tau)\, d\tau, \\ \eta_1(\theta) = \displaystyle\int_\varphi^\theta s(\tau)\, u_1(\tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Arrestandoci perciò ai primi due termini, in ciascuna delle serie (7), troviamo:

Per le parti principali Δv, Δx, Δy, *delle variazioni delle funzioni* v, x, y, *corrispondenti alla variazione* Δh *dell'altitudine balistica* h *dell'origine, valgono le espressioni:*

$$\Delta v = \alpha u_1(\theta) \,.\, \Delta h, \qquad \Delta x = \alpha \xi_1(\theta) \,.\, \Delta h,$$
$$\Delta y = \Delta h + \alpha \eta_1(\theta) \,.\, \Delta h,$$

ove le funzioni u_1, ξ_1, η_1 *sono definite dalle* (4), (9) *e* (10).

9. — Variazione della grandezza della velocità iniziale. — Sia ora $\lambda = V$, per le u, ξ, η, varranno le condizioni iniziali:

$$(V) \qquad u(\varphi) = 1, \qquad \xi(\varphi) = 0, \qquad \eta(\varphi) = 0.$$

Troviamo quindi:

$$(11) \qquad \begin{cases} u_0(\theta) = \dfrac{1}{P(\theta)}, \\ \xi_0(\theta) = \displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{r(\tau)}{P(\tau)}\, d\tau, \qquad \eta_0(\theta) = \displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{s(\tau)}{P(\tau)}\, d\tau, \end{cases}$$

ed arrestandoci, per piccole variazioni ΔV di V, al primo termine, in ciascuna delle serie (7), possiamo pertanto dire che:

Per le parti principali Δv, Δx, Δy, *delle variazioni delle funzioni* v, x, y, *corrispondenti alla variazione* ΔV *della grandezza* V *della velocità iniziale, valgono le espressioni:*

$$\Delta v = u_0(\theta)\, \Delta V, \qquad \Delta x = \xi_0(\theta)\, \Delta V, \qquad \Delta y = \eta_0(\theta)\, \Delta V,$$

ove le funzioni u_0, ξ_0, η_0, *sono definite dalle* (4), (9) *e* (11).

10. — Variazione dell'angolo di proiezione. — Sia infine $\lambda = \varphi$. Le funzioni:

$$v(\theta, \varphi + \Delta\varphi) = v(\theta, \varphi) + u(\theta)\Delta\varphi\,,$$
$$x(\theta, \varphi + \Delta\varphi) = x(\theta, \varphi) + \xi(\theta)\Delta\varphi\,,$$
$$y(\theta, \varphi + \Delta\varphi) = y(\theta, \varphi) + \eta(\theta)\Delta\varphi\,,$$

devono soddisfare alle condizioni iniziali:

$$v(\varphi+\Delta\varphi, \varphi+\Delta\varphi) = v(\varphi+\Delta\varphi, \varphi) + u(\varphi+\Delta\varphi)\Delta\varphi = v(\varphi, \varphi) = V,$$
$$x(\varphi+\Delta\varphi, \varphi+\Delta\varphi) = x(\varphi+\Delta\varphi, \varphi) + \xi(\varphi+\Delta\varphi)\Delta\varphi = x(\varphi, \varphi) = 0,$$
$$y(\varphi+\Delta\varphi, \varphi+\Delta\varphi) = y(\varphi+\Delta\varphi, \varphi) + \eta(\varphi+\Delta\varphi)\Delta\varphi = y(\varphi, \varphi) = h,$$

se ne deducono, trascurando gli infinitesimi (con $\Delta\varphi$ infinitesimo) d'ordine superiore al primo rispetto a $\Delta\varphi$, le condizioni iniziali per le u, ξ, φ:

$$(\varphi)\qquad \begin{cases} u(\varphi) = -v'(\varphi) = -V \operatorname{tang}\varphi - \dfrac{\delta(h)}{\cos\varphi}\Phi(V)\,, \\[2mm] \xi(\varphi) = -x'(\varphi) = \dfrac{V^2}{g}\,, \\[2mm] \eta(\varphi) = -y'(\varphi) = \dfrac{V^2}{g}\operatorname{tang}\varphi\,. \end{cases}$$

Troviamo dunque, posto:

$$V \operatorname{tang}\varphi + \frac{\delta(h)}{\cos\varphi}\Phi(V) = \Omega\,, \tag{12}$$

le espressioni seguenti per u_0, ξ_0, η_0:

$$(13)\qquad \begin{cases} u_0(\theta) = -\dfrac{\Omega}{P(\theta)}\,, \\[2mm] \xi_0(\theta) = \dfrac{V^2}{g} - \Omega\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{r(\tau)}{P(\tau)}\,d\tau\,, \\[2mm] \eta_0(\theta) = \dfrac{V^2}{g}\operatorname{tang}\varphi - \Omega\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{s(\tau)}{P(\tau)}\,d\tau\,, \end{cases}$$

ed arrestandoci, per piccole variazioni $\Delta\varphi$ di φ, al primo termine, in ciascuna delle serie (7), possiamo affermare che:

Per le parti principali Δv, Δx, Δy, *delle variazioni delle fun-*

zioni v, x, y, *corrispondenti alla variazione* $\Delta\varphi$ *dell'angolo di proiezione* φ, *valgono le espressioni:*

$$\Delta v = u_0(\theta)\,\Delta\varphi\,, \qquad \Delta x = \xi_0(\theta)\,\Delta\varphi\,, \qquad \Delta y = \eta_0(\theta)\,\Delta\varphi\,,$$

ove le funzioni u_0, ξ_0, η_0 *sono definite dalle* (4), (9), (12) *e* (13).

§ 4. — Calcolo della variazione delle coordinate del punto d'arrivo sul terreno.

11. — Assai importante per la pratica e più specialmente per la compilazione delle tavole di tiro è il calcolo delle parti principali Δx e Δy delle variazioni subìte dalle coordinate x e y del punto d'arrivo del proietto sul terreno, corrispondenti a note variazioni dei parametri h, V, φ. Tale calcolo vogliamo ora compiere.

12. — Cominciamo dal considerare la variazione Δh dell'altitudine balistica h dell'origine.

Il piano di direzione sega la superficie del terreno secondo un determinato profilo, sia

$$Y = \pi(X)$$

l'equazione di esso, rispetto agli assi X, Y eguali rispettivamente agli assi x, y, aventi per origine l'origine della traiettoria.

Detta h l'altitudine balistica dell'origine, dobbiamo immaginare l'asse X alla quota h sul livello del mare, per modo che l'equazione del profilo del terreno, rispetto agli assi x e y, si scriverà:

$$y = h + \pi(x).$$

Siano

$$v = v(\theta, h)\,, \qquad x = x(\theta, h)\,, \qquad y = y(\theta, h)\,,$$

gli integrali noti del sistema (1) verificanti le (2), considerati al variare di h. Il punto d'arrivo sul terreno sarà determinato da quel valore di θ che soddisfa all'equazione:

$$y(\theta, h) = h + \pi[x(\theta, h)]. \tag{14}$$

Per la variazione Δh di h, la parte principale $\Delta\theta$ della variazione di θ corrispondente al punto d'arrivo sarà:

$$\Delta\theta = \frac{d\theta}{dh}\,\Delta h\,,$$

ove, come si ricava dalla (14), è:

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial h}\,\pi'(x) - \dfrac{\partial y}{\partial h} + 1}{\dfrac{\partial y}{\partial\theta} - \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\,\pi'(x)} = \frac{g}{v^2(\theta)}\;\frac{\xi(\theta)\,\pi'(x) - \eta(\theta) + 1}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,,$$

con $\xi(\theta)$, $\eta(\theta)$ indicando gli integrali del sistema (5) verificanti le condizioni iniziali (h). Dobbiamo naturalmente supporre:

$$\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta \neq 0\,.$$

Ricaviamo allora, per le parti principali Δx e Δy delle variazioni delle coordinate del punto d'arrivo sul terreno, corrispondenti alla variazione Δh dell'altitudine balistica dell'origine, le espressioni:

$$\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\,\frac{d\theta}{dh} + \frac{\partial x}{\partial h}\right)\Delta h = \frac{\eta(\theta) - 1 - \xi(\theta)\operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta h\,,$$

$$\Delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\,\frac{d\theta}{dh} + \frac{\partial y}{\partial h}\right)\Delta h = \frac{\pi'(x)\,[\eta(\theta) - \xi(\theta)\operatorname{tang}\theta] - \operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta h\,.$$

Prendendo per ξ e η i valori approssimati

$$\alpha\xi_1\,,\qquad 1 + \alpha\eta_1\,,$$

possiamo dire che:

Per le parti principali Δx *e* Δy *delle variazioni delle coordinate del punto d'arrivo sul terreno, corrispondenti alla variazione* Δh *dell'altitudine balistica* h *dell'origine, valgono le espressioni:*

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta x = \alpha\,\dfrac{\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta h\,, \\[2ex] \Delta y = \Delta h + \alpha\pi'(x)\,\dfrac{\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta h\,, \end{cases}$$

ove le funzioni $\xi_1(\theta)$ *e* $\eta_1(\theta)$ *sono definite dalle* (4), (9) *e* (10).

Per il calcolo del coefficiente di correzione H di cui abbiamo parlato al n° 2, dobbiamo supporre il terreno costituito da un piano orizzontale al dislivello z dall'origine della traiettoria, porre cioè:

$$\pi(x) = z = \text{cost.}$$

Dalle (15) si trae allora:

$$\Delta x = -\frac{\alpha}{\tan\theta}\left[\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\tan\theta\right]\Delta h,$$
$$\Delta y = \Delta h.$$

Possiamo pertanto dire che:

Per il coefficiente di correzione H *da adottarsi nel correggere i dati di tiro forniti dalla tavola, al variare dell'altitudine balistica dell'origine, vale l'espressione:*

$$H = -\frac{\alpha}{\tan\theta}\left[\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\tan\theta\right],$$

ove le funzioni ξ_1 *e* η_1 *sono definite dalle* (4), (9) *e* (10).

13. — Possiamo trattare contemporaneamente il calcolo delle parti principali Δx e Δy delle variazioni delle coordinate del punto d'arrivo sul terreno corrispondenti a note variazioni o della grandezza della velocità iniziale ovvero della sua inclinazione. Indichino, perciò, λ uno dei parametri v o φ, e

$$v(\theta, \lambda) \qquad x(\theta, \lambda), \qquad y(\theta, \lambda)$$

i tre integrali delle (1) verificanti le (2), considerati al variare di λ.

L'angolo di inclinazione θ della traiettoria nel punto d'arrivo sarà una funzione di λ definita dall'equazione

$$y(\theta, \lambda) = h + \pi[x(\theta, \lambda)],$$

dalla quale si trae:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{g}{v^2(\theta)} \frac{\xi(\theta)\pi'(x) - \eta(\theta)}{\pi'(x) - \tan\theta},$$

ove le funzioni $\xi(\theta)$ e $\eta(\theta)$ sono gli integrali delle (5) verificanti le (V) ovvero le (φ).

Ne seguono, per le parti principali Δx e Δy delle variazioni delle coordinate del punto d'arrivo sul terreno, corrispondenti alla variazione $\Delta\lambda$ del parametro λ, le espressioni:

$$\Delta x = \frac{\eta(\theta) - \xi(\theta)\operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta\lambda\,,$$

$$\Delta y = \pi'(x)\,\frac{\eta(\theta) - \xi(\theta)\operatorname{tang}\theta}{\pi'(x) - \operatorname{tang}\theta}\,\Delta\lambda\,.$$

Riflettendo che

$$\pi'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

le due equazioni ora scritte equivalgono all'unica seguente:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta y - \operatorname{tang}\theta\,.\,\Delta x}{\eta(\theta) - \xi(\theta)\operatorname{tang}\theta}\,, \tag{16}$$

che può anche interpretarsi come *formola che fornisce la parte principale* $\Delta\lambda$ *della variazione del parametro* λ, *corrispondente alle variazioni* Δx *e* Δy *delle coordinate del segno, cioè, in prima approssimazione, la correzione da apportare al parametro* λ *in corrispondenza alle dette variazioni delle coordinate del segno.*

Distinguiamo ora i *due* significati che può avere λ.

14. — Indichi λ la grandezza V della velocità iniziale. Potremo, in prima approssimazione, porre nella (16),

$$\xi(\theta) = \xi_0(\theta)\,, \qquad \eta(\theta) = \eta_0(\theta)\,,$$

ove le funzioni $\xi_0(\theta)$ e $\eta_0(\theta)$ sono definite dalle (4), (9) e (11), potremo dunque affermare che:

La parte principale ΔV *della correzione da apportarsi alla grandezza* V *della velocità iniziale, corrispondentemente alle variazioni* Δx *e* Δy *delle coordinate del segno, è data dalla formola:*

$$\Delta V = \frac{\Delta y - \operatorname{tang}\theta\,.\,\Delta x}{W(\theta)}\,, \tag{17}$$

ove è

$$W(\theta) = \int_\varphi^\theta \frac{s(\tau) - r(\tau)\operatorname{tang}\theta}{P(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{g}\int_\varphi^\theta \frac{r^2(\tau)(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\tau)}{P(\tau)}\,d\tau\,, \tag{18}$$

e le funzioni r, s, P *sono definite dalle* (4) *e* (9).

15. — Indichi λ l'angolo φ di proiezione. Potremo, in prima approssimazione, porre nella (16)

$$\xi(\theta) = \xi_0(\theta), \qquad \eta(\theta) = \eta_0(\theta),$$

ove le funzioni $\xi_0(\theta)$ e $\eta_0(\theta)$ sono definite dalle (4), (9), (12) e (13), potremo pertanto affermare che:

La parte principale $\Delta\varphi$ della correzione da apportarsi all'angolo φ di proiezione, corrispondentemente alle variazioni Δx e Δy delle coordinate del segno è data dalla formola:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta y - \operatorname{tang}\theta \,.\, \Delta x}{\frac{V^2}{g}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta) - \Omega W(\theta)}, \tag{19}$$

ove la funzione W (θ) *è definita dalla* (18).

Porremo, per brevità,

$$\frac{V^2}{g}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta) = T(\theta). \tag{20}$$

16. — Le formole del Prof. Fubini. — Nella pratica del tiro occorre possedere la formola (17) per una tavola di tiro a carica fissa, e la formola (19) per una tavola di tiro ad angolo fisso. Ora il calcolo del termine $W(\theta)$ che compare nelle formole indicate può essere immediatamente compiuto, sia che si disponga di una tavola di tiro ad angolo fisso, sia che se ne disponga di una a carica fissa. Nel primo caso, infatti, dalle stesse tavole si desumono i rapporti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta V}, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta V},$$

rispettivamente per $\Delta x = 0$ e per $\Delta y = 0$, si desumono cioè le derivate parziali:

$$\frac{\partial y}{\partial V}, \qquad \frac{\partial x}{\partial V},$$

e la (17) dà:

$$W(\theta) = \frac{\partial y}{\partial V} = -\operatorname{tang}\theta\,\frac{\partial x}{\partial V}. \tag{21}$$

Ne segue:

Una valutazione approssimata dei coefficienti A *e* B, *di cui abbiamo parlato al n° 2, per il calcolo della correzione*

$$\Delta\varphi = A\,\Delta x + B\,\Delta y\,,$$

da apportarsi all'angolo di proiezione, ove si disponga di una tavola ad angolo fisso, corrispondentemente alle variazioni Δx *e* Δy *delle coordinate del segno, è fornita dalle formole:*

$$A \begin{cases} = \dfrac{-\operatorname{tang}\theta}{T(\theta) - \Omega\dfrac{\partial y}{\partial V}}, \\[2ex] = \dfrac{-\operatorname{tang}\theta}{T(\theta) + \Omega\dfrac{\partial x}{\partial V}\operatorname{tang}\theta}, \end{cases} \qquad B \begin{cases} = \dfrac{1}{T(\theta) - \Omega\dfrac{\partial y}{\partial V}}, \\[2ex] = \dfrac{1}{T(\theta) + \Omega\dfrac{\partial x}{\partial V}\operatorname{tang}\theta}, \end{cases}$$

ove la $T(\theta)$ *è definita dalla* (20) *e la costante* Ω *dalla* (12).

Nel caso che si disponga di una tavola a carica fissa, si trae da essa, come risulta dalla (19),

$$(22) \qquad W(\theta) = \frac{1}{\Omega}\left(T(\theta) - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{\Omega}\left(T(\theta) + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\theta\right),$$

e possiamo affermare che:

Una valutazione approssimata dei coefficienti A *e* B, *di cui abbiamo parlato al n° 2, per il calcolo della correzione:*

$$\Delta V = A\,\Delta x + B\,\Delta y\,,$$

da apportarsi alla grandezza della velocità iniziale, ove si disponga di una tavola a carica fissa, corrispondentemente alle variazioni Δx *e* Δy *delle coordinate del segno, è fornita dalle formole:*

$$A \begin{cases} = \dfrac{-\Omega\operatorname{tang}\theta}{T(\theta) - \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}, \\[2ex] = \dfrac{-\Omega\operatorname{tang}\theta}{T(\theta) + \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\theta}, \end{cases} \qquad B \begin{cases} = \dfrac{\Omega}{T(\theta) - \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}}, \\[2ex] = \dfrac{\Omega}{T(\theta) + \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\theta}, \end{cases}$$

ove la $T(\theta)$ *è definita dalla* (20) *e la costante* Ω *dalla* (12).

Sono queste le semplicissime formole dovute al Prof. Fubini.

17. — Semplificazioni per il calcolo di H. — La formola (18) e le considerazioni del n° precedente, forniscono notevoli semplificazioni per il calcolo del coefficiente di correzione H, non appena si disponga di una tavola di tiro ad angolo fisso o a carica fissa.

Nell'un caso e nell'altro possiamo, come si è visto, dire di conoscere la funzione $W(\theta)$ definita dalla (18). Ora derivando una prima volta la (18) rispetto a θ deduciamo:

$$g \cos^2\theta \frac{dW}{d\theta} = \int_\varphi^\theta \frac{v^2(\tau)}{P(\tau)} d\tau ,$$

e derivando una seconda volta:

$$g \frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta \frac{dW}{d\theta}\right) = \frac{v^2(\theta)}{P(\theta)} ,$$

da cui infine:

$$P(\theta) = -\frac{v^2(\theta)}{g \frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta \frac{dW}{d\theta}\right)} . \tag{23}$$

Ne concludiamo:

La funzione P(θ), *definita dalla* (9), *si desume, mediante calcolo di derivazione, dalle tavole di tiro.*

Abbiamo trovato, al n° 11,

$$H = -\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\theta}\left[\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\operatorname{tang}\theta\right],$$

ove, per le (10) del n° 8, è:

$$\xi_1(\theta) = -\int_\varphi^\theta \frac{r(\tau)}{P(\tau)} d\tau \int_\varphi^\tau P(\tau')q(\tau')d\tau' = -\int_\varphi^\theta P(\tau')q(\tau')d\tau' \int_{\tau'}^\theta \frac{r(\tau)}{P(\tau)} d\tau ,$$

$$\eta_1(\theta) = -\int_\varphi^\theta \frac{s(\tau)}{P(\tau)} d\tau \int_\varphi^\tau P(\tau')q(\tau')d\tau' = -\int_\varphi^\theta P(\tau')q(\tau')d\tau' \int_{\tau'}^\theta \frac{s(\tau)}{P(\tau)} d\tau ,$$

ne segue:

$$\eta_1(\theta) - \xi_1(\theta)\operatorname{tang}\theta = -\int_\varphi^\theta P(\tau')\, q(\tau')\, d\tau' \int_{\tau'}^\theta \frac{s(\tau) - \operatorname{tang}\theta \,.\, r(\tau)}{P(\tau)} d\tau =$$

$$= \int_\varphi^\theta P(\tau)\, q(\tau)\, [W(\tau) - W(\theta)]\, d\tau .$$

Possiamo dunque dire che:

Per il calcolo del coefficiente H di correzione nelle variazioni dell'altitudine balistica dell'origine, si può adottare l'espressione:

$$(24) \qquad H = -\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\theta}\int_{\varphi}^{\theta} P(\tau)\, q(\tau)\,[W(\tau) - W(\theta)]\, d\tau\,,$$

ove la funzione W (θ) *è definita dalla* (21) *ovvero dalla* (22), *secondo che si dispone di una tavola ad angolo fisso o a carica fissa, la funzione* P (θ) *dalla* (23) *e la* q (θ) *dalla seconda delle* (4).

Per la valutazione, anche approssimata, del coefficiente H, occorre dunque, secondo la formola (24), conoscere alcuni integrali approssimati del sistema (1) verificanti le (2). Questa non è una ragione, parmi, per ripudiare l'introduzione, nella pratica compilazione delle tavole di tiro, della formola (24) per il calcolo di H, poichè (cfr., per esempio, la mia Nota citata al n° 2) ogni seria compilazione di una tavola di tiro non può essere fondata che sulla preliminare conoscenza di parecchi integrali del sistema (1), conseguita e col calcolo e coll'esperienza. E d'altra parte, sono attualmente oggetto di studio da parte del Prof. Fubini, nuovi metodi di calcolo approssimato degli integrali del sistema (1), i quali metodi, senza far rinunziare alla necessaria esattezza, raggiungono lo scopo colla più insperata rapidità (*).

§ 5. — Quadro riassuntivo per i calcoli numerici.

x, distanza orizzontale, in metri, fra batteria e bersaglio,

y, dislivello, in metri, fra batteria e bersaglio,

θ, angolo di inclinazione, in radianti, della traiettoria nel punto d'arrivo,

v, grandezza della velocità d'arrivo, in metri al secondo,

i, coefficiente di forma del proietto, corrispondente alla funzione resistente di Siacci,

C, coefficiente balistico (di Siacci) del proietto,

$F(v)$, funzione resistente di Siacci,

(*) Cfr., in proposito, le due Note del Colonnello Bianchi citate al n° 2.

V, grandezza della velocità iniziale, in metri al secondo,
φ, angolo di proiezione, in radianti,
h, altitudine balistica, in metri, della batteria,
δ, valore medio della densità balistica dell'aria all'altitudine $h+y$ sul livello del mare,
g, accelerazione di gravità, in metri al secondo, al secondo.

$$T(\theta)=\frac{V^2}{g}(\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}\theta),$$

$$q(\theta)=\frac{i}{gC}\,\frac{vF(v)}{\cos\theta},$$

$$\Omega=V\operatorname{tang}\varphi+\frac{i\delta(h)}{gC}\,\frac{VF(V)}{\cos\varphi},$$

si dispone di una tavola ad angolo fisso,

$$W(\theta)=\frac{\Delta y}{\Delta V},\ \text{per } x \text{ costante},$$

$$=-\frac{\Delta x}{\Delta V}\operatorname{tang}\theta,\ \text{per } y \text{ costante},$$

$$A=\frac{-\operatorname{tang}\theta}{T(\theta)-\Omega W(\theta)},$$

$$B=\frac{1}{T(\theta)-\Omega W(\theta)},$$

$$\Delta\varphi=A\,\Delta x+B\,\Delta y,$$

$$\left.\begin{aligned}M(\theta)&=\frac{\Delta W}{\Delta\operatorname{tang}\theta}\\ N(\theta)&=g\,\frac{\Delta M}{\Delta\theta}\end{aligned}\right\}\ \text{per } V \text{ costante},$$

si dispone di una tavola a carica fissa,

$$W(\theta)=\frac{1}{\Omega}\left(T(\theta)-\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\right),\ \text{per } x \text{ costante},$$

$$=\frac{1}{\Omega}\left(T(\theta)+\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\operatorname{tang}\theta\right),\ \text{per } y \text{ costante},$$

$$A=-\frac{\operatorname{tang}\theta}{W(\theta)},$$

$$B=\frac{1}{W(\theta)},$$

$$\Delta V=A\,\Delta x+B\,\Delta y,$$

$$\left.\begin{aligned}M(\theta)&=\frac{\Delta W}{\Delta\operatorname{tang}\theta}\\ N(\theta)&=g\,\frac{\Delta M}{\Delta\theta}\end{aligned}\right\}\ \text{per } \varphi \text{ costante},$$

$$P(\theta)=\frac{v^2(\theta)}{N(\theta)},$$

$$H=-\frac{0{,}0^4 8}{\operatorname{tang}\theta}\int_\varphi^\theta P(\tau)\,q(\tau)\,[W(\tau)-W(\theta)]\,d\tau,$$

$$\Delta x=H\Delta h,\ \text{per } y \text{ costante}.$$

Torino, 14 febbraio 1917.

Per una edizione nazionale di Tavole di Logaritmi.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

È noto che quasi tutte le tavole di logaritmi a *sette decimali* che si adoperano e si sono adoperate finora in Italia sono di provenienza tedesca e nessun editore italiano ha mai pensato a stamparne una, perchè quelle che venivano dalla Germania, mentre erano comodissime sotto tutti gli aspetti, erano vendute ad un prezzo modesto ed accessibile a tutte le borse.

Allo scoppiare della guerra immane, in Italia ci siamo trovati sprovvisti di questo così utile strumento non solo nelle scuole secondarie, ma anche nei Politecnici, nelle Università ed in tutti gli uffici dove si fanno calcoli numerici.

Ne è venuto quello che era logico aspettarsi: *le tavole di logaritmi tedesche vengono in Italia attraverso la Svizzera.*

Ho qui nelle mie mani il nuovo *Manuale logaritmico-trigonometrico* del Dott. C. Bruhns, edito dalla Casa editrice Tauchnitz di Lipsia prima del 1870 e quindi ripetutamente pubblicato in diverse edizioni, con prefazione scritta nella lingua del paese in cui si smerciava. Durante la guerra questo manuale è stato privato della prefazione di Bruhns, che era Direttore dell'Osservatorio astronomico di Lipsia e Professore di Astronomia in quella Università, e mandato in Italia col titolo:

Nuovo manuale logaritmico-trigonometrico con sette decimali del Dott. C. Bruhns *Professore di Astronomia e Direttore di Osservatorio. Per gli Istituti tecnici ed Agrari secondari e superiori del Cantone Ticino e del Regno d'Italia* (Lugano, Casa Editrice Libraria, 1916).

Proprio così: il nome di Lipsia è sparito perchè Lipsia è in Germania!

Il prezzo del libro nella Svizzera è di lire *cinque* e *cinquanta centesimi*; in Italia è di *otto lire.*

Io mi domando se è ancora tollerabile questa dipendenza dallo straniero per libri che non sono più frutto dell'ingegno, ma sono vere speculazioni librarie fatte da editori accorti.

Non si potrebbe fare in Italia una *Edizione nazionale di tavole di logaritmi* stampata a spese del Ministero della Pubblica Istruzione e venduta a tutti gli alunni delle Scuole del Regno?

La mia proposta non è fantastica, essa non è dettata da altro che dal desiderio di emanciparci dallo straniero, ed anche dalla convinzione che questa *Edizione nazionale di tavole di logaritmi* sia per il Governo una fonte perenne di lucro.

Ecco come si dovrà eseguire l'impresa.

Si farà una Tavola di logaritmi dei numeri e delle funzioni trigonometriche a *sette decimali* sul tipo di quelle esistenti di *Bruhns*, *Vega*, *Bremiker*, *Callet* ed altri per i calcolatori di professione e per gli alunni delle Università, delle Scuole d'Ingegneri, dei Politecnici, degli Istituti tecnici e delle Scuole commerciali.

Un'altra tavola di logaritmi dei numeri e delle funzioni trigonometriche a *cinque decimali*, e quindi di formato più piccolo per gli alunni dei Licei, dei Collegi militari, ecc. e di tutte quelle persone che non debbono fare calcoli di precisione.

I due tipi sarebbero scelti da una Commissione composta di *poche persone tecniche* (*).

Questi due tipi di *Tavole di logaritmi* dovrebbero essere le sole permesse in tutte le scuole d'Italia e vietata l'introduzione nel Regno di ogni altra tavola di logaritmi da qualunque paese straniero essa provenga.

In Italia abbiamo N. 140 *Licei*, 65 Istituti tecnici, 19 Istituti nautici, 2 Collegi militari, 7 tra Politecnici e Scuole d'Ingegneri, 14 Università, Scuole di commercio, etc.

In tutti questi istituti d'istruzione, dove più e dove meno, si adoperano tavole di logaritmi. Facendo un calcolo approssimato non è esagerato l'asserire che in Italia possono ogni anno essere vendute circa *diecimila* tavole di logaritmi a 7 decimali e circa *seimila* tavole di logaritmi a 5 decimali. Questa vendita

(*) Codesta Commissione potrà anche esaminare ed utilizzare quelle tavole a cinque decimali, pubblicate da qualche Ente per uso proprio, o da qualche benemerito Professore e già adoperate in qualche Liceo.

produrrebbe sicuramente un reddito netto al Governo di 60 mila lire all'anno.

La spesa per pubblicare questi due volumi può ascendere, tenendo conto del compenso che dovrebbe darsi alle persone che dovrebbero essere incaricate per la correzione esatta delle bozze di stampa, al massimo, a lire *quarantamila*.

Io mi appello a tutti i Colleghi professori di matematica dei Licei, degl'Istituti tecnici, dei Politecnici ed a tutti coloro che usano tavole di logaritmi negli uffici governativi e privati e li prego di accogliere questa mia proposta, colla quale io intendo di emancipare l'Italia da questa *servitù*, che è davvero umiliante.

Se il Governo, e per esso il Ministero della Pubblica Istruzione, non crede di fare a sue spese la pubblicazione di tali Tavole, potrà cercarsi e si troverà certamente un editore (e gli editori coraggiosi ed accorti non mancano nel nostro paese) il quale potrà accingersi ad una tale pubblicazione. Sarà sufficiente che codesto editore sia sicuro del *veto* governativo alla introduzione nelle Scuole del Regno d'Italia di ogni pubblicazione estera di tal genere.

Non chiedo troppo! io ho additato al Governo uno dei tanti piccoli rigagnoli di cui si serve lo *straniero* per infiltrarsi nel nostro paese, per toglierci il nostro oro a piccole dosi, per poi poter dire che noi non siamo buoni a nulla e per dare occasione ai nemici interni di gridare alla nostra inferiorità (*).

(*) Ho fiducia della benevola accoglienza della mia proposta, sapendo già che molti professori di scuole secondarie sono del mio parere. In un articolo del prof. G. Pesci, avente per titolo *Studio comparativo sulle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche*, che trovasi nel "Supplemento al Periodico di Matematica" (fascicolo marzo-aprile), 1912, il chiaro autore, augurando la pubblicazione di una nuova Tavola di logaritmi, dice: *Cesserebbe così un ingiustificabile ricorso all'estero, che è una specie di vassallaggio scientifico e industriale umiliante e dannoso: umiliante, perchè pare che noi non si sia capaci di fare quanto gli altri fanno; dannoso, perchè, in fin dei conti, è sempre danaro che esce d'Italia per avvantaggiare e nutrire officine non italiane.*

Approssimazioni numeriche.

Nota I del Socio G. PEANO.

La teoria delle approssimazioni numeriche, così importante in pratica, si trova sviluppata in varii libri appositi, e forma un capitolo di numerosi libri di Aritmetica ad uso delle scuole.

I concetti su cui si opera sono semplici, e appartengono all'aritmetica elementare; la difficoltà sta nell'esposizione. Il simbolismo algebrico, sufficiente per le funzioni continue, qui si mostra insufficiente; poichè le cifre di un numero, su cui dobbiamo operare, sono funzioni discontinue del numero.

L'esposizione acquista in brevità e chiarezza, se si considerano i numeri approssimati quali intervalli di numeri.

NOTAZIONI.

Siano a, b, ... delle classi. Allora

" $x \epsilon a$ " indica la proposizione singolare " x è un a ".
" $a \supset b$ " " " universale " ogni a è b ",
o " la classe a è contenuta in b ".
" $a = b$ " indica l'identità delle due classi, cioè $a \supset b$ e $b \supset a$.
" $a \cap b$ " indica la classe comune alle a e b.

In Aritmetica si presentano le classi:

N = numero naturale, o numero della serie 1, 2, 3, ...
N_0 = numero della serie 0, 1, 2, ...
n = numero intero positivo o negativo o nullo.
Q = quantità numerica reale, o numero reale positivo.
Q_0 = quantità numerica positiva o nulla.
q = numero reale positivo, o nullo, o negativo.

In conseguenza, se a è un numero intero, $a + \mathrm{N}$ indica " gli interi maggiori di a „; $a + \mathrm{N}_0$ indica " gli interi da a in poi „; $a - \mathrm{N}$ indica " gli interi minori di a „.

Se a è una quantità numerica (cioè se $a \epsilon \mathrm{q}$), allora

$$a + \mathrm{Q} = \text{quantità maggiore di } a,$$
$$a - \mathrm{Q} = \text{quantità minore di } a.$$

È uso comune di indicare le tre relazioni ϵ, $\supset$, $=$ col solo segno $=$; e si distingue il suo valore aggiungendo alle formule le parole " qui l'eguaglianza è esatta; qui è approssimata „, e spiegando la natura dell'approssimazione. L'introduzione dei segni ϵ e $\supset$ produce notevole semplificazione.

§ 1. — Intervalli.

1. $a, b \epsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\supset.\, a^{-}b = (a + \mathrm{Q}) \frown (b - \mathrm{Q})$ Def.

" Se a e b sono quantità, e se a è minore di b, allora con $a^{-}b$, che si legge " l'intervallo da a a b „, si intende la classe dei numeri maggiori di a e minori di b „.

" Interv' q „, che si legge " intervallo di quantità reali „ si intende ogni intervallo $a^{-}b$, ove a e b sono q.

" Interv' Q „, che si legge " intervallo di quantità positive „, si intende ogni intervallo $a^{-}b$, ove a e b sono positivi.

Quando coll'intervallo conviene considerare gli estremi, si pone:

$$a^{\vdash}b = (a + \mathrm{Q}_0) \frown (b - \mathrm{Q})$$
$$a^{\dashv}b = (a + \mathrm{Q}) \frown (b - \mathrm{Q}_0)$$
$$a^{\vdash\!\dashv}b = (a + \mathrm{Q}_0) \frown (b - \mathrm{Q}_0).$$

Se x è un intervallo di numeri reali " $\mathrm{l}'x$ „ indica il suo limite superiore, e $\mathrm{l}_1 x$ ne è il limite inferiore; e si ha:

2. $a, b \epsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\supset.\, \mathrm{l}_1(a^{-}b) = a \,.\, \mathrm{l}'(a^{-}b) = b,$

cioè l'intervallo da a a b, essendo $a < b$, ha per limite inferiore a, e per limite superiore b. Si pone poi:

3. $x \epsilon \text{Interv' q} \,.\supset.\, \mathrm{d}x = \mathrm{l}'x - \mathrm{l}_1 x$ Def.

" Se x è un intervallo di quantità, dx, che si può leggere il differenziale di x, o ampiezza dell'intervallo x, si può esprimere coi simboli precedenti, o definire, colla proposizione scritta ".

I simboli ora considerati, sono presi dal mio " Formulario Mathematico " (edizione 5ª), salvo l'ultimo, introdotto in una Nota collo stesso titolo precedente, pubblicata nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", 2 gennaio 1916.

Esempi. — Useremo l'abbreviazione del tipo:

$$1{\cdot}23.. = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}24,$$

cioè con 1·23.. si intende ogni numero le cui prime cifre sono quelle scritte, e le altre sono qualunque. Si ha:

$$1/3 \;\epsilon\; 0{\cdot}666..$$
$$1{\cdot}234.. \supset 1{\cdot}23..$$
$$\mathrm{l}_1\, 3{\cdot}14.. = 3{\cdot}14$$
$$\mathrm{l}'\, 3{\cdot}14.. = 3{\cdot}15$$
$$\mathrm{d}\, 3{\cdot}14.. = 1/100.$$

Adotto il punto decimale 1·23, conformemente all'uso inglese, invece della virgola decimale 1,23; poichè quel punto decimale non ha in matematica nessun altro significato; invece la virgola ha più significati, fra cui quello di coppia; così $(0,1)^2$ ora rappresenta 1/100, ora la coppia dei numeri 0 e 1, su cui si faccia un'operazione indicata colla forma di quadrato; p. es. $(0+i)^2$. La notazione del punto decimale è anche diffusa fra noi; oltre che nel mio " Formulario ", si trova nelle tavole logaritmiche del Luvini.

Trattandosi di numeri interi, sarà utile nel § 3 la notazione:

4. $a, b \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\, a < b \,.\supset .\, a \cdots b = (a + \mathrm{N}_0) \frown (b - \mathrm{N}_0)$ Def.

" Se a e b sono numeri interi, positivi o negativi, con $a \cdots b$ si intende ogni numero intero maggiore o eguale ad a, e minore od eguale a b ". E $b \cdots a$ è lo stesso che $a \cdots b$.

§ 2. — Somma.

1. $a, a', b \varepsilon \mathrm{q} . a < a' . \supset . (a^{-}a') + b = (a + b)^{-}(a' + b)$.

2. $a, a', b, b' \varepsilon \mathrm{q} . a < a' . b < b' . \supset . (a^{-}a') + (b^{-}b') = (a + b)^{-}(a' + b')$.

" Dato l'intervallo $a^{-}a'$, ove $a < a'$, i numeri che lo costituiscono, sommati con b, formano l'intervallo da $a + b$ ad $a' + b$ „.

" E sommando tutti i numeri dell'intervallo da a ad a' coi numeri dell'intervallo da b a b' si ottiene l'intervallo da $a + b$ ad $a' + b'$ „.

Esempi: $2 + 3{\cdot}14.. = 5{\cdot}14..$
$1{\cdot}41.. + 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}64^{\vdash}3{\cdot}66$.

Indicando con una lettera gli intervalli. le proposizioni 1 e 2 assumono la forma:

3. $a \varepsilon \mathrm{q} . x \varepsilon \mathrm{Interv'}\, \mathrm{q} . \supset . \mathrm{l}_1 (a + x) = a + \mathrm{l}_1 x .$
$\mathrm{l}' (a + x) = a + \mathrm{l}' x . \mathrm{d} (a + x) = \mathrm{d} x$.

4. $x, y \varepsilon \mathrm{Interv'}\, \mathrm{q} . \supset . \mathrm{l}_1 (x + y) = \mathrm{l}_1 x + \mathrm{l}_1 y .$
$\mathrm{l}' (x + y) = \mathrm{l}' x + \mathrm{l}' y .$
$\mathrm{d} (x + y) = \mathrm{d} x + \mathrm{d} y$.

Quest'ultima proposizione si può leggere " se x e y sono intervalli di quantità numeriche, allora il limite inferiore della loro somma vale la somma dei loro limiti inferiori; così pei limiti superiori; e il differenziale della somma è la somma dei differenziali „.

Ovvero " dati due numeri approssimati x e y, allora il valore per difetto della loro somma vale la somma dei loro valori per difetto: così per i valori per eccesso; e l'errore nella somma vale la somma degli errori dei termini „.

Questa prima regola sulla somma dei numeri approssimati è tanto semplice, che sarebbe difficile il dire chi prima l'abbia usata. La sua enunciazione esplicita si trova in Gauss (1): " Si

(1) Gauss, *Theoria motus*, a. 1809, n. 31.

plures quantitates intra certos tantum limites exactae adduntur, aggregati error maximus aequalis erit aggregato singulorum errorum maximorum „. Questo enunciato è riprodotto in molti libri; l'errore massimo è il nostro d, e la proposizione significa $d(x+y) = dx + dy$.

§ 3. — X, V, 1·23....

X = dieci; così indico con un segno solo la base della nostra numerazione.

Se a è una quantità positiva, con Va indico il valore intero (o parte intera) di a. Quindi:

1. $a \varepsilon Q . \supset . Va \leqq a < Va + 1.$

Se a è una quantità positiva, e se n è un numero intero positivo o negativo, $V_n a$ è il “ valore con n decimali di a „, e si può definire così:

2. $a \varepsilon Q . n \varepsilon n . \supset . V_n a = X^{-n} V(X^n a)$ Def.

Esempi:

$V_2 \sqrt{2} = 1·41$, $V_3 (2/3) = 0·666$, $V_{-1} 1234 = 1230$, $V_0 a = Va$.

$x \varepsilon 1·23... = . V_2 x = 1·23.$

Esempio numerico.

Vuolsi calcolare $s = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$. Si dispone il calcolo così:

1/1	= 1 · 0 0 0 0 0
1/2	= 0 · 5 0 0 0 0
V_5(1/3)	= 0 · 3 3 3 3 3
1/4	= 0 · 2 5 0 0 0
1/5	= 0 · 2 0 0 0 0
V_5(1/6)	= 0 · 1 6 6 6 6
V_5(1/7)	= 0 · 1 4 2 8 5
1/8	= 0 · 1 2 5 0 0
V_5(1/9)	= 0 · 1 1 1 1 1
1/10	= 0 · 1 0 0 0 0
	2 · 9 2 8 9 5

I termini 1/3, 1/6, 1/7, 1/9 sono maggiori del loro valore con 5 decimali; quindi $s > 2·92895$; essi poi sono minori del loro valore con 5 decimali, aumentati di un'unità dell'ultimo ordine; sicchè

$$s < 2·92895 + 4 \times X^{-5},$$

cioè $s < 2·92899$. Si conchiude

$$s \varepsilon 2·9289.., \text{ o } V_4 s = 2·9289.$$

Prendendo invece i termini con 6 cifre decimali, si trova $s > 2·928967$

e $s < 2{\cdot}928971$. Si potrebbero sopprimere le ultime due cifre diverse, e scrivere $s \in 2{\cdot}9289..$ come prima, in cui il calcolo era più breve. Ma in pratica conviene conservare la penultima cifra. Perciò usiamo la notazione:

$$1{\cdot}23.... = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}25,$$

cioè con $1{\cdot}23$ seguito da 4 punti indico l'intervallo compreso fra il numero scritto, ed esso aumentato di 2 unità dell'ultimo ordine. Vedasi la mia Nota *Valori decimali abbreviati e arrotondati*, " R. Acc. di Torino ", 14 gennaio 1917.

Si scriverà quindi:

$$s \in 2{\cdot}92896....,$$

ovvero:

$$V_5\, s \in 2{\cdot}92896 + (0 \cdots 1)\, X^{-5}.$$

Sono facili a dedursi le regole seguenti:

3. $m \in 2 + \dot{N}_0 \,.\, a \in \mathrm{QF}\, 1 \cdots m \,.\, n \in \mathrm{n} \,.\supset .\, \Sigma a \in \Sigma V_n a + (0 \vdash m)\, X^{-n}.$

" Se m è un numero eguale o maggiore di 2, e se a è una successione di m quantità, cioè se $a_1\, a_2 \ldots a_m$ sono quantità, e se n è un numero intero positivo o negativo, allora la somma degli a vale la somma dei valori con n decimali di a, aumentata di un numero dell'intervallo $0 \vdash m$, moltiplicato per l'unità dell'ultimo ordine decimale ".

Riporto qui le altre proposizioni contenute nella detta Nota.

Nell'ipotesi della 3 si ha:

4. $V_n \Sigma a \in \Sigma V_n a + [0 \cdots (m-1)]\, X^{-n}.$

5. $V_{n-1} \Sigma a \in V_{n-1} \Sigma V_n a + (0 \cdots V\, [(m+8)/10])\, X^{-n+1}.$

6. $m \in 2 \cdots 11 \,.\supset .\, V_{n-1} \Sigma a \in V_{n-1} \Sigma V_n a + (0 \cdots 1)\, X^{-n+1}.$

7. $m \in 2 \cdots 101 \,.\supset .\, V_{n-2} \Sigma a \in V_{n-2} \Sigma V_n a + (0 \cdots 1)\, X^{-n+2}.$

§ 4. — Differenza.

1. $a, b, a', b' \in \mathrm{q} \,.\, a < a' \,.\, b < b' \,.\supset .\, (a \bar{\ } a') - (b \bar{\ } b') = (a - b') \bar{\ } (a' - b).$

2. $x, y \in \mathrm{Interv'}\, \mathrm{q} \,.\supset .\, \mathrm{l}_1 (x - y) = \mathrm{l}_1 x - \mathrm{l}' y \,.\, \mathrm{l}' (x - y) = \mathrm{l}' x - \mathrm{l}_1 y \,.$
$\mathrm{d}(x - y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$

Esempio: Calcolare $s = 1/1 - 1/2 + 1/3 - ... + 1/9 - 1/10$. Dispongo il calcolo così:

	$1/1 =$	$1 \cdot 000\ 000$
$-$	$1/2 =$	$-\ 0 \cdot 500\ 000$
$+ V_6$	$(1/3) =$	$0 \cdot 333\ 333$
$-$	$1/4 =$	$-\ 0 \cdot 250\ 000$
$+$	$1/5 =$	$0 \cdot 200\ 000$
$- V_6$	$(1/6) =$	$-\ 0 \cdot 166\ 666$
$+ V_6$	$(1/7) =$	$0 \cdot 142\ 857$
$-$	$1/8 =$	$-\ 0 \cdot 125\ 000$
$+ V_6$	$(1/9) =$	$0 \cdot 111\ 111$
$-$	$1/10 =$	$-\ 0 \cdot 100\ 000$
		$0 \cdot 645\ 635$

Per fare questa somma di termini in parte positivi e in parte negativi, sommo le ultime cifre: $3 - 6 + 7 + 1 = 5$, che scrivo alla somma. Poi considero le cifre di posto 5, cioè $3 - 6 + 5 + 1 = 3$; quelle di posto 4, cioè $3 - 6 + 8 + 1 = 6$; quelle di posto 3, cioè $3 - 6 + 2 - 5 + 1 = -5$, scrivo 5, e riporto -10 unità di posto 3, cioè -1 di posto 2, e così via.

Se ora aumento di 1 unità di ultimo ordine il termine negativo 1/6, trovo $s > 0 \cdot 645634$; e aumentando di 1 unità i termini positivi corrispondenti 1/3, 1/7, 1/9, ho $s < 0 \cdot 645638$; conchiudo $V_5\, s = 0 \cdot 64563$.

§ 5. — **Prodotto.**

Si hanno le proposizioni:

1. $a, a', b \,\varepsilon\, Q \,.\, a < a' \,.\, \text{ɔ} \,.\, (a^{-}a') \times b = (a \times b)^{-}(a' \times b).$

2. $a, a', b, b' \,\varepsilon\, Q \,.\, a < a' \,.\, b < b' \,.\, \text{ɔ} \,.\, (a^{-}a') \times (b^{-}b') = (a \times b)^{-}(a' \times b').$

Indicando con una lettera l'intervallo, si ha:

3. $a \,\varepsilon\, Q \,.\, x \,\varepsilon\, \text{Interv'}\, Q \,.\, \text{ɔ} \,.\, l_1 (a \times x) = a \times l_1 x \,.\, l' (a \times x) = a \times l' x \,.$
$\text{d}\,(a \times x) = a \times \text{d} x.$

4. $x, y \,\varepsilon\, \text{Interv'}\, Q \,.\, \text{ɔ} \,.\, l_1 (x \times y) = l_1 x \times l_1 y \,.\, l' (x \times y) = l' x \times l' y.$

5. $x, y \,\varepsilon\, \text{Interv'}\, Q \,.\, \text{ɔ} \,.\, \text{d}\,(x \times y) = l_1 x \times \text{d} y + l' y \times \text{d} x.$

Quest'ultima esige una breve dimostrazione:

$$\text{d}\,(x \times y) = l' (x \times y) - l_1 (x \times y) = (l' x) \times (l' y) - (l_1 x) \times (l_1 y) =$$
$$l_1 x \times (l' y - l_1 y) + l' y \times (l' x - l_1 x) = l_1 x \times \text{d} y + l' y \times \text{d} x.$$

Questa proposizione si può scrivere:

$$d(x \times y) > l_1 x \times dy + l_1 y \times dx ,$$
$$d(x \times y) < l' x \times dy + l' y \times dx ,$$

e anche:

6. $x, y \,\epsilon\, \text{Interv' Q} . \supset . \, d(x \times y) \,\epsilon\, x \times dy + y \times dx ,$

che è simile alla regola di derivazione di un prodotto di funzioni.

Si può anche scrivere:

$$\frac{d(x \times y)}{x \times y} \supset \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} ,$$

ed è enunciata in alcuni libri sotto la forma " l'errore relativo del prodotto è minore della somma degli errori relativi dei fattori "; altri libri dicono " l'errore relativo del prodotto è maggiore della somma degli errori relativi "; altri dicono che è " eguale "; altri ancora che è " sensibilmente eguale ".

Esempio:

$$V_2 \sqrt{2} = 1{\cdot}41 , \quad V_2 \sqrt{5} = 2{\cdot}23 ;$$
$$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}1443 \vdash 3{\cdot}1808 .$$

A questo intervallo prodotto apparterrà certamente $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$; ma $V_4 \sqrt{10} = 3{\cdot}1622$; perciò direbbe tre cose non vere chi affermasse che le 4 cifre di $1{\cdot}41 \times 2{\cdot}23$ siano quelle di $\sqrt{10}$. E calcolando i limiti del prodotto, si vede che si è fatto un calcolo troppo lungo di tre cifre.

Per calcolare le cifre del prodotto di due numeri approssimati, conviene eseguire la moltiplicazione graduale, che esporremo nel § 7.

§ 6. — C (cifra), ord (ordine).

Se a è un numero reale positivo, e r un intero, positivo o negativo, allora $C_r a$ indica la " cifra di ordine r di a ", e si può definire coi simboli precedenti:

1. $a \,\epsilon\, \text{Q} . r \,\epsilon\, \text{n} . \supset . C_r a = \text{V}(\text{X}^{-r} a) - \text{XV}(\text{X}^{-r-1} a) .$

La cifra d'ordine $-r$ dicesi anche " cifra decimale d'ordine r ".

Dicesi " ordine del numero a ", e si indica con " ord a " l'ordine della sua prima cifra, andando da sinistra a destra, che è diversa da zero.

Si ha:

2. $$a \epsilon Q . \supset . X^{\text{ord}\, a} \leqq a < X^{\text{ord}\, a+1}.$$

Il numero a si può esprimere mediante le sue cifre:

3. $$a = \Sigma [C_r a \times X^r | r, n]$$

a è la somma dei termini della forma $C_r a \times X^r$, ove r varia e assume tutti i valori interi, positivi e negativi. Il simbolo $|r$ si legge " variando r ", ed è definito nel " Formulario ". Questa serie però è a sinistra limitata, e si può scrivere:

4. $$a = \Sigma [C_r a \times X^r | r, \text{ord}\, a - N_0].$$

5. $$n \epsilon n . \supset . V_n a = \Sigma [C_r a \times X^r | r, (\text{ord}\, a)^{\cdots} (-n)].$$

§ 7. — Prodotto graduale $a \times_n b$.

Date due quantità numeriche a e b, espresse mediante le cifre:

$$a = \Sigma\, C_r\, a \times X^r \qquad \text{e} \qquad b = \Sigma\, C_s\, b \times X^s,$$

con $a \times_n b$, che si legge " prodotto di grado decimale n dei numeri a e b ", si intende la somma di tutti i prodotti dei termini di a pei termini di b, cioè $\Sigma\, C_r\, a \times C_s\, b \times X^{r+s}$, ove r e s sono numeri interi, positivi o negativi, la cui somma $r + s$ sia maggiore o eguale a $-n$:

1. $$a, b \epsilon Q . n \epsilon n . \supset . a \times_n b =$$
$$\Sigma [C_r a \times C_s b \times X^{r+s} | (r, s), (r, s) \ni (r, s \epsilon n . r + s \geqq -n)] \quad \text{Def.}$$

Si può supporre che $r \epsilon \text{ord}\, a - N_0$ e $s \epsilon \text{ord}\, b - N_0$, altrimenti i termini sono nulli.

Scompongo questa somma a due indici nella successione di due somme, prima rispetto r, poi rispetto s, ed ho:

2. Nelle ipotesi della 1 . ↄ .

$$a \times_n b = \Sigma\, (V_{n+s}\, a \times C_s\, b \times X^s \,|\, s, n).$$

Si può supporre che s varii solo da ord b a — ord a — n, per avere i termini non nulli.

Colla regola 2 si fa la moltiplicazione graduale, mediante i *prodotti parziali* $V_{n+s}\, a \times C_s\, b \times X^s$.

Oppure si possono raccogliere i termini della prop. 1, a seconda del loro grado in X; cioè secondo i valori di $m = r + s$.

3. Nell'ipotesi della 1 . ↄ .

$$a \times_n b = \Sigma\, [\Sigma\, (C_r\, a \times C_{m-r}\, b \,|\, r, n)\, X^m \,|\, m, -n + N_0].$$

La somma rispetto r si può anche limitare fra ord a e e m — ord b, e quella rispetto ad m si può limitare fra — n e ord a + ord b.

La moltiplicazione colla regola 3 fu detta dai matematici indiani del 600, la *fulminea*, in sanscrito Vajrābhyāsa (2).

Si trova in Leonardo Pisano del 1202, e fu di nuovo consigliata, e quasi ritrovata, da Fourier (3), che la chiamò moltiplicazione ordinata. Altri la dissero simmetrica.

Se i numeri a e b hanno un numero finito di cifre decimali, e se n è maggiore o eguale alla somma di questi numeri di cifre, allora il prodotto graduale di a e b è il loro prodotto ordinario. Altrimenti è un prodotto abbreviato, il cui limite per n infinito è il prodotto vero. Esso però è abbreviato in modo speciale,

---

(2) La lettera trascritta *j* vale italiano *g* di *ge*; la *y* vale italiano *j*. Questa parola è composta di *vajra* = *fulmine*, e *abhyāsa* = *moltiplicazione*; così il dizionario del Böhtlingk. La parola *abhyāsa* poi è composta di *abhi* = *sopra*, e *as* = *gettare*, con un suffisso di azione -*a*. Sicchè *abhy-as-a* = *multi-plica-tio*. Alcuni storici della matematica traducono " Vajrābhyāsa " in " blitzbildend ", il che non parmi fedele.

(3) Fourier, *Analyse des équations déterminées*, Paris, 1831.

cioè secondo il grado dei termini; chiamandolo semplicemente *prodotto abbreviato*, c'è pericolo di confonderlo con altri prodotti abbreviati, e precisamente con $V_n a \times V_n b$, che si considera in matematica elementare. E si deve distinguere da $V_n (a \times b)$, valore abbreviato ad n decimali del prodotto. Perciò preferisco dirlo *graduale*.

4. $$a \times_n b = b \times_n a,$$

cioè il prodotto graduale è commutativo. Risulta dalla definizione. Esso non è sempre distributivo rispetto alla somma; così

$$1{\cdot}7 \times_1 1{\cdot}1 = 1{\cdot}8, \quad 1{\cdot}8 \times_1 1{\cdot}1 = 1{\cdot}9 \quad \text{e} \quad (1{\cdot}7 + 1{\cdot}8) \times_1 1{\cdot}1 = 3{\cdot}8,$$

che supera di 0·1 la somma 1·8 e 1·9. E non è sempre associativo.

5. $$p, q \in \mathrm{n} \,.\, \supset \,.\, (X^p a) \times_n (X^q b) = X^{p+q} (a \times_{n+p+q} b),$$

cioè moltiplicando i due fattori per le potenze p e q di dieci, anche il prodotto graduale è moltiplicato per la potenza $p + q$ di dieci, ma il suo grado passa da n ad $n + p + q$.

§ 8. — Differenza fra prodotto ordinario e prodotto graduale.

In pratica, espressi in cifre i fattori a e b, si prende a con alcune cifre decimali, b con altre decimali, e di questi valori abbreviati si fa il prodotto graduale d'ordine n. Moltiplicando i fattori per convenienti potenze di dieci, possiamo ridurci a calcolare $a \times b - (V_n a) \times_n (V_n b)$.

Pongo $M_n a$, che si legge " mantissa d'ordine n di a " invece di $a - V_n a$, cioè:

1. $$a \in Q \,.\, n \in \mathrm{n} \,.\, \supset \,.\, M_n a = a - V_n a \qquad \text{Def.}$$

Si ha:

$$M_n a < X^{-n}.$$

2. $$a, b \in Q \,.\, n \in N \,.\, \supset \,.\, a \times b - V_n a \times_n V_n b =$$
$$a \times M_n b + V b \times M_n a + \Sigma (M_{n-s} a \times C_{-s} b \times X^{-s} \mid s, 1 \cdots n).$$

Infatti, $a \times b$ è la somma dei prodotti $\Sigma C_{-r} a \times C_{-s} b \times X^{-r-s}$, ove r ed s assumono tutti i valori (interi, positivi e negativi, cioè n). Invece $V_n a \times_n V_n b$ è la somma degli stessi prodotti, ove $r \leqq n$, e $s \leqq n$, e $r + s \leqq n$. Quindi $a \times b - V_n a \times_n V_n b$ è la somma dei prodotti, ove $r > n$, o $s > n$, o $r + s > n$. Queste coppie di valori di r e s si distinguono in tre classi:

$s > n$ e r qualunque; la somma vale $a \times M_n b$.

$s \leqq 0$ e $r > n$; la somma vale $Vb \times M_n a$.

$s \,\epsilon\, 1 \cdots n$, e $r > n - s$; la somma vale $\Sigma (C_{-s} b \times X^{-s} \times M_{n-s} a \,|\, s, 1 \cdots n)$.

La somma totale ha l'espressione scritta.

Si deduce:

3. $$a, b \,\epsilon\, Q \,.\, n \,\epsilon\, N \,.\, \supset .$$
$$a \times b - V_n a \times_n V_n b < [Va + Vb + 1 + \Sigma (C_{-r} b \,|\, r, 1 \cdots n)] X^{-n}.$$

" La differenza fra il prodotto esatto $a \times b$, e il prodotto di grado n dei valori con n decimali di a e di b, è minore dell'unità decimale di ordine n, moltiplicata per la parte intera di a, più la parte intera di b, più 1, più la somma delle cifre decimali di b, dalla prima fino a quella di posto n ".

Basta, nella formula precedente, osservare che

$$a < Va + 1, \quad M_n b < X^{-n}, \quad M_n a < X^{-n}, \quad M_{n-s} a < X^{-n+s}.$$

4. $$a, b \,\epsilon\, Q \,.\, n \,\epsilon\, N \,.\, \supset .\, a \times b - V_n a \times_n V_n b < (Va + Vb + 9n + 1) X^{-n}.$$

Si deduce dalla precedente, ponendo in vece delle cifre di b, il loro massimo valore 9.

5. $$a, b \,\epsilon\, Q \,.\, \mathrm{ord}\, a = \mathrm{ord}\, b = 0 \,.\, n \,\epsilon\, 1 \cdots 7 \,.\, \supset .$$
$$V_n (a \times b) \,\epsilon\, V_n (a \times_{n+2} b) + (0 \cdots 1) X^{-n}.$$

" Se a e b sono quantità positive, e il loro ordine è 0, cioè si è separata una sola cifra intera, e se n è non maggiore di 7, allora il valore con n decimali di $a \times b$ si ottiene facendo il prodotto di grado $n + 2$, e sopprimendo le ultime due cifre, e aumentando forse di un'unità l'ultima decimale ".

Segue dalla 4, in cui a $\mathrm{V}a, \mathrm{V}b, n$ si sostituiscano i loro massimi 9, 9, 9.

6. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . n, p, q \varepsilon \mathrm{n} . \supset . a \times b - \mathrm{V}_{p+n} a \times_{n+p+q} \mathrm{V}_{q+n} b <$
$[\mathrm{V}(\mathrm{X}^p a) + \mathrm{V}(\mathrm{X}^q b) + 1 + \Sigma(\mathrm{C}_{-q-r} b | r, 1 \cdots n)] \mathrm{X}^{-n-p-q}$.

Esprime la differenza fra il prodotto esatto $a \times b$, e il prodotto del grado $n + p + q$ dei valori di a e di b con $p + n$ e $q + n$ cifre decimali.

Si deduce dalla 3, osservando che la differenza cercata

$$= \mathrm{X}^{-p-q} [(\mathrm{X}^p a) \times (\mathrm{X}^q b) - \mathrm{V}_n (\mathrm{X}^p a) \times_n \mathrm{V}_n (\mathrm{X}^q b)].$$

Se il fattore b è espresso esattamente con n cifre decimali, cioè è un intero moltiplicato per l'unità di ordine $-n$, sarà $\mathrm{M}_n b = 0$, e dalla prop. 2 si ricava:

7. $a \varepsilon \mathrm{Q} . n \varepsilon \mathrm{N} . b \varepsilon \mathrm{N} \times \mathrm{X}^{-n} . \supset .$
$a \times b - \mathrm{V}_n a \times_n b < [\mathrm{V} b + \Sigma(\mathrm{C}_{-r} b | r, 1 \cdots n)] \mathrm{X}^{-n}$.

Queste espressioni della differenza fra prodotto vero e prodotto approssimato si trovano in sostanza in Vieille (4): qualche cosa di simile si trova in Fourier (3) e Cauchy (5). L'uso dei simboli V e $\times_n$ permette di esprimerle sotto forma più concisa.

Esempio. — Sapendo che $\mathrm{V}_4 \sqrt{2} = 1{\cdot}4142$ e $\mathrm{V}_4 \sqrt{5} = 2{\cdot}2360$, calcolare $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$.

Calcolo il loro prodotto d'ordine 4.

---

(4) Vieille, *Approximations numériques* (2° éd., 1854, pag. 39): " On fait " la somme des chiffres du multiplicateur renversé à partir du premier " de ceux des chiffres à droite dont le correspondant multiplicande est " suivi d'un ou plusieurs chiffres significatifs, jusqu'au dernier de ceux " qui ont un correspondant multiplicande; et, si le multiplicateur se pro" longe à gauche du multiplicande, on ajoute à cette somme le premier " chiffre à gauche du multiplicande, augmenté de 1. — Puis, on multiplie " le tout par l'unité inférieure de deux ordres à celle qui marque l'ap" proximation demandée. Le produit qui en résulte est une limite supé" rieure de l'erreur commise ".

(5) Cauchy, " Comptes rendus de l'Académie ", 16 nov. 1840, pag. 433.

1°. **Metodo del quadrilatero.** — Scrivo sulla prima orizzontale d'un quadrilatero le cifre del primo numero, e sull'ultima verticale scrivo le cifre del secondo; e nei quadrati ove si incrociano le verticali passanti per le cifre del primo numero colle orizzontali passanti per le cifre del secondo numero, scrivo il prodotto di queste cifre, avendo cura di scrivere la cifra delle unità nell'angolo destro inferiore, e la cifra delle decine nell'angolo sinistro superiore.

Poi si fa la somma delle cifre che stanno sulla stessa diagonale da sinistra in basso alla destra in alto; le cifre della somma sono scritte sulla prima verticale a sinistra.

Questo metodo, affatto elementare, è detto da Tartaglia (6) il modo di " multiplicare per quadrilatero ", ovvero per gelosia.

2°. **Metodo delle moltiplicazioni parziali:**

$$
\begin{array}{lr}
2 \times V_4 \sqrt{2} = & 2{\cdot}8\;2\;8\;4 \\
0{\cdot}2 \times V_3 \sqrt{2} = & 2\;8\;2\;8 \\
0{\cdot}03 \times V_2 \sqrt{2} = & 4\;2\;3 \\
0{\cdot}006 \times V_1 \sqrt{2} = & 8\;4 \\
0{\cdot}0000 \times V_0 \sqrt{2} = & 0 \\
\hline
 & 3{\cdot}1\;6\;1\;9
\end{array}
$$

Questa disposizione del prodotto graduale si trova in sostanza in Keplero, anno 1623 (7).

---

(6) Tartaglia, *General trattato*, anno 1592, folio 38 verso. Il Tartaglia parlava di prodotti ordinarii.

(7) *Opera*, t. 7, pag. 306. Egli dice in lingua tedesco-latina: " So bedarf " es sich auch nit, das man die multiplicationes vnd divisiones gantz aus- " smacht, sondern des Praetorii Weise ist sicher vnd gut, das ich anfahe

Oughtred (8) scrisse il secondo fattore capovolto sotto il primo; sicchè l'operazione precedente assume la forma:

1·4 1 4 2
0 9 8 2·2
———
2·8 2 8 4
2 8 2 8
4 2 3
8 4
———
3·1 6 1 9

3°. **Metodo fulmineo.** — Per fissare l'ordine delle cifre che si debbono moltiplicare, Fourier (3) e Cauchy (5) consigliarono di scrivere il moltiplicatore sopra una striscia di carta, che, capovolta, si fa corrispondere alle varie cifre del moltipli-

---

" mit dem ersten digito Multiplicantis ad sinistram, qui ducatur in mul-
" tiplicandum totum. Darnach secundus illius ad sinistram ducatur in
" hunc non totum, sed dempta eius ultima figura ad dextram, et factum
" subscribatur, ut infra apparet.

4062051
1163818
———
4062051
406205
243723
12186
3250
40
32
———
4727487 ".

I prodotti parziali sono in certo modo arrotondati.

Il manoscritto di Praetorius, cui Keplero si riferisce, fu pubblicato recentemente; come pure un manoscritto di Bürgi del 1592, in cui si trova la moltiplicazione graduale.

In sostanza la moltiplicazione graduale fu introdotta verso il 1600 la differenza fra prodotto ordinario e prodotto graduale fu calcolata solo nel secolo scorso.

(8) W. Oughtred, *Arithmeticae institutio*, 1631.

cando; si moltiplicano le cifre sulla stessa verticale, e se ne fa la somma.

Qui scriverò le varie posizioni della striscia mobile:

```
          1·4 1 4 2
0 9 Ɛ ᘔ·ᘔ  ·       =2·
  0 9 Ɛ ᘔ ᘔ        =1 0
    0 9 Ɛ ᘔ ᘔ      =   1 3
      0 9 Ɛ ᘔ ᘔ    =     2 8
        0 9 Ɛ ᘔ ᘔ  =       3 9
                   ----------
                   3·1 6 1 9
```

Calcolato dunque $\sqrt{2} \times_4 \sqrt{5} = 3{\cdot}1619$, si ha:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} > 3{\cdot}1619$$

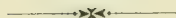
e

$$\text{,,} \quad < \quad \text{,,} \quad + (1+2+1+4+1+4+2)\, X^{-4},$$

cioè

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} < 3{\cdot}1634; \qquad \text{onde} \qquad V_2 \sqrt{10} = 3{\cdot}16,$$

e

$$1{\cdot}4142.. \times 2{\cdot}2360.. \;\mathfrak{O}\; 3{\cdot}16...$$

Sopra una nuova specie di Lacertide del gen. "Algiroides" dell'Uganda.

Nota del Dr. M. G. PERACCA

Assistente al R. Museo Zoologico di Torino.

Algiroides Boulengeri.

Algiroides africanus Blgr. — Peracca Dr. M. G., *Rettili ed Amfibii. Il Ruwenzori.* Risultati delle osservazioni e studi compiuti sul materiale raccolto dalla spedizione di S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di Savoia, Duca degli Abruzzi. Vol. I, *Zoologia*, pag. 165. - 1909.

Capo non depresso a profilo leggermente convesso; muso abbastanza lungo, ottuso. Lo scudetto rostrale non entra nella narice; un solo postnasale; quattro labiali superiori anteriormente al suboculare; una serie di granuli tra il secondo sopraoculare e la parte posteriore del primo sopraoculare e gli scudetti sopracigliari; occipitale molto più corto dell'interparietale e della stessa larghezza; regione temporale coperta da piccole scaglie, anteriormente più grosse, piatte, liscie. Nessuna piega golare; le scaglie della gola, piccole in avanti e sui lati, nella regione mediana aumentano gradatamente di grandezza avvicinandosi al collare e sono assolutamente liscie; vi sono 25 scaglie tra il collare ed il secondo paio di scudetti postmentali, gli scudetti del terzo paio non essendo a contatto tra di loro; le tre paia di scudetti postmentali nettamente più larghi che lunghi. Collare a margine dentato composto di 5 larghe scaglie. Scaglie del dorso e dei fianchi carenate; le 10 o 12 serie mediane delle scaglie del dorso più larghe, ma non del doppio, delle scaglie laterali, sono appiattite, con una carena esile,

mediana, obliqua, non sporgente sul margine posteriore della scaglia; il complesso delle linee rialzate delle carene (a destra ed a sinistra) convergono verso la linea mediana del corpo; le scaglie nella regione mediana del corpo sono in 33 serie; in media tre scaglie laterali corrispondono alla lunghezza di una piastra ventrale.

Piastre ventrali in 6 serie longitudinali e 22 trasversali, di cui quelle della serie esterna sono molto più piccole delle altre e quelle delle due serie mediane sono all' incirca lunghe quanto sono larghe.

Scaglie dei verticilli della coda strette e lunghe, carenate e quasi mucronate superiormente e sui lati della coda; ad un centimetro di distanza dalla base della coda dette scaglie (di mano in mano più lunghe nella parte distale della coda) superano già in lunghezza tre volte la loro larghezza; le scaglie della faccia inferiore della coda sono affatto liscie verso la base ed appena subcarenate verso l'estremità della coda. Piastra preanale grande. orlata da piccole scaglie sui lati e sormontata in avanti da due scaglie allungate una per lato.

Le estremità posteriori tirate in avanti lungo il corpo raggiungono appena la spalla e le anteriori tirate lungo il capo oltrepassano di poco la punta del muso. La lunghezza del piede supera di poco la lunghezza del capo. Pori femorali in numero di 9 tanto a destra che a sinistra.

Parti superiori del capo, del collo e del dorso color bronzo chiaro metallico; fianchi del capo, del collo e del corpo brunochiari con riflessi metallici meno spiccati; labbro superiore giallastro. Le due tinte dei fianchi e della parte superiore del corpo sono nettamente separate da due sottili striscie nere (una per lato) che partono dal margine esterno dei parietali e terminano sul bacino. La larga striscia mediana color bronzo metallico chiaro occupa la larghezza di 7-8 serie longitudinali di scaglie. Parti inferiori bianco giallastre sulla gola, biancastre con riflessi azzurrognoli sul ventre. La coda è superiormente di un color bronzo metallico come i fianchi, senza macchie; inferiormente ha lo stesso colore del ventre.

MISURE

Lunghezza dalla punta del muso all'apertura anale	mm.	58
Lunghezza del tronco dalla prima serie dei pettorali all'apertura anale	„	38,5
Lunghezza della coda (riprodotta verso la punta) . .	„	71
Lunghezza del capo	„	13
Larghezza del capo	„	9
Spessore del capo.	„	6,5
Lunghezza estremità anteriori	„	22
Lunghezza estremità posteriori	„	31
Lunghezza del piede	„	15
Numero delle scaglie nella regione mediana del corpo	„	33
Serie longitudinali delle piastre ventrali	„	6
Serie trasversali delle piastre ventrali	„	22
Piastre del collare	„	6
Labiali superiori a destra ed a sinistra avanti al sub-oculare	„	4-4
Scaglie golari tra il collare e gli scudetti postmentali	„	25
Pori femorali a destra ed a sinistra	„	9-9

Un solo esemplare femmina di Fort Portal.

Questo unico esemplare femmina fu da me riferito nel 1909 all'*Algiroides africanus* descritto dal Boulenger nel 1906 (1) sopra un solo esemplare maschio di Entebbe, facendo però rilevare la notevole differenza del numero delle serie di scaglie sul corpo.

Il D.r Boulenger, avendo ricevuto recentemente numerosi esemplari del suo *A. africanus* dal Camerun e dal Congo, ebbe la cortesia di inviarmene un esemplare maschio di Medje, Ituri, Congo belga, e di indicarmi i limiti delle variazioni individuali nel numero delle scaglie e dei pori femorali.

Nella nuova specie le scaglie nella regione mediana del corpo sono 33, le piastre ventrali in 6 serie longitudinali e

---

(1) *Additions to the Herpetology of British East Africa*, by G. A. Boulenger, " Proceedings of the Zoological Society of London „, 1906.

22 trasversali, le golari tra il collare e gli scudetti postmentali 25, i pori femorali 9-9, le scaglie sotto il 4° dito del piede 24 e vi è una sola larga piastra preanale.

Negli esemplari di *A. africanus* Blgr. le scaglie nella regione mediana del corpo variano da 19 a 24, le serie trasversali delle piastre ventrali variano da 18 a 22, le golari da 19 a 29, i pori femorali da 13 a 17, le scaglie sotto il 4° dito del piede da 17 a 19 e vi sono sempre 2 o 3 piastre preanali impari.

Il *facies* della nuova specie è sopratutto spiccatamente diverso dall'esemplare in alcool comunicatomi dal Boulenger. La nuova specie si distingue a prima vista per proporzioni più snelle ed eleganti dall'*A. africanus*; il capo non è appiattito; il corpo e specialmente il collo sono più compressi lateralmente mentre nell'*A. africanus* essi sono spiccatamente depressi; le scaglie del corpo, molto più piccole con le carene lineari sottili, dànno all'animale l'apparenza di avere tegumenti *quasi* lisci in confronto dell'*A. africanus*, i cui tegumenti hanno un aspetto ruvido, dovuto alle robuste carene delle scaglie spiccatamente più grandi.

Nell'esemplare di *A. africanus* di Medje, la coda è rotta (e mancante) a circa due centimetri di distanza dal bacino. Le scaglie della faccia superiore a circa un centimetro di distanza dalla base della coda sono, in confronto a quanto si osserva nella nuova specie, corte e larghe, raggiungendo *appena* in lunghezza il doppio della larghezza.

Non rimane perciò nessun dubbio che l'esemplare di Fort Portal appartiene ad una nuova specie.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Marzo 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Manno, Carle, De Sanctis, e S. E. Ruffini.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente del 18 febbraio u. s.

Il Socio Einaudi presenta alla Classe, facendone omaggio, un suo volume dal titolo *Studi di economia e finanza* (*Seconda Serie*) recentemente pubblicato dalla Società tipografico-editrice nazionale di Torino, e un suo opuscolo *Per una nuova storia delle dottrine economiche* (da *La Voce*, edizione politica, Firenze, 1915). La Classe ringrazia.

Il Socio Segretario Stampini presenta, quale omaggio del Prof. Carlo Alfonso Nallino, due opuscoli di studi arabi, di cui uno estratto dalla " Rivista degli Studi orientali „ (vol. VII, pp. 421-466) sopra varie questioni relative al Corano, ai Muʿtaziliti, agli Ibāḍiti e ai Qadariti, l'altro estratto dal " Bollettino

della Reale Società Geografica Italiana „ (fasc. IX, 1916, pp. 721-736) e concernente *Un mappamondo arabo disegnato nel 1579*. La Classe ringrazia.

Il Socio Patetta presenta per l'inserzione negli *Atti*, riassumendone il contenuto, una *Nota* su *Il poeta torinese Camillo Maulandi e uno strano errore di Carlo Botta*.

Il Socio Vidari presenta, pure per essere inserita negli *Atti*, una sua *Nota* che ha per oggetto *La coltura dello spirito come ideale pedagogico*.

Raccoltasi poscia la Classe in adunanza privata procede alla nomina di due delegati della Classe presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia, e riescono eletti i Soci Carle e Sforza.

LETTURE

Il poeta torinese Camillo Maulandi e uno strano errore del Botta.

Nota I del Socio FEDERICO PATETTA.

1. Il nome di Camillo Maulandi non è ormai conosciuto se non da qualche bibliofilo e da qualche erudito. Ai bibliofili può infatti esser venuto fra le mani il suo *Saggio di poesie* stampato a Parma, nel 1799, in nitida e rara edizione bodoniana: gli eruditi, specialmente se cultori di storia piemontese, ricordano forse l'elogio, che ne scrisse Carlo Botta dicendolo caduto eroicamente il 27 aprile 1794 nella difesa di un importante passo alpino.

" Durò molte ore il conflitto (*narra il Botta*); finalmente i " Francesi, spintisi avanti grossi ed impetuosi contro il ridotto " di Felta, che era parte delle difese rizzate sulle rive del Ta- " narello e della Saccarda, se ne impadronirono; la qual cosa " fu occasione, che tutti quei passi, e principalmente quello del " colle Ardente, fossero ridotti in potestà loro. Morirono in questo " fatto parecchi soldati di nome e di valore dall'una parte e " dall'altra. Nè voglio, che la solita continenza degli Italiani, " che sa qualche volta di freddezza, nel far onore agli uomini " virtuosi loro, quando le testimonianze non vengono loro dai " forestieri, tanto mi trattenga, ch'io non soddisfaccia ad un " mio giusto desiderio raccontando come in questo fatto fu ferito " mortalmente il capitano Maulandi, capitano che era nell'eser- " cito regio, nel quale io non saprei dire se fosse maggiore o " il valor militare, o la modestia civile, o l'amore dell'umanità, " o l'ingegno, o la letteratura. Amico de' miei, amico di tutti " i buoni, e buono egli stesso, meritò certamente, che altro più " degno storico ch'io non sono tramandasse le sue lodi ai posteri:

" ma siccome pure questa soma mi è stata accollata da chi in
" me stesso può più di me, godomi bene che l'occasione mi sia
" porta di fare una tal quale testimonianza al nome del buon
" Maulandi, confortandomi in tal modo colla immagine di un
" uomo giusto e dabbene del fastidio dello aver a raccontare
" tante corruttele e tanti vizj dell'età nostra: avvengadiochè io
" mi creda, che miglior fede, ch'io far non posso delle sue virtù,
" faranno ai posteri gli scritti suoi pieni di spirito poetico, di
" dolce amenità, di grazia tutta oraziana. Delle opinioni cor-
" renti pensava moderatamente. Amatore di corretta libertà,
" desiderava moderazione nelle potestà supreme, ma diede vo-
" lentieri e sangue e vita alla patria ed al Re, per loro fedel-
" mente e valorosamente combattendo „ (1).

Si potrebbe osservare che il ritratto del Maulandi datoci dal Botta, benchè colorito sapientemente, è forse un po' troppo accademico, un po' troppo di maniera; che l'elogio sa un po' troppo di panegirico. Ad ogni modo il Maulandi deve certamente al Botta il più e il meglio della sua fama, poichè dal Botta attinsero tutti coloro, che, a mia conoscenza, ebbero posteriormente ad occuparsi di lui con qualche ampiezza, cioè il Vallauri nella *Storia della poesia in Piemonte*, Torino 1841, t. II, pag. 233-235 e 409; Cesare di Saluzzo nei *Souvenirs militaires des États Sardes*, vol. II, Torino 1854, pag. 266-267 (2); il Pinelli nella *Storia militare del Piemonte*, vol. I, Torino 1854, pag. 396; e finalmente Giuseppe Cesare Abba nel romanzo storico *Le rive della Bormida* (1ª ediz., Milano, 1874) (3).

---

(1) *Storia d'Italia dal 1789 al 1814*, ediz. principe di Parigi, Didot, 1824, t. I, pagg. 201-202. Le edizioni posteriori, per es. di Parigi, Baudry, 1832, t. I, pagg. 207-208, e di Capolago, tip. Elvetica, 1837, t. I, pagg. 207-208, non hanno varianti se non di punteggiatura.

(2) Dei *Souvenirs* esiste una traduzione italiana col titolo *Ricordi militari degli Stati Sardi... Seconda edizione*, Torino, Seb. Franco e figli e compagnia, 1858: ma, benchè essa, nei due esemplari che ho sott'occhio, si presenti come opera completa (errando, a quanto pare, il *Catalogo generale della Libreria italiana*, che la indica come vol. I), corrisponde in realtà al solo volume primo dell'edizione francese. Perciò vi manca naturalmente anche il capitolo dedicato al Maulandi.

(3) Nel *Dizionario geografico... degli Stati di S. M. il Re di Sardegna* compilato dal Casalis, alla v. *Torino* (vol. XXII, Torino, 1852, pag. 941) si

Nessuno si chiese, se il Botta, che mostrava d'esser così bene informato, lo fosse realmente; nessuno dubitò della morte gloriosa del suo eroe.

Stando così le cose, venni un giorno in possesso, prima d'una, poi di parecchie lettere del Maulandi di data posteriore alla sua pretesa morte. Feci allora qualche ricerca, e subito mi s'offersero in folla altre prove non meno convincenti dell'errore del Botta, e insieme (non posso nasconderlo) della leggerezza del Vallauri, il quale contribuì per parte sua a trarre in inganno il Saluzzo, lasciando supporre che il *Saggio* sia una raccolta postuma.

Il Vallauri, come richiedeva la natura dell'opera sua, volle infatti dare il suo giudizio sul valore del Maulandi come poeta, e sentenziò che le lodi del Botta sono eccessive ed ispirate più che altro dall'amicizia; ma, per esercitare il suo ufficio d'Aristarco, non credette evidentemente necessario dar una scorsa alle misere 58 pagine, di cui consta il *Saggio di poesie.* Se fosse stato un po' più coscienzioso, si sarebbe infatti avveduto che non si tratta d'opera postuma, e tanto meno opera d'uno scrittore morto nel 1794: vi avrebbe letto che l'ode decima, *Per nozze*, fu composta nell'inverno del 1797, e l'undecima, *La lite di Nerina*, nell'inverno del 1798; e non gli sarebbe forse sfuggita, a pag. 51, a proposito dei *Bagni di Digne*, la seguente nota poco conciliabile colla narrazione del Botta, ch'egli pure riferisce: " L'autore deve a questi bagni la guarigione d'una ferita riportata in una coscia nel fatto d'arme dei 27 aprile 1794 v. s., sopra le alture della Briga ".

La verità è semplicemente questa, che il Maulandi fu ferito e fatto prigioniero, come si può leggere anche nei *Versi* di Carlo Bossi, noto uomo politico e letterato di qualche valore, i cui scritti avrebbero dovuto esser meglio conosciuti dal Botta,

legge un cenno sul *Maulandi, leggiadrissimo poeta*. Nulla però è detto della sua vita. Il Bertana, *Arcadia lugubre*, Spezia, 1899, pagg. 31-32 (corrispondente a *In Arcadia*, Napoli, 1909, p. 425), accennò pure brevemente alle poesie contenute nel *Saggio*, dal quale ebbe nozione della *ferita* toccata dall'autore *nell'infelice campagna* del 1794 e che lo avrebbe *disgustato del mestiere delle armi* (il che non è vero). Non avendo però presenti alla memoria nè il Botta nè il Vallauri, non ebbe campo di segnalarne gli errori.

che gli fu collega nel triumvirato dei *tre B* e in quello dei *tre Carli*, e specialmente dal Vallauri, che ne trattò a lungo (1).

Nei *Versi di* Albo Crisso (anagramma di Carlo Bossi) stampati a *Eridania* (Torino), in tre volumetti, negli anni repubblicani VII e IX, sono molto frequenti i ricordi del Maulandi, amicissimo dell'autore (2): gli sono anzi dedicate alcune poesie, e alla ristampa del poemetto *La Olanda pacificata* è premessa una lettera a lui, datata " *Dall'Aia, 24 gennaio 1797* „. La poesia però, che più ci interessa, è quella intitolata " *Pietroburgo in settembre 1794* „, nella quale il Bossi chiede se potrebbe non essergli *più caro d'ogni altro il suolo*

" Cui fa scudo del petto il *suo* Camillo „,

e ricordando esplicitamente in nota la " difesa ostinata della Tanarda, ove l'aiutante di campo Camillo Maulandi fu gravemente ferito e fatto prigione „, scrive di lui:

" Ma chi retro potria volger suo piede?
Con pochi ancora il gran torrente arresta,
E la fuga degli altri immoto vede.
Cedi, omai cedi alla feral tempesta;
Non fia l'ultima pugna u' roti 'l brando,
Come, il sai, la più bella ahi! non è questa.

---

(1) *Storia della poesia* cit., vol. II, pagg. 256-262 e 332-334.

(2) Si veda il vol. I, pagg. 54 e segg., 76, 120 e segg.; il vol. II, pagg. 87 e segg.; il vol. III, pagg. 38 e segg., ecc. Un volume di versi, in parte nuovi, fu poi pubblicato dal Bossi, collo stesso pseudonimo, a Londra, nel 1816, insieme ad un secondo volume intèramente occupato da un poema in dodici canti, in lode di Napoleone. Questo poema, intitolato *Napoleonia*, era stato cominciato nel 1805 e terminato nel 1812; e fu certo atto di coraggio, per un esule come il Bossi, stamparlo a Londra nel 1816, mentre più feroce ardeva l'odio contro il grande prigioniero. Il poema è ristampato nelle *Poesie edite ed inedite di* Carlo Aurelio Bossi, Firenze, Barbèra, 1861, 2 voll. L'edizione, che non ho presente, ma che ebbi altre volte agio di confrontare colle già citate, fu fatta a spese di una nipote del Bossi; ma affidata, credo, al poeta Dall'Ongaro, che scrisse l'introduzione, riuscì manchevole e infelicissima. Il Dall'Ongaro, se ben ricordo, mostra perfino d'ignorare affatto l'esistenza dell'edizione torinese e forse anche di quella di Londra.

Pur di sangue e sudore ampj versando
  Rivi ancor stai sul rotto vallo, ancora
  Dell'impavida voce odo il comando.
Qui trovare, o crudel, vuoi l'ultim'ora?
  No, su te veglia tuo malgrado un nume;
  Vivi e i profondi suoi decreti adora „ (1).

Posso ancora aggiungere, riguardo al Vallauri, un fatto curioso, ch'egli cioè, a pag. 469 dello stesso volume, in cui a pag. 233 è narrata la morte del Maulandi, registra i *Voti della torinese Accademia degli Unanimi* per nozze Maffoni-Bruna, stampati dal Bodoni nel 1797, e fra gli autori che contribuirono alla raccolta non manca di nominare Camillo Maulandi, il preteso morto nel 1794! Lasciando da parte il Vallauri, per spiegare in qualche modo l'errore del Botta si potrebbe congetturare che, caduto il Maulandi prigioniero, sia corsa fra i commilitoni la notizia della sua morte. Sappiamo però con certezza che già nel maggio egli carteggiava coi suoi amici di Genova e di Torino; e la verità dei fatti era conosciuta dalle autorità militari piemontesi, come è provato dalle *Memorie* tratte da carte sincrone d'Ignazio Thaon di Revel e pubblicate nel 1871 (2).

Fatte le precedenti constatazioni, nasceva naturalmente il desiderio di poter accertare la data vera della morte del Maulandi; ed anche in questo fui fortunato, specialmente grazie a cortese comunicazione fattami dall'amico cav. Vincenzo Armando.

Prima però che della morte del Maulandi, voglio dir qualche cosa della sua vita, della quale nessuno, ch'io sappia, s'è mai occupato se non per ripetere le lodi affatto generiche ed astratte dategli dal Botta. Fonti principali saranno per me le lettere, che ricorderò a mano a mano.

Non mi nascondo del resto, che per far opera meno imperfetta sarebbero state necessarie ulteriori investigazioni, sia nei carteggi dell'epoca, sia nella sezione di guerra del nostro Archivio di Stato; ma non credetti, a dir vero, che il frutto di siffatte ricerche potesse compensare del tempo, che avrebbero richiesto.

(1) Ediz. di Torino, I, pag. 118 e segg. (ed. di Londra, I, pag. 208 e segg.).

(2) *Mémoires sur la guerre des Alpes ... tirés des papiers du comte Ignace Thaon de Revel*, Torino-Roma-Firenze, 1871, pag. 199. Il Maulandi è ricordato più volte anche nelle pagine precedenti, per es. a pag. 190 e 192-93.

2. Non si potrebbe dire che la vita del Maulandi, la quale, nella miglior ipotesi, non dovrebbe essersi prolungata di molto oltre i quarant'anni, non sia stata varia ed avventurosa. Fu vita di studio e di guerra, e non vi mancò, per intermezzo, un romanzo d'amore.

Ch'egli fosse torinese, almeno di nascita se non di famiglia (1), è detto nel titolo del *Saggio di poesie*. In che anno sia nato non so; ma, tenendo conto dell'età dei suoi amici più intimi (il Bossi, nato nel 1758, e G. B. Somis, nato nel 1763) e specialmente delle prime traccie della sua attività letteraria, si può affermare che la sua nascita deve cadere verso il 1760.

Sorta a Torino nel 1781 la Società Filopatria, che doveva specialmente occuparsi di studi storici (2), ne fece parte insieme a quasi tutti coloro, ai quali sono dirette le sue lettere, di cui ho potuto aver notizia. La prima di queste lettere, scritta da Susa il 2 luglio 1783 al conte Amedeo Ferrero Ponsiglione di Borgo d'Ale (3), ci fa appunto sapere che il Maulandi, per un'opera collettiva progettata dalla *Società*, stava spogliando il testo di Strabone, nell'edizione greco-latina di Basilea, 1549. Nel 1787 la Società pubblicò in Torino il primo volume degli *Ozi letterari*, e il Maulandi, *officiale nel Reggimento di Susa*, vi contribuì con dei versi, che gli valsero da *Oligoro* (4), ossia dal conte G. B. Somis di Chiavrie suo cugino, un epigramma, piuttosto insulso, e l'epiteto di *lascivetto*. Nel medesimo tempo

(1) Un Carlo Maulandi di Sospello, minor osservante, che viveva nella prima metà del Seicento, è ricordato dal Rossotto, *Syllabus scriptorum Pedemontii*, Mondovì, 1667, pag. 148; e, per un misero madrigale stampato nel 1646, anche dal Vallauri, *Storia della poesia* cit., vol. I, pag. 487.

(2) Cfr. Vallauri, *Delle società letterarie del Piemonte*, Torino, 1844, pag. 242 e segg. In nota, a pagg. 242-243, è l'elenco dei *membri principali* della Società, tra i quali sono, oltre al Maulandi, Amedeo Ponsiglione, Giambattista Somis, il conte Franchi di Pont, Carlo Bossi, *il Solitario delle Alpi*, Giuseppe Pavesio; personaggi che abbiamo già avuto o avremo occasione di ricordare come amici e corrispondenti del Maulandi.

(3) È posseduta dalla nostra Accademia (*Raccolta d'autografi*, vol. C).

(4) *Epigrammi di* Oligoro, Torino, Morano (1796), pag. 93. Degli *Ozi* si pubblicarono tre volumi (1787 e 1791), in ciascuno dei quali si trovano poesie del Maulandi, tutte riprodotte nel *Saggio*, ad eccezione, naturalmente, di due dedicate a principi di Casa Savoia (vol. II, pag. 381 e segg.; vol. III, pag. 236 e segg.).

prendeva impegno di fornire alla *Biblioteca oltramontana*, emanante essa pure dalla Società Filopatria, " gli articoli spettanti la tattica, che vi potessero aver luogo „ (1).

Quest'impegno è ricordato da lui stesso nelle sue *Evoluzioni della fanteria*, stampate a Torino nel 1789, in-4° piccolo, di pp. 112, con tavole. Del valore intrinseco di quest'opera non potrei certo esser giudice; ma essa merita in ogni modo d'esser ricordata per le rampogne contenute nella dedica *Ai militari italiani*: " Mi " parve sempre poco onorevole per noi la necessità in cui siamo " di imparare dai libri oltremontani quella scienza, che già " nativa di questo bel paese gli diede nell'universo intero si" gnoria..... Ora immemori di ogni nostra passata grandezza, " ripudiata perfino la nostra colta lingua natia, coll'adottarne " in questa materia una straniera, non dubitiamo di confessare " noi stessi la nostra decadenza „. Come si vede, il Maulandi potrebbe esser aggiunto alla lunga serie di quei nostri scrittori, che avrebbero forse considerato qualunque progetto d'unificazione dell'Italia come un sogno che non si sarebbe mai avverato, ma ai quali non mancava il sentimento dell'italianità e la coscienza dei vincoli ideali, che stringevano insieme tutte le stirpi italiane politicamente divise.

Dall'ottobre del 1789 comincia la serie delle lettere, che posseggo, dirette dal Maulandi al cugino Somis. Le lettere sono quattordici, l'ultima delle quali del 26 ottobre 1795; ma dovevano essere molte più, e, data la dispersione dell'archivio Somis (2),

(1) Non feci ricerca di questi articoli, i quali debbono in ogni modo esser anonimi. Trovai invece nella Biblioteca del Re un breve lavoro manoscritto, non autografo, del Maulandi: " *Description raisonnée des rétranchements du Prince Thomas derrière la Tuile* „ (Ms. 18, *Miscellanea patria storica. Aosta*).

(2) La dispersione, cominciata da molti anni, durò a lungo. Acquistai in più volte una buona quantità di carte, fra le quali sono alcune centinaia di lettere di G. B. Somis. Debbo a questo proposito fare una rettifica e una piccola rivendicazione. Nella *Miscellanea di studi storici in onore di Antonio Manno*, vol. II, Torino, 1912, pagg. 131-138, Giuseppe Gallavresi pubblicò, col titolo *La rivoluzione piemontese del 1821 nel carteggio d'un magistrato Giansenista*, nove lettere del Somis, dicendo che gli erano state " cortesemente comunicate dall'attuale proprietario degli autografi, cav. Ercole Gnecchi „. In verità le lettere appartenevano ed appartengono a me,

non è improbabile che almeno alcune delle perdute tornino, quando che sia, alla luce.

La prima lettera, scritta il 13 ottobre 1789 da Givoletto (in circondario di Torino), è di disperazione vera, quantunque espressa in forma un po' troppo letteraria e forse con qualche reminiscenza del Werther. Cinque giorni prima, *Nice*, una giovane amata dal Maulandi ardentemente, era andata sposa. Egli era fuggito poco prima da Torino, per vivere *in fatale e crudele incertezza* ma col conforto almeno d'esser solo e di non dover nascondere il suo dolore. Disgraziatamente la sposa doveva essere una sua parente abbastanza prossima; cosicchè, appena celebrato il matrimonio, una lettera del padre di lei e una del marito gli erano giunte per espresso, annunciandogli imminente la visita degli sposi. " Lascio pensare a te, che conosci amor " per prova (*così scrive il M.*), qual fulmine fu questo, e quale " sbigottimento al mio core. Che terribil visita! quali crudeli " civiltà! qual contrasto! qual combattimento! Io la vidi, amico, " scendere dal cocchio in braccio del mortale fortunato ch'ora la " possiede. Io la vidi dolcemente corrispondere alle ardenti innu- " merevoli sue carezze. Io dovea rallegrarmene, e mi scoppiava " il core. Infine ebbi tanta forza di ritenermi, di celare i miei " tumulti interni, e di soddisfare all'onore. Questo stato di sof- " focamento durò più di ventiquattro ore. Ora per mia buona " fortuna son solo, nè mi rimane altro bene al mondo che il suo " ritratto. Sì, amico, questo è l'unico tesoro, ch'io pregio: nulla " ha la fortuna più da offerirmi per ristorar questa perdita..... ".

La *fortuna*, non so se offesa o impietosita, preparava invece un cambiamento di scena. Due lettere, scritte da Milano poco più di quattro mesi dopo la prima (1 e 6 marzo 1790), ci mostrano il Maulandi in tutta l'ebbrezza dell'amore corrisposto. Egli, con un domestico, è ospite di Nice, che " tutti i dì diventa " più amabile, più amante e più amata, se pure è possibile che " queste cose possano aumentarsi nel sommo grado in cui sono ". Il *mortale fortunato*, che da quattro mesi la *possedeva* legittima-

che le acquistai direttamente dalla famiglia Somis. Questa le aveva precedentemente offerte in vendita e mandate in esame a Milano, dove furono copiate, a sua insaputa, e certo per equivoco, e poi restituite.

mente, s'era forse eclissato; certo il Maulandi ha il pudore di non nominarlo più affatto. Sola piccola nube è " la cagionevole " sanità della bella ospite, che soffre assaissimo la gravidanza „, il che lo obbliga a non lasciarla se non per poco, e perciò a " restringersi a poche conoscenze scelte e a pochi crocchi lette- " rarii „ invece di " spandersi come avrebbe desiderato e potuto „.

La scelta delle *conoscenze*, non c'è che dire, era stata fatta bene. Il Maulandi, " nelle ore, che gli eran concesse dall'amore „, *frequentava il Parini*, *l'Amoretti*, *il conte Gian Rinaldo Carli, Monsignor Bossi.*

Del Parini manda due sonetti, che disgraziatamente non ho più trovati, *favoritigli da una dama letterata alla conversazione del conte Carli.* Scrive inoltre, il 25 marzo: " Io ho stretto " amicizia col Parini. Questo grand'uomo, che non loda mai nis- " suno, ha parlato di me con distinzione a Monsignor Bossi e " ad altre persone letterate, lo che fu da questi riguardato " come un prodigio. Egli è veramente difficilissimo a conten- " tare, e questa è forse la ragione per cui resterà imperfetto " e incompleto uno dei più bei poemi di cui si vanti la lingua " italiana. La sua *Sera,* crescendole (!) la materia fra le mani, " venne in due parti divisa, in *Sera* e *Notte.* Di queste due parti " ve n'è già una tal porzione fatta, che tutt'altri che l'Abate " Parini, aggiungendovi poca roba, se ne contenterebbe. Ma egli " non se ne contenta, e temo che difficilmente si porrà in dovere " di compierla „.

Il Maulandi avrebbe dovuto approfittare del soggiorno in Milano per procacciare abbonati alla *Biblioteca oltramontana*; ma avverte fin dalla prima lettera e ripete il 25 marzo, che c'è poco da sperare, sia *a cagione dei tanti fogli periodici, che escono in tutta Italia e dei pochi letterati che se ne occupano*, sia perchè il gusto del pubblico è ormai più per le scienze che per le lettere: " Le scienze in questa città, come nelle altre del- " l'Italia, hanno recato un gravissimo danno alla bella lettera- " tura, e quello, che non è fisica, idraulica, chimica, viene poco " apprezzato e ricercato in queste contrade. Vi è l'Abate Amo- " retti, il quale si dà molto movimento per gli *Opuscoli*, e credo " ne ritiri un agio considerevole; epperciò egli ed i suoi ade- " renti e fautori non lasciano penetrare altre opere di questo " genere, che possano pregiudicare a quella di cui è il *Redat-*

“ *tore*. Egli è, siccome lo chiama benissimo l'Abate Parini, il “ Rigattiere della letteratura, come quello che ne fa un vero “ traffico, e si propone l'interesse piuttosto che la gloria per “ iscopo „.

Sempre, probabilmente, a vantaggio della *Biblioteca*, e per desiderio del Somis, il Maulandi prendeva anche informazioni sul Passeroni, del quale scriveva nella lettera del 6 marzo: “ Il “ Passeroni vive tuttora meschinamente in questa città, sebbene “ oltrepassi gli anni 80. Non mancherò di pigliarne tutte le no- “ tizie possibili ad uso del vostro necrologio „ (1). La preparazione del necrologio non fu del resto di malo augurio per il faceto abate, che continuò a vivere *meschinamente* per quasi quattordici anni, essendo morto il 26 dicembre 1803, più di quattr'anni dopo il Maulandi!

La già citata lettera del 25 marzo 1790 e la successiva del 6 aprile non sono più da Milano, ma da Albonese, piccolo borgo degli Stati Sardi, nel circondario di Mortara. Anche lì il Maulandi è ospite di Nice. Albonese è per lui *la dolce stazione*, la sua Sciro, la sua Capua. “ Io sono nelle delizie di Capua “ (*scrive il 25 marzo*): io vivo... spensierato in braccio ad amore “ gli ultimi bei giorni di mia vita, riserbandone (!) la trista serie “ degli altri, che mi rimangono a passare, alla gloria, se mi si “ aprirà qualche occasione „. Poco dopo i *bei giorni* eran volati via e il Maulandi annunciava che il 7 aprile sarebbe partito per Milano *a raccozzarvi il suo bagaglio e riempire alcuni pochi doveri indispensabili*, per poi fare *qualche soggiorno* a Pavia, “ essendo “ munitissimo di lettere per molti membri di quella insigne Uni- “ versità „.

Dopo il 6 aprile 1790 c'è nella corrispondenza una lacuna di più di tre anni; lacuna spiegabile in piccola parte per la dispersione, già notata, delle carte Somis, ma derivante sopra tutto dal fatto, che normalmente il Maulandi ed il Somis risiedevano entrambi a Torino e non avevano quindi bisogno di scriversi. È disdetta per la nostra storia d'amore, che resta bruscamente interrotta. Alcuni versi del Bossi, nella poesia *In*

---

(1) Già nella lettera del 1° marzo si leggeva: “ ... non mancherò di “ pigliar le notizie di Passeroni, che saranno opportune al necrologio ... „.

novembre 1790 (1), lo mostrano informato, al par del Somis, della passione dell'amico, e attestano che durava ancora. Alla ripresa della corrispondenza col Somis l'incendio doveva invece esser già domato, o meglio covar sotto le ceneri, ma solo nel cuore del Maulandi. Di *Nice* infatti non si parla più, e solo si possono riferire a lei alcuni accenni, e specialmente il seguente brano di lettera del 6 marzo 1794: " Mi spiace che il *Solitario* " si perda di riputazione. Il cenno che mi fai mi dà a credere che " abbia morso una donna rispettabile e a me cara. Quanto io " sarei punito d'avergliela presentato!..... Ma potrei forse punirlo " di aver abusato della mia confidente cordialità..... Quand'anche " fosse per un rivale felice, io rimirerò sempre col più grande " interesse quell'amabile e sventurata donna, nè potrò mai che " ammirarla ed onorarla „. Probabilmente il *Solitario,* forte delle confidenze avute dal Maulandi, che avrà chiacchierato con lui come col Somis e col Bossi, aveva *morso* la nobile dama, vedendola forse sul punto di cedere a nuovi amori. Questo almeno credette, a ragione o a torto, il Maulandi e se ne sdegnò. Vedremo che il *Solitario* era un poetucolo, celebre (come diceva il Somis, non ancora *giansenista*) per " la ritrosia, che aveva, quasi " proprio carattere, mostrato..... pel pargoletto di Gnido e pe' suoi " trastulli „ (2). Ma essersi fatto presentare, in età da 20 a 25 anni, a una donna, di cui si conosce la *sensibilità*, e vederla o sospettarla in procinto di tradire, con un altro, l'amico presentatore, dev'esser cosa poco piacevole anche per un ..... *solitario.* Concediamo dunque le circostanze attenuanti a questo disgraziato, dato anche che la lettera del Somis non sia stata male interpretata dal Maulandi, evidentemente tormentato dalla gelosia, e che il *perdersi di riputazione* del *Solitario* non fosse dovuto, come vedremo, a ben altre ragioni.

Chi fosse *Nice*, non sarebbe difficile scoprire, benchè si tratti

(1) Ediz. di Torino, I, pag. 54; ediz. di Londra, I, pag. 162:

" Potrai, Camillo, un tenero
A me negar perdono,
Di Nice tua tu ligio
Qual di mia Fanni io sono? „.

(2) *Epigrammi di* Oligoro, cit., pag. 41, nota.

quasi certamente d'un nome inventato, conoscendosi già la data del suo matrimonio e il fatto che il marito aveva casa a Milano e ad Albonese. Le ricerche dovrebbero cominciare (e probabilmente finirebbero) colle due famiglie, entrambi estinte, dei feudatari d'Albonese, cioè coi marchesi Calderari di Milano e coi conti Albonese di Pavia (1). La questione però, allo stato degli atti, non ha molto interesse.

3. Quanto al *Solitario*, si tratta senza dubbio del *Solitario delle Alpi*, cioè di Ambrogio Viale, nato a Cervo nel circondario di Portomaurizio e mortovi, di soli 35 anni, nel 1805; membro egli pure della Società Filopatria e amico del Somis. Il Viale, collo pseudonimo appunto di *Solitario delle Alpi*, pubblicò tre raccolte di poesie, due a Genova nel 1792 e 1794, l'altra a Torino nel 1793. Di esse trattò a lungo il Bertana (2), traendone per la biografia dell'autore *quel poco* che si può, e aggiungendo poi importanti notizie comunicategli da Achille Neri. Io ho del Viale cinque lettere dirette al Somis dal 20 maggio 1794 al 31 gennaio 1795; ed esse, oltre a darci sul Maulandi qualche notizia, di cui dirò, servono a lumeggiare e correggere alcuni punti della trattazione indicata.

(1) Cfr. Crollalanza, *Dizion. stor.-blasonico*, Pisa, 1886-1890, alla v. *Calderari* (la v. *Albonese* manca): Manno, *Il patriziato subalpino*, Firenze, 1895-1906, vol. I, pag. 122; vol. II, pag. 26: Guasco di Bisio, *Dizion. feudale*, in *Bibl. della Soc. stor. subalpina*, voll. 54-58, *ad vv.*

(2) *Arcadia lugubre e preromantica* (*Il Solitario delle Alpi*), cit., pp. 39-61, riprodotte, con qualche cambiamento e specialmente coll'aggiunta delle notizie dovute al Neri, nel vol. cit. *In Arcadia*, pagg. 440-469. Il Bertana, ricordando l'accenno al Viale nella *Storia letteraria della Liguria* dello Spotorno, t. V, Genova, 1859, pag. 77, avverte che *è inutile cercarne il nome in altre storie letterarie e ne' dizionarii biografici.* Si deve però far eccezione per il magro *Indice cronologico e bibliografico* pubblicato da Gius. Gazzino, *come appendice alla storia della poesia in Italia di G. B. Cereseto*, Milano, Silvestri, 1857, pag. 140. Cinque epigrammi del Somis diretti al *Solitario* sono nel volumetto citato, pagg. 41-45. Il primo di essi era già stato pubblicato, con un sonetto di risposta, nel fascicolo di marzo 1793 della *Biblioteca.* Le tre raccolte di poesie del Viale sono indicate esattamente nel *Dizionario di opere anonime e pseudonime* del Melzi. Il Lancetti invece, nella *Pseudonimia*, ne registrava due sole, una delle quali senza indicazione d'anno.

Parlando dei cambiamenti di residenza del Viale, il Bertana (1) crede ch'egli sia stato costretto a lasciar Torino nel 1793, e probabilmente per le sue opinioni politiche: " E qual " meraviglia se quel *fato improvviso*, che lo costrinse a partir " da Torino nel 1793, senza neppure poter dire addio agli amici " (*Rime*, p. 166), fosse stato tutt'uno collo *spirito repubblicano*, " ch'egli ostentava ormai un po' troppo pe' tempi allora correnti?... Abbiamo invece veduto, che il Viale era ancora a Torino nel marzo del 1794; e la prima sua lettera, o biglietto, al Somis, non ci lascia dubbio sul giorno della partenza, che fu precisamente il 20 maggio. A tale data (essendo anzi il 20 corretto su un precedente 19) il Viale scriveva: " Per improvvise ragioni " di famiglia parto improvvisamente..... Ah! amico, quante cose " avrei a dirvi! Addio. Vi abbraccio. Vi scriverò a lungo, giunto " in Genova. Addio „. Da Genova infatti il Viale scrisse, ma le lettere furono ripetutamente intercettate, prova certa che la partenza aveva destati, o forse acuiti, i sospetti del governo piemontese. Giunse finalmente a destinazione, col suo bel sigillo in cera rossa, portante il motto biblico " *sicut passer solitarius* „, una lettera del 21 giugno, nella quale il Viale dice d'aver riassunto le precedenti: " Dopo tante lettere scrittevi, " spero finalmente, che questa sarà per giungervi. Per una parte " ho piacere che sianvi state intercettate quelle lettere, perchè " almeno chi lo fece sarà restato pienamente persuaso della " totale innocenza delle vostre corrispondenze..... „. Causa dell'improvvisa partenza sarebbe stata la notizia della grave malattia d'uno " zio paterno, nubile (!!), già vivente in Napoli, e " ritiratosi già da qualche tempo in Riviera alla casa nostra " paterna „. Giunto a Genova, il Viale avrebbe appreso, che lo zio era morto, e perciò non avrebbe proseguito il viaggio (evidentemente per Cervo) e vi resterebbe ormai *lungamente*, benchè *desolato* d'aver lasciato Torino: " Mi sfogavo finalmente seco voi " (*nella prima lettera da Genova*) sulla viva desolazione, che " aveva ingombrata ed oppressa la mia anima, come tutt'ora " l'opprime ed ingombra, per l'improvviso abbandonamento d'un " paese, ch'io cominciava già a risguardare più che come mia

(1) *Arcadia lugubre*, pag. 47 = *In Arcadia*, pagg. 452-53.

" patria, ed in cui avev'io immeritevolmente trovato in ogni " tempo tanta amorevolezza, ospitalità e cortesia „. " Dopo la " mia partenza da costì (*insisteva il Viale*) sono sempre *com'uom,* " *che par che ascolti e nulla intende.* Non sono ancora ritornato " in me stesso, e non trovo compiacimento, se non che in quello " che mi rammenta Torino. Beato colui, che non conobbe e non " vide mai altra terra che quella in cui nacque e morì! Quasi " quasi io mi pregherei d'avervi trovati duri, inospitali, intrat- " tabili: questo mi fa supporre, ch'io avrei il mio cuore attac- " cato costì meno tenacemente „.

Non so se i buoni Torinesi siano stati allora riconoscenti al Viale, e abbiano spinta la loro gratitudine fino a perdonargli l'orribile barbarie del suo stile e della sua lingua. Quanto alle Torinesi, esse avrebbero dovuto trattarlo come le loro arcavole, secondo una nota leggenda, avrebbero fatto col Nevizzano, poichè nella stessa lettera, in cui vanta Torino, essendo costretto a far un complimento al Somis per la sua *Fille*, trova modo di convertire l'elogio di una sola in un atto d'accusa contro tutte le altre: " Ma pochi sono gli individui siffatti nel bel " sesso ... *rara avis in terris, nigroque simillima cycno*, motivo " per cui io anteponea a tutto ciò una pacifica solitudine mo- " rale; perchè in generale l'uomo, che ha probità e buon senso, " si arrischia a rappresentare il ridicolo personaggio d'uno " schiavo trionfato presso d'un sesso, che non suole avere altro " desiderio, che quello di conquistare immoderatamente e di " comandare con uno sguardo al cuore, all'intelletto, alla opi- " nione di tutto il genere umano mascolino „.

Erano queste le idee fisse del Viale, sulle quali non occorre insistere (1). Piuttosto vien fatto di chiederci, perchè mai, rimpiangendo così vivamente il soggiorno di Torino, egli non vi sia tornato, non appena scomparse le *ragioni di famiglia*, per le quali aveva dovuto allontanarsene. Nasce qui il sospetto, e poi la quasi certezza, che le *ragioni di famiglia* fossero un semplice pretesto, e che l'improvvisa partenza del Viale sia stata una vera fuga, come tante altre in quei giorni, determinata dal

---

(1) Cfr. sopra, pag. 485, n. 2 e le opere citate del Bertana, *Arcadia lugubre*, pag. 44 e segg.; *In Arcadia*, pag. 449 e segg.

timore d'essere compromesso. Il governo piemontese aveva infatti avuto sicure informazioni sulle trame, che andavano fra di loro ordendo i *giacobini* di Torino e i Francesi rappresentati in Genova dal Tilly, aveva già fatto parecchi arresti, e proprio il 20 giugno pubblicò un editto severissimo contro ogni sorta di riunioni e associazioni non riconosciute. Quattro giorni dopo si ebbero le confessioni del Barolo, e quindi crebbe il numero degli arrestati, tre dei quali, come avremo ancora occasione di ricordare, finirono sul patibolo. Il Viale dev'esser stato allora ben contento di trovarsi lontano. Abbiamo già veduto come le sue prime lettere fossero intercettate; e il suo precedente *perdersi di riputazione* potrebbe benissimo esser riferito alle compagnie, ch'egli avesse preso a frequentare. Aggiungo ancora un indizio, sia pur tenue. L'ultima sua lettera al Somis fu *mandata* da Genova a Torino " *per mezzo dell'amico Boyer* ", nel quale si può con ogni probabilità riconoscere il medico torinese Ignazio Boyer, giustiziato due anni dopo per congiura contro il governo e contro la persona del Re.

Il timore, che il Viale doveva avere di compromettersi maggiormente e di compromettere anche il Somis, escludeva di per sè la possibilità di trattare nelle lettere delle questioni e degli avvenimenti politici del giorno. Solo in una lettera del 5 luglio è espresso il desiderio, ma non la speranza, d'una prossima pace (1). Abbondano invece le notizie personali. Per queste ha speciale importanza l'ultima lettera, già citata, del 31 gennaio 1795, nella quale il Viale dice di sperare che una copia delle sue *Rime* (stampate a Genova colla data del 1794) sia giunta al Somis, si riconferma " vero nemico del matrimonio " *sicuti est* al dì d'oggi " e, nel lungo brano, che trascriverò, c'informa delle sue occupazioni, dei suoi sentimenti e, indirettamente, anche della sua età: " Voi mi cercate graziosamente " il motivo delle mie noie e delle mie inquietudini. O amico!

---

(1) " Se fossero valevoli i miei voti a richiamare la pace, credo che pos- " siate esser certo, che più non sarebbe a quest'ora dall'universo inutilmente " sospirata. Ma nonostante gli iterati desiderii delle anime oneste credo che " non ne sia mai stata tanto lontana l'apparenza. Voglia il Cielo supplire " a quello che manca per tanto compire ".

" *longae ambages*: ma giacchè la vostra amicizia non isdegna
" d'interessarsi tanto per me, soffritene un accorciato racconto.
" Fa male i suoi conti chi vive tra 20 e 25 anni lungamente
" in un paese, ch'esser non deve il suo soggiorno. Sì il morale
" che il fisico non può a meno di non avvezzarcisi, e per quanta
" filosofia uom s'abbia, debbe risentirsi, ed a lungo, nello staccar-
" sene. Avvezzo ai colti amici di Torino, attaccato col cuore e
" con lo spirito ad un paese, che amo e per genio e per gra-
" titudine, dovetti, come ben vi è noto, improvvisamente stac-
" carmene. Passata pertanto la prima gioia, che deriva natural-
" mente dal rivedere i parenti, mi sono trovato quasi in un
" deserto abbenchè in mezzo della mia patria. Qui tutto è com-
" mercio. Contento d'una moderata fortuna, e alieno, non per virtù
" ma per carattere, dal tesaurizzare, io mi trovo straniero nella
" folla dei molti *inricchitori*, e la mia logica è diversa dalla
" loro. Inoltre abbiamo qui delle persone di lettere, ma tutti
" fatti a partito, e a cui cadrebbe bene il testo d'Orazio: *signum*
" *inter cornua porto* (1). Amante io però della pace, mi sono riso-
" luto a vivermela solo co' miei scritti e co' miei libri. Ma avendo
" un'anima forse troppo ardente, mi avvidi che questo non ba-
" stava: rinvenivano vive le memorie delle nostre dolcissime
" Accademie, degli amici lasciati, dei giorni felici che avevo
" passati, e la mia tranquillità ne soffriva. Risolvetti pertanto
" di metter mano a un lavoro, che mi fiaccasse per così dire
" l'immaginazione, e, se non il cuore, almeno mi riempisse lo
" spirito: quindi arditamente mi cimentai a tradurre l'*Eneide*
" di Virgilio. Faticai molti mesi e indefessamente, sicchè già ne
" ho tradotti tre libri e mezzo. Ma tra la soverchia applica-
" zione, il cangiamento de' cibi e del clima, mi si sfiancò lo
" stomaco, e ne rimasi pieno d'ipocondrie e di flati, e nella im-

---

(1) Quest'emistichio non è d'Orazio, e l'ho cercato invano anche nel *Thesaurus linguae latinae*, alla v. *cornu*. Credo però che il Viale abbia fatto confusione, ricordandosi vagamente della *Sat.* I, 4, 34 " *Foenum habet in cornu: longe fuge* ". Quanto alle altre due frasi latine usate dal Viale, notiamo che " *longis ambagibus* " è in Orazio, *Epist.* I, 7, 82; e che l'ultima deriva probabilmente da Virgilio, *Aen.* IV, 4-5 " *haerent infixi pectore vultus — verbaque* ", con una variante, che può ricondursi all' " *haesit sub gutture vulnus* " dello stesso Virgilio, *Aen.* VII, 533.

“ possibilità di ulteriormente lavorare, e vuoto di cuore e di
“ spirito. Tal fu per gran tempo la mia situazione, e ora appena
“ comincio a respirarne, a forza di lottare meco stesso. Riprendo
“ da pochi giorni in qua le mie occupazioni; ma *haeret infixum*
“ *pectore vulnus,* e non ho altra consolazione che quella di leg-
“ gere le lettere degli amici, che pur ancora di me si ricordano.
“ Ma oramai avrete abbastanza di questa lunga diatriba. Con-
“ tinuate ad amarmi, a consolarmi colla dolcezza delle vostre
“ lettere, e credetemi quale sarò immutabilmente coll'amicizia
“ più sviscerata e sincera

“ Tutto vostro Aff.^mo^

“ Ambrogio Viale „

La cultura dello spirito come ideale pedagogico.

Nota I del Socio nazionale residente GIOVANNI VIDARI.

1.

Ideale è, non un termine fisso ed esteriore al soggetto operante, conseguito il quale, l'azione stessa non ha più motivo di essere continuata, bensì *un oggetto del volere, che ha sua sussistenza nell'atto medesimo in cui è voluto*, ed è, perciò, tutto interiore al soggetto e alla sua vita spirituale. Per un lato lo trascende sempre, perchè sta innanzi al volere come un oggetto del suo conato, e per un altro gli è sempre immanente, perchè il volere lo consegue nell'atto in cui se lo pone, cioè nell'atto in cui lo vuole. Si attua, insomma, nella vita dello spirito intesa nella sua interiorità una continua sintesi dei termini opposti, oggettivo e soggettivo, sintesi, però, non definitiva, non piena, non assoluta, perchè i due termini non si fondono in uno, ma soltanto si richiamano mutuamente in modo inscindibile, o si accostano in un collegamento o rapporto essenziale, che ha poi in se stesso, per la natura dei termini, la forza viva che lo sospinge a nuove antitesi e a sintesi successive (1).

Ora, che si possa parlare di un ideale pedagogico, come si parla di un ideale etico, è problema a cui i dati storici e psicologici (2) possono offrire una soluzione.

I dati storici infatti dimostrano che *gli istituti, i metodi, gli atteggiamenti e gli strumenti educativi*, per quanto variamente determinati dalle condizioni sociali della religione e del costume, della filosofia e della politica, della scienza e della tecnica, per

(1) Cfr. mia *Etica*[4] (Hoepli ed., 1917).
(2) Cfr. il mio vol. *I dati della Pedagogia* (Milano, Hoepli, 1916).

quanto rivolti al conseguimento di fini immediati particolarmente rispondenti ai bisogni della società stessa, *hanno avuto* poi in fondo sempre *per effetto*, più o meno avvertito, *di mettere in azione alcune o parecchie o molte forme di energia spirituale*: ora il pensiero speculativo, ora il sentimento estetico o il religioso o quello propriamente sociale (attaccamento alla famiglia, devozione ai capi, fedeltà alle tradizioni etc.), ora la volontà di espansione, di dominio e di organizzazione, ora lo spirito pratico produttore di effetti utili, ora parecchie di queste energie insieme variamente combinate. E l'esercizio, che così veniva promosso, senza essere di proposito, almeno in origine, ricercato, determinava necessariamente, al di là dei fini singoli ed empirici, un miglioramento delle stesse energie spirituali, cioè acutezza e profondità di pensiero, fervore e delicatezza di sentimento, forza e fermezza di volontà, agilità prontezza sicurezza d'azione; e in fine, contribuendo ad arricchire e intensificare la vita individuale, conferiva a chi ne era provvisto una superiorità di valore e di potenza, epperò anche di autorità in confronto degli altri.

Ma una seconda serie importante di conseguenze connesse con l'esercizio dei poteri spirituali, che è provocato dalla volontà dei fini empirici immediati, si rivela nel fatto che *lo sviluppo e il perfezionamento*, in ricchezza e vigoria di contenuto, *di quei medesimi poteri appare* in processo di tempo, ed è più o meno chiaramente avvertito, come la *condizione fondamentale perchè gli stessi fini empirici vengano conseguiti,* e i bisogni sociali di varia natura, a cui essi sono ordinati, trovino soddisfazione. Dall'esterno si passa all'interno: dalla esperienza di ciò che appariva più direttamente necessario si passa alla coscienza riflessa dell'attività spirituale come fonte prima ed essenziale di ogni azione, anzi di ogni vita. Dal proposito iniziale di conservare le tradizioni avite, celebrando i riti e tutelandone le istituzioni, si passa all'esercizio e al culto delle doti spirituali, come la fedeltà e l'ubbidienza, che sono la condizione fondamentale per il conseguimento di quei fini; dal proposito iniziale di dar forma e figura di bellezza alle immagini della divinità si passa all'esercizio e al culto delle attitudini artistiche e del sentimento estetico; dalla necessità primitiva di sostenere l'assalto nemico nella difesa dell'ara e del focolare si passa all'esercizio e al culto delle attitudini militari e dei sentimenti più

civili; dalla necessità primitiva di provvedersi mezzi e utensili per i bisogni più urgenti si passa all'esercizio e al culto delle attitudini pratiche e industriali e tecniche. Così l'uomo è andato scoprendo, in maniera più o men chiara e con coscienza più o men vigile e con effetti più o men vasti e profondi, la propria attività spirituale nelle varietà molteplici delle sue forme, come degna di essere esercitata e svolta per una esplicazione di sè e una produzione sempre migliore in rapporto coi fini proposti.

Senonchè in uno stadio ulteriore accade anche che le attività spirituali così esercitate e svolte vengano appercepite, non per i loro legami con i fini immediati, ai quali erano in origine e possono tuttavia sempre esser rivolte, epperò neppure con i bisogni specifici della società corrispondente, ma per se stesse, cioè come oggetto in sè di esercizio e di culto. Allora *il valore*, che ad esse si attribuiva in base alla considerazione del loro rapporto con i fini esterni, *si fa scaturire dalla loro intima natura, dalla loro stessa essenza spirituale*: la vigoria e l'acutezza del pensiero, la delicatezza, il fervore del sentimento, la destrezza e sicurezza dello spirito pratico, la saldezza e forza della volontà, hanno valore dinanzi alla coscienza non più per i fini a cui possono esser rivolti e che possono, o non possono, per circostanze esterne, conseguire, ma per se stesse, cioè per la loro qualità di energie spirituali, o di forme nelle quali la vita dello spirito si manifesta. E allora naturalmente l'esercizio e lo svolgimento di tal potere e l'acquisto di tali qualità appaiono come degni di essere promossi e voluti; e l'educazione prima rivolta al conseguimento di fini esterni, empirici determinati contingenti, è rivolta al conseguimento o all'attuazione dei valori spirituali, del tutto interiori, non precisamente determinabili, non variabili a seconda delle circostanze, ma permanenti e fondamentali. La legge della *eterogenesi dei fini*, che qui può vedersi ancora una volta attuata, come quella che significa il sorgere di nuovi fini al di là e al di sopra di quelli originariamente proposti, trova però un'applicazione essenzialmente spirituale, perchè il fine nuovo che sorge dal conseguimento dei fini empirici immediati proposti alla educazione è nella stessa attività del soggetto e nell'esercizio de' suoi poteri. Allora LA CULTURA DELLO SPIRITO si presenta e si impone come il TERMINE IDEALE DELL'OPERA EDUCATIVA: termine per modo di dire, perchè in realtà

la cultura dello spirito si presenta come intrinseca alla vita stessa spirituale, epperò non terminata nè terminabile, infinita con essa e al par di essa. Ma quel che qui ora preme di considerare gli è che la rivelazione della cultura spirituale come ideale di educazione, come non è il frutto di una arbitraria escogitazione individuale, così non dipende neppure da circostanze accidentali, ma *è il risultato necessario della stessa evoluzione spirituale*: dalla attività rivolta al conseguimento dei fini esteriori si è passati necessariamente all'esercizio e allo sviluppo dei poteri spirituali e poi al culto di questi stessi e all'affermazione di un loro intrinseco valore. È un processo naturale che ha sua ragione d'essere nella natura della vita spirituale, che procede dall'esterno all'interno, e da una coscienza immediata a una coscienza mediata o riflessa del proprio valore. Cosicchè LA CULTURA DELLO SPIRITO o il nutrimento, l'arricchimento e l'espansione dei poteri spirituali APPARE VERAMENTE COME UN IDEALE *nel pieno senso della parola, cioè come un principio supremo direttivo della condotta e intrinseco alla vita dello spirito.*

Le quali cose tutte trovano per altro *conferma nello studio della evoluzione psicologica del soggetto educando.* Perchè il materiale empirico, di cui la coscienza si nutre e per cui le attività dalle più semplici alle più complesse si svolgono, le relazioni sociali dalle più povere e più ristrette alle più ricche e più ampie, attraverso le quali lo sviluppo si compie, le opere dalle più umili e insignificanti del bambino a quelle più alte e importanti dell'adolescente e del giovine, non costituiscono in fondo altro che il complesso delle condizioni che rendono possibile o che in realtà attuano il dispiegamento, la maturazione e il pieno possesso delle energie e facoltà spirituali. Si direbbe che la natura non tanto vuole che il bambino giuochi, quanto piuttosto che nel giuoco dispieghi le sue energie; che il fanciullo nel suo moto incomposto e nel suo impulso alla analisi e alla distruzione raccolga stimoli ed elementi onde tutto il suo essere si svolga; che l'adolescente nel suo anelito verso il misterioso e l'infinito apra orizzonti sempre più vasti all'esercizio de' suoi poteri spirituali. Non sono, insomma, i fini immediati e reali quelli nei quali s'appaga l'anima nel suo sviluppo, ma essi son piuttosto come gli istrumenti o i ponti per conquistar qualcosa

che sta al di là di essi, cioè appunto nello spirito medesimo che si svolge. Anche qui *la cultura dello spirito è il vero senso riposto o la ragione profonda di azioni rivolte in apparenza ad altri fini.* E la riprova si ha per converso nel fatto che là dove il complesso delle circostanze esterne costituito dagli stimoli sensibili, dalle relazioni sociali, dagli atti pratici coesiste con un sicuro e preciso conseguimento dei fini concreti, ma senza che vi si accompagni un esercizio attivo dei poteri spirituali, in realtà si assiste a un arresto di sviluppo e ad una meccanizzazione di tutta la vita; là dove lo spirito non è capace più, o per un moto spontaneo o per un moto riflesso, di coltivarsi, lo spirito si fissa negli schemi meccanici, e in essi si spegne.

2.

La cultura dello spirito può dirsi, adunque, il vero ideale dell'opera educativa, che traluce dalla evoluzione storica del fatto pedagogico e dallo sviluppo psicologico.

Ma determiniamo con maggior precisione CHE COSA PER CULTURA SI INTENDA.

Anzitutto conviene osservare che il termine “ cultura „ suolsi nel linguaggio comune accogliere con una estensione ristretta e intellettuale: cioè con riferimento esclusivo alle operazioni e agli atteggiamenti dell'intelligenza e della ragione; così usasi dire spirito cólto quello che nell'esercizio dei poteri intellettuali, epperò anche nel perfezionamento delle qualità e degli acquisti che li caratterizzano, abbia raggiunto un alto grado.

Ma in verità non vi è nessuna ragione di limitare in questo modo l'accezione e l'applicazione del concetto. A meno di sostenere (ma la proposizione deve essere dimostrata) che i poteri intellettuali traggono seco nella loro cultura quella di tutti gli altri poteri spirituali, a meno di sostenere, cioè, che la funzione della intelligenza è centrale e fondamentale per rispetto a tutta quanta la vita dell'anima, bisogna ammettere che il termine di cultura possa estendersi più largamente, che, cioè, si possa parlare del pari di una cultura del sentimento e del volere, dato che sentimento e volere siano pure forme di manifestazioni delle energie spirituali, e in genere di una cultura di qualunque ele-

mento o aspetto della vita dello spirito. Onde *il termine di cultura può essere capace di una estensione e applicazione non ristretta e intellettuale, ma ampia e generale*; epperò spirito culto dovrebbe poter significare quello che nell'esercizio di tutti i poteri e nel perfezionamento delle qualità acquisizioni attitudini atteggiamenti che son loro caratteristici, ha conseguito un alto grado.

In tutto questo è implicita un'altra nota della cultura quale viene da noi intesa. Infatti, se noi vogliamo riferirci essenzialmente a tutti i poteri spirituali o, meglio, allo spirito qualunque sia l'attività nella quale esso si presenta, abbiamo di mira *non tanto gli oggetti* nei quali l'attività stessa si manifesta, le cose pensate o sentite o volute, *quanto il soggetto* medesimo nella esplicazione o nell'esercizio della sua propria attività. Se le espressioni di cultura scientifica o artistica o pratica si riferiscono al complesso degli elementi di pensiero sentimento volere, le espressioni invece di spirito scientificamente o artisticamente o praticamente culto riguardano l'indirizzo e le attitudini che assume la vita del soggetto. Se poi, d'altra parte, il complesso degli oggetti costituisce la materia onde la corrente dello spirito si alimenta, e *il soggetto imprime ad essa corrente la forma*, per cui la materia si ordina e si indirizza, acquista un senso e un valore, cioè insomma diventa contenuto spirituale, potremo dire che *la cultura*, appunto perchè intesa in senso soggettivo, *è anche intesa in senso formale.* Lo spirito forma; e tutto ciò che è veramente spirituale è formale.

Cosicchè spirito culto non significa tanto spirito ricco di un contenuto spirituale molteplice, quanto piuttosto atto a imprimere la propria forma a una qualunque, o ampia o angusta, materia, a espandere indefinitamente la propria attività in quello che essa ha di essenzialmente caratteristico.

La cultura viene, dunque, da noi intesa come la forma che assume la vita spirituale del soggetto in quanto, nella elaborazione della molteplice esperienza, esercita esplica ed espande i proprii poteri: epperò l'educazione ci appare, da un punto di vista deontologico, rivolta, non a conseguire questo o quel fine determinato come la preparazione dell'educando alla vita del suo tempo, o l'addestramento pratico e professionale, o anche la costituzione di un carattere fermo e forte, nei suoi, anche nobili, propositi, bensì a conseguire quella forma di vita dello

spirito, per la quale tutti questi fini concreti e qualunque altro che dalle circostanze esteriori potrebbe emergere possano essere attuati, a imprimere quindi il suggello di una viva e consapevole spiritualità su tutto il materiale della esperienza, a FARE insomma DELLA ENERGIA INTERNA, intesa in tutta la estensione sua, IL VALIDO E SICURO ARTEFICE DELLA VITA E DEL MONDO UMANO.

Senonchè a questo punto può ricomparire un'obbiezione, che già altre volte ci è accaduto d'incontrare. Si dirà infatti da un lato: la distinzione di soggetto e oggetto, di forma e materia risponde soltanto a un'apparenza, non alla realtà: l'oggetto non esiste fuori del soggetto, la materia fuori della forma; tutto è nello spirito; anzi, tutto è lo spirito. E si dirà dall'altra parte: una cultura puramente formale è una fantasia, e, in realtà, nessun potere spirituale si esercita e si perfeziona o si coltiva per sè, ma sempre e soltanto in vista di fini particolari e sulla base di un dato materiale concreto. Da una parte coloro che intendono la cultura dello spirito in modo assolutamente interiore e soggettivo, epperò negano qualunque riferimento a un materiale distinto dall'atto in cui lo spirito vive; dall'altra coloro che, avendo l'occhio fisso sui dati esteriori e sugli atti singoli, nei quali essi vengono elaborati e dominati, negano ogni possibilità di cultura formale.

Agli uni noi rispondiamo: la distinzione nell'attività dello spirito fra soggetto e oggetto, tra forma e materia non può non essere accettata anche dall'idealismo, e la sintesi a priori, che costituisce il suo vanto, non può non essere la sintesi di due elementi contrapposti sì, ma non confusi. L'idealismo assoluto però va più in là, e va al di là delle premesse, quando senz'altro afferma che, se l'oggetto si concepisca come esteriore al soggetto o distinto da esso, allora non è più vivo di vita spirituale, diventa materia morta, cosicchè bisogna pensarlo come identificato col soggetto stesso nell'atto in cui questo opera. Ma l'atto, in cui così vien concentrata tutta la vita spirituale, non è più neppure una sintesi, o un rapporto posto e affermato a priori fra termini opposti, non è più il giudizio in cui la mente si esprime, ma è un atto super-intellettuale o mistico, una apparizione subitanea di luce spirituale, in cui nulla più si scorge e nessun predicato più si applica, neppur quello della esistenza;

perchè, se si affermasse che l'atto esiste, esso cesserebbe, *ipso facto*, di essere atto. D'altra parte l'atto medesimo, come fulgurazione mistica, non è conciliabile con la successione ordinata dei momenti della vita spirituale o con la loro connessione dialettica: se oggetto e soggetto si identificano nell'atto spirituale, non si vede più per qual nesso dall'un atto si passi all'altro, perchè in fondo ciascun atto è completo e perfetto in sè: ogni atto è lo spirito, tutto lo spirito, tutto il processo dello spirito. La stessa dialettica, come processo della vita dello spirito, è dunque inesplicabile con l'idea dell'atto puro. E la inaccettabilità delle conseguenze, a cui arriva la tesi dell'idealismo assoluto, fa sì che non possiamo ammetterne il punto di partenza, cioè la negazione della distinzione fra soggetto e oggetto, tra forma e materia.

Agli oppositori dell'altra specie rispondiamo: la possibilità della cultura formale è in fondo ammessa anche dai realisti in quanto essi non possono negare che attraverso il conseguimento dei fini positivi e sulla base dei dati di esperienza si esercitano in fatto e si possono perfezionare i poteri dello spirito; soltanto essi negano che la cultura formale debba costituire il termine ideale dell'opera educativa. Ma essi evidentemente scambiano l'ordine delle cause con quello dei valori, il nesso eziologico con quello teleologico; laddove ciò che è primo nel primo ordine, non può esser primo nel secondo. È evidente che ciò che è causa nel primo è mezzo nel secondo, epperò ha valore subordinato al fine, il quale invece nell'ordine causale è l'effetto. Dunque, se la cultura dello spirito è l'effetto a cui conduce il conseguimento degli oggetti sui quali si esercitano pensiero sentimento volere, essa è necessariamente il fine, a cui l'uso di tali oggetti può essere ordinato. D'altra parte non si può ammettere che gli oggetti dell'attività spirituale abbiano una reale sussistenza separatamente dall'attività operativa del soggetto: non solo le cognizioni, le abilità, gli abiti hanno valore in rapporto con la cultura generale del soggetto e con la sua capacità di agire e di produrre, cioè, insomma, di attuare veramente tutto il proprio essere, ma anche essi sussistono in rapporto col modo come lo spirito agisce o reagisce nell'atto di accoglierli: le cognizioni sono o non sono mezzi di educazione pratica, gli abiti sono o non sono mezzi di educazione morale, le abilità sono o non sono mezzi

di educazione pratica ecc., a seconda del modo come essi sono e operano nello spirito, a seconda della guisa con cui di fronte ad essi o in essi agiscono i poteri attivi del soggetto, quali l'attenzione la sintesi la volontà la ragione.

Anche da questa parte, adunque, ci si rivela la giustezza della tesi fondamentale da noi sostenuta, e che si riassume così: 1° *la cultura dello spirito*, cioè il perfezionamento progressivo dei poteri spirituali, *è veramente l'ideale pedagogico*; 2° siccome però la forma non è disgiungibile dalla materia, il soggetto dall'oggetto, nè d'altra parte questo è confondibile con quello o riducibile ad esso; o in altre parole, siccome il processo sintetico che caratterizza la vita spirituale è collegamento unitario di due distinti termini, non annullamento dell'uno nell'altro, così *la cultura è sempre da pensarsi come compientesi in rapporto con oggetti e con atti speciali e appropriati, nei quali e per i quali la vita del soggetto si attua* (1).

---

(1) “ La forma non è materia, ma è la forma della materia; unità; “ senza della quale non ci sarebbe nessuno di quegli elementi, di cui la “ materia, in quanto materia, è l'aggregato. Come, reciprocamente, senza “ la materia non ci sarebbe la forma; questa essendo non altro che forma “ della materia „. Varisco, *Conosci te stesso*, 161.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

PROGRAMMA DEI PREMI

DI

FONDAZIONE VALLAURI

PEI

Quadrienni 1915-1918 e 1919-1922

La Reale Accademia delle Scienze di Torino annuncia che, in esecuzione delle disposizioni testamentarie del Socio Senatore Tommaso Vallauri, conferirà un premio *a quello scienziato italiano o straniero che, nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1915 al 31 dicembre 1918, abbia pubblicato colle stampe l'opera più ragguardevole e più celebre su alcuna delle scienze fisiche*, interpretando l'espressione " scienze fisiche „ nel senso più largo. Questo premio sarà di lire italiane **ventiseimila** (26 000).

Per le stesse disposizioni ha stabilito un altro premio da conferirsi *a quel letterato italiano o straniero che avrà stampato la migliore opera critica sopra la letteratura latina nel quadriennio decorrente dal 1° gennaio 1919 al 31 dicembre 1922*. Questo secondo premio sarà di lire italiane **venticinquemila** (25 000).

I premi saranno conferiti un anno dopo le rispettive scadenze.

Essi non potranno mai essere assegnati ai Soci nazionali dell'Accademia, sì residenti come non residenti.

Le opere, che saranno inviate all'Accademia perchè siano prese in considerazione per il premio, non saranno restituite.

Non si terrà conto alcuno nè dei manoscritti, nè delle opere dattilografate.

30 gennaio, 1917.

Il Presidente dell'Accademia
Lorenzo Camerano

Il Segretario della Classe
di scienze fisiche, matematiche e naturali
Carlo Fabrizio Parona

Il Segretario della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

PROGRAMME DES PRIX QUADRIENNAUX

DE LA

FONDATION VALLAURI

(1915-1918 et 1919-1922)

I. L'Académie Royale des Sciences de Turin, se conformant aux dispositions testamentaires du Sénateur Thomas Vallauri, membre de l'Académie, annonce qu'un prix de la valeur de **vingt-six mille** (26 000) livres ital. sera décerné au savant italien ou étranger qui, dans la période de quatre ans à partir du 1er janvier 1915, aura fait paraître l'ouvrage le plus remarquable et le plus célèbre dans l'ordre des sciences physiques, en donnant à cette expression le sens le plus étendu.

II. Se référant aux mêmes dispositions, l'Académie a constitué un prix de la valeur de **vingt-cinq mille** (25 000) livres ital., lequel sera décerné au meilleur ouvrage critique relatif à la littérature latine, publié dans la période de quatre ans à partir du 1er janvier 1919.

Les deux prix seront attribués un an après le terme fixé pour chaque échéance.

Sont exclus de ces prix les ouvrages des membres associés nationaux, résidants ou non résidants.

L'Académie ne rend aucun des ouvrages qui ont été soumis à son examen, et ne tient aucun compte des ouvrages manuscrits ou dactylographiés.

Turin, le 30 janvier 1917.

Le Président de l'Académie
Lorenzo Camerano

Le Secrétaire de la Classe
des sciences physiq., mathém. et naturelles
Carlo Fabrizio Parona

Le Secrétaire de la Classe
des sciences morales, historiq. et philolog.
Ettore Stampini

PROGRAMME FOR THE PRIZE

OF THE

VALLAURI FOUNDATION

for the periods 1915-1918 and 1919-1922

Notice is hereby given by the Turin Royal Academy of Sciences, that, in conformity to the will of the late Member Senatore TOMMASO VALLAURI, a prize shall be awarded to the scholar, of whatever nationality, who during the period 1st January 1915-31st December 1918, will have published the most conspicuous and renowned work dealing with one of the physical sciences, giving the widest meaning to the words ' physical sciences '.

The prize amounts to **twenty-six thousand** (26 000) *lire italiane.*

In conformity to the above-mentioned will, the Academy has appointed another prize, to be awarded to the literary person, who will have printed the best critical work on Latin Literature, during the period 1st January 1919-31st December 1922. This second prize amounts to **twenty-five thousand** (25 000) *lire italiane.*

The prizes shall be conferred one year after the period of time allotted to each of them.

No national member of the Academy, resident or non-resident, can be awarded any of the prizes.

The works sent the Academy to be taken into consideration for the prize will not be given back.

No account whatever is made of manuscripts and type-written works.

30th January 1917.

The President of the Academy
LORENZO CAMERANO

The Secretary of the Class
of physical, mathematical and natural sciences
CARLO FABRIZIO PARONA

The Secretary of the Class
of moral, historical and philological sciences
ETTORE STAMPINI

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Marzo 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Scusano l'assenza il Presidente Senatore Camerano e il Socio Segre.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente annuncia la grave perdita fatta dall'Accademia colla morte improvvisa del Socio L. Balbiano: con parola commossa accenna alle benemerenze dell'illustre collega, all'alta stima ch'Egli si era meritata come studioso, insegnante e sperimentatore nel campo della Chimica; ne ricorda le virtù, il carattere schietto e fermo e le doti d'animo, per le quali, colla stima, si era acquistato la simpatia e la benevolenza di tutti. In nome dell'Accademia tributa alla sua memoria l'omaggio più affettuoso, avvertendo che gli è giunta la notizia della volontà lasciata scritta dal compianto collega di non volere commemorazioni accademiche in suo onore. In attesa di notizie sicure da parte della famiglia, ritiene doveroso riguardo il non prendere per ora deliberazioni in proposito. Le condoglianze dell'Accademia alla Famiglia furono personalmente presentate dal Segretario della Classe per incarico del Presidente.

Presentano in omaggio, e ne parlano: il Socio Mattirolo il suo discorso *La frutticultura in Piemonte nella storia, nell'arte e nei suoi rapporti colla R. Accademia d'Agricoltura di Torino*; il Socio Grassi la seconda edizione (1896) della *Termodinamica, introduzione al corso di Fisica applicata.*

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Jadanza la sua Nota: *Teoria elementare del cannocchiale terrestre accorciato*;

Il Socio Peano la Nota 2ª: *Approssimazioni numeriche.*

Il Presidente comunica la circolare relativa alle onoranze al Senatore Prof. Giovanni Celoria in occasione del suo collocamento a riposo, e dà lettura di altra circolare del Comitato di Torino per la Società Nazionale " Dante Alighieri „ collo scopo patriottico di promuovere una serie di conferenze di propaganda dirette a rinvigorire la fiducia nella vittoria.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procede alla elezione del Direttore di Classe, essendo scaduto per compiuto triennio il Socio Prof. Senatore Enrico D'Ovidio, e riesce riconfermato per un nuovo triennio lo stesso Socio D'Ovidio, salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

Teoria elementare del cannocchiale terrestre accorciato.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Problema I.

a) *È data una lente* M *di distanza focale* φ_1*; alla distanza* $m\varphi_1$ *da essa si pone un oggetto* VIRTUALE*; a che distanza dalla lente si formerà la immagine reale di esso?*

Detta x tale distanza si avrà:

$$-\frac{1}{m\varphi_1}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\varphi_1}$$

e quindi

$$x=\frac{m}{m+1}\varphi_1. \tag{1}$$

Questa immagine *reale* sarà distante dal secondo fuoco di essa lente di un segmento eguale a $\varphi_1 - x$ dato da

$$\varphi_1 - x=\frac{\varphi_1}{m+1}. \tag{2}$$

b) *Posta nel secondo fuoco della lente* M *una seconda lente convergente* N, *quale dev'essere la distanza focale di questa lente affinchè essa dia una immagine della immagine data dalla prima lente situata ad una distanza eguale anche a* $m\varphi_1$ *dalla prima lente?*

Se φ_2 è la distanza focale di questa seconda lente sarà:

$$\frac{m+1}{\varphi_1}+\frac{1}{(m-1)\varphi_1}=\frac{1}{\varphi_2}$$

donde

$$\varphi_2=\frac{m-1}{m^2}\varphi_1. \tag{3}$$

c) *Volendo che il rapporto di similitudine tra questa immagine e l'oggetto virtuale sia* $= -1$, *quale valore si deve dare ad* m?

Il rapporto di similitudine tra l'immagine e l'oggetto in una lente si calcola mediante la formola $G = \frac{\varphi}{\varphi - p}$.

Indicando con G_1 quello della prima e con G_2 quello della seconda si avrà:

$$G_1 = \frac{1}{1+m}$$

e

$$G_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{m+1}},$$

dal quale, ponendo il valore di φ_2 dato dalla (3), si ottiene:

$$G_2 = 1 - m^2.$$

Il rapporto di similitudine del sistema composto delle due lenti sarà $G = G_1 G_2$, ossia

$$G = \frac{1-m^2}{1+m} = 1 - m.$$

Perchè sia $G = -1$, dovrà essere:

$$m = 2.$$

In tal caso si avrà:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{4}; \qquad x = \frac{2}{3}\varphi_1; \qquad \varphi_1 - x = \frac{\varphi_1}{3} = \frac{4}{3}\varphi_2.$$

Il sistema composto di due lenti ora descritto è rappresentato dalla figura (1^a) qui annessa. La lente N di distanza focale $= \frac{\varphi_1}{4}$ è situata nel secondo fuoco della lente M. L'oggetto virtuale AB si trova ad una distanza $= 2\varphi_1$ dalla lente M che ne dà l'immagine $A'B'$ reale la quale si trova distante dalla seconda lente N di un segmento $= \varphi_2 + \frac{1}{3}\varphi_2$. Questa lente

ne dà una immagine A^*B^* reale, situata nello stesso sito dell'oggetto AB, della stessa grandezza e capovolta.

Un sistema cosiffatto può servire come apparecchio di *raddrizzamento* in un cannocchiale terrestre. La immagine data

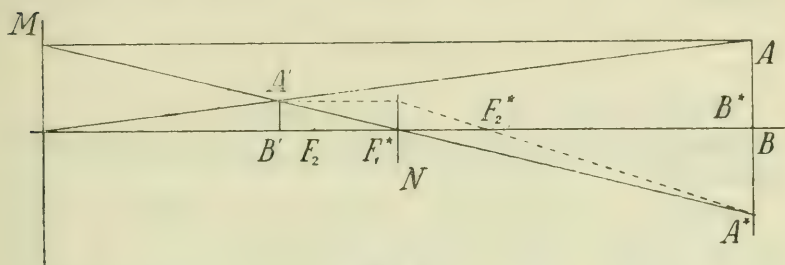



Fig. 1ª.

dall'obbiettivo del cannocchiale si dovrà trovare in AB; ivi si troverà la immagine capovolta A^*B^*. Codesto cannocchiale terrestre avrà la medesima lunghezza del cannocchiale astronomico avente il medesimo obbiettivo ed il medesimo oculare.

Problema II.

a) Identico al problema I.

b) *Posta nel secondo fuoco della lente* M *una seconda lente convergente* N, *quale dev'essere la distanza focale di questa affinchè essa dia una immagine della immagine data dalla prima alla distanza* $(m-1)\,\varphi_1$ *dalla lente* M*?*

Si ha:

$$\frac{m+1}{\varphi_1}+\frac{1}{(m-2)\,\varphi_1}=\frac{1}{\varphi_2},$$

donde

$$\varphi_2=\frac{(m-2)\,\varphi_1}{m^2-m-1}. \tag{4}$$

c) *Il rapporto di similitudine tra l'immagine data da questa lente e l'oggetto virtuale si vuole che sia anche* $=-1$, *quale deve essere il valore di* m*?*

Si avrà:

$$G_1 = \frac{1}{1+m}$$

$$G_2 = -(m-2)(m+1)$$

e quindi

$$G = -(m-2).$$

Dovendo essere $G = -1$, dovrà essere $m = 3$.

Il sistema di due lenti ora detto è rappresentato dalla figura (2ª).

La lente M ha la distanza focale φ_1; la lente N situata nel suo secondo fuoco ha la sua distanza focale $\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{5}$. L'oggetto virtuale AB si trova distante dalla lente M di un

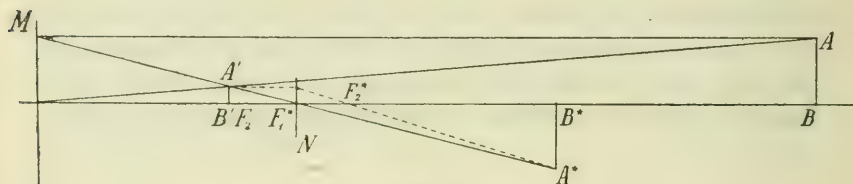



Fig. 2ª.

segmento $= 3\varphi_1$. Di tale oggetto la lente M ne dà la immagine $A'B'$ che trovasi distante dalla lente N di $\frac{5}{4}\varphi_2$. La lente N dà di esso la immagine definitiva A^*B^* che è della stessa grandezza dell'oggetto AB e capovolta.

Questo sistema di due lenti può funzionare da apparecchio di raddrizzamento nel cannocchiale terrestre. Se la immagine data dalla lente obbiettiva si fa cadere nel sito AB, la immagine capovolta si troverà nel sito A^*B^* ed il *cannocchiale terrestre sarà più corto del cannocchiale astronomico* che avesse il medesimo obbiettivo ed il medesimo oculare.

Adoperando un oculare di Huygens il campo sarà aumentato.

L'oculare acromatico di Huygens è caratterizzato da

$$\Delta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

e quindi $\varphi = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$; esso è costruito quasi sempre ponendo

$$\varphi_1 = 3\varphi_2 ; \qquad \Delta = 2\varphi_2 ,$$

e perciò si ottiene:

$$\varphi = \frac{3}{2}\varphi_2 ; \qquad F = F_1 + \frac{3}{2}\varphi_1 .$$

Si otterrà maggior campo facendolo nel modo seguente:

$$\varphi_1 = 4\varphi_2 ; \qquad \Delta = 2{,}5\varphi_2 ,$$

e quindi sarà:

$$\varphi = \frac{8}{5}\varphi_2 ; \qquad F = F_1 + \frac{8}{5}\varphi_1 .$$

Questo secondo modo di costruire l'oculare di Huygens è più conveniente nei cannocchiali terrestri accorciati ed in generale dove non è necessario mettere il reticolo.

Si comprende subito la importanza di questo cannocchiale terrestre accorciato; esso può essere adoperato per costruire

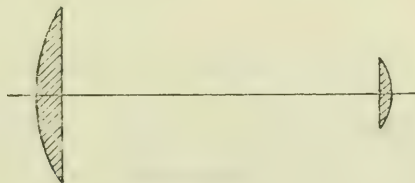



Fig. 3ª.

binoccoli da preferirsi ai comuni binoccoli Galileiani ed, in qualche caso, a quelli di Porro con prismi a riflessione.

Per comodità dei costruttori osserviamo che *l'apparecchio di raddrizzamento* della immagine che l'obbiettivo dà dell'oggetto esterno (nel quale sta la novità del nostro metodo) si può costruire con due lenti piano-convesse disposte come nella figura (3ª).

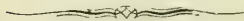
La prima (quella a sinistra) di distanza focale φ; la seconda di distanza focale $\frac{\varphi}{4}$ o $\frac{\varphi}{5}$.

Per costruire una lente piano-convessa di distanza focale φ, bisogna conoscere il raggio della sua faccia curva; esso è dato dalla formola semplicissima:

$$r = \varphi (n - 1),$$

dove n è l'indice di rifrazione della sostanza di cui si vuol formare la lente. Se p. e. la lente si vuol costruire di *Crown* il cui indice di rifrazione $n = 1{,}51857$ e si vuole che la sua distanza focale sia di 6 centimetri si avrà $r = 0^m{,}0311$. Le lenti di distanze focali $0^m{,}015$ e $0^m{,}012$, che sono la *quarta* e la *quinta* parte della prima, avranno rispettivamente per raggi delle loro superficie curve, la prima $0^m{,}00778$, la seconda $0^m{,}00623$.

N. B. — Un cannocchiale terrestre accorciato di questo tipo fu costruito già da qualche anno; esso trovasi nel Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino e porta il N° dell'inventario 307.

Torino, febbraio 1917.

Approssimazioni numeriche.

Nota II del Socio G. PEANO (*).

§ 9. — Divisione.

Si hanno le proposizioni:

1. $$a, a', b, b' \in \mathrm{Q} \,.\, a < a' \,.\, b < b' \,.\, \supset .\, (a{}^-a')/b = (a/b){}^-(a'/b) \,.$$
$$a/(b{}^-b') = (a/b'){}^-(a/b) \,.$$
$$(a{}^-a')/(b{}^-b') = (a/b'){}^-(a'/b).$$

2. $$x \in \mathrm{Interv'\,Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{d}\,(1/x) = \mathrm{d}x/(\mathrm{l}_1 x \times \mathrm{l}'x).$$

Infatti,

$$\mathrm{d}\,(1/x) = \mathrm{l}'\,(1/x) - \mathrm{l}_1\,(1/x) = 1/\mathrm{l}_1 x - 1/\mathrm{l}'x =$$
$$(\mathrm{l}'x - \mathrm{l}_1 x)/(\mathrm{l}_1 x \times \mathrm{l}'x) = \mathrm{d}x/(\mathrm{l}_1 x \times \mathrm{l}'x).$$

Si deduce:

3. $$x \in \mathrm{Interv'\,Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{d}\,(1/x) \in \mathrm{d}x/x^2,$$

formula corrispondente a quella del calcolo differenziale.

4. $$x, y \in \mathrm{Interv'\,Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{d}\,(x/y) = \mathrm{d}x/\mathrm{l}_1 y + \mathrm{l}_1 x \times \mathrm{d}y/(\mathrm{l}_1 y \times \mathrm{l}'y)$$

che si può scrivere anche:

$$\mathrm{d}\,(x/y) \in \mathrm{d}x/y + x\,\mathrm{d}y/y^2.$$

Risulta dalla proposizione 2, e dalla regola del prodotto § 5, Prop. 5.

(*) I numeri dei §§ e delle citazioni seguono quelli della Nota I.

Per calcolare, col minimo lavoro, il rapporto di due numeri espressi in cifre, conviene fare la divisione graduale, operazione inversa della moltiplicazione graduale.

Si può fare invertendo il metodo dei prodotti parziali; questo procedimento è spiegato in molti libri, col nome di " divisione abbreviata ". Si trova in KEPLERO (7).

Si può invertire la moltiplicazione fulminea. FOURIER (3), pag. 191, spiegò questa divisione fulminea, che chiamò " divisione ordinata ".

ESEMPIO. — Vogliasi calcolare $1/\pi$. Moltiplico il divisore per una potenza di 10, in modo da renderlo per esempio > 100 e < 1000; pongo $a = 100\,\pi$. Moltiplico il dividendo per una potenza di 10, in modo che divisore $<$ dividendo $<$ $10 \times$ divisore; e pongo $c = 1000$. Sarà $1/\pi = (c/a)/10$. Prendo π con 10 decimali. Faccio il calcolo col metodo dei prodotti parziali.

$c =$	1 0 0 0·0 0 0 0 0 0 0
$3 \times V_8 a =$	9 4 2 4 7 7 7 9 6 0 5
$c - 3 \times_8 a =$	5 7 5 2 2 2 0 3 9 5
$1 \times V_7 a =$	3 1 4 1 5 9 2 6 5 3
$c - 3{\cdot}1 \times_8 a =$	2 6 1 0 6 2 7 7 4 2
$8 \times V_6 a =$	2 5 1 3 2 7 4 1 2 0
$c - 3{\cdot}18 \times_8 a =$	9 7 3 5 3 6 2 2
$3 \times V_5 a =$	9 4 2 4 7 7 7 8
$c - 3{\cdot}183 \times_8 a =$	3 1 0 5 8 4 4
$0 \times V_4 a =$	0
$c - 3{\cdot}1830 \times_8 a =$	3 1 0 5 8 4 4
$9 \times V_3 a =$	2 8 2 7 4 3 1
$c - 3{\cdot}18309 \times_8 a =$	2 7 8 4 1 3
$8 \times V_2 a =$	2 5 1 3 2 0
$c - 3{\cdot}183098 \times_8 a =$	2 7 0 9 3
$8 \times V_1 a =$	2 5 1 2 8
$c - 3{\cdot}1830988 \times_8 a =$	1 9 6 5
$6 \times V_0 a =$	1 8 8 4
$c - 3{\cdot}18309886 \times_8 a =$	8 1

Posto

$$q = 3\cdot18309886$$

si ha:

$$c = q \times_8 a + 81\,X^{-8}.$$

La somma delle cifre di $q = 46$; quindi per § 8 Prop. 7 si ha:

$$q \times_8 a \leqq q \times a < q \times_8 a + 46\,X^{-8},$$

onde

$$c \leqq q \times a + 81\,X^{-8};$$

e

$$c > q \times a + 35\,X^{-8},$$

onde

$$q + 35\,X^{-8}/a < c/a < q + 81\,X^{-8}/a.$$

Siccome $35/a$ e $81/a$ sono < 1, segue $V_8\, c/a = q$,

e $$V_9\,(1/\pi) = 0\cdot318309886.$$

§ 10. — Proprietà del rapporto graduale.

$$a \,\epsilon\, Q + 1 \,.\, c \,\epsilon\, Q_0 \,.\, n \,\epsilon\, n \,.\, \supset \,.$$

1. $$c/_n a = \max N_0 X^{-n} \cap b \ni (a \times_n b \leqq c)$$ Def.

In questo §, a indica una quantità maggiore di 1; c una quantità positiva, o anche nulla; e n è un numero intero, positivo o negativo.

Allora con $c/_n a$ indico il massimo dei numeri decimali di ordine n, e b tale che il prodotto graduale di a per b non superi c.

$c/_n a$ si può chiamare “il rapporto, o quoziente, di grado n di c ad a”.

Il simbolo max, che qui comparisce, si legge “maximum”, e d è definito, cioè espresso mediante simboli più semplici, nel “Formulario” (9).

---

(9) G. Peano, “Formulario Mathematico”, ed. V, F.lli Bocca, anno 1908.

Il simbolo $\ni$ si può leggere " tale che ", e rappresenta l'operazione inversa della ϵ. Vedi il " Formulario ".

2. $$c/_n a = \mathrm{V}_n c /_n a,$$

ossia $c/_n a$ dipende solo da $\mathrm{V}_n c$, e non dalle cifre successive di c. Infatti, se $b = c/_n a$, sarà $a \times_n b \leqq c$, ed essendo il primo numero un numero decimale di grado n, ciò significa $a \times_n b \leqq \mathrm{V}_n c$.

3. $$p \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\supset .\, (\mathrm{X}^p c)/_n a = \mathrm{X}^p\, (c/_{n+p} a),$$

cioè se si moltiplica il numeratore per una potenza di X, il rapporto vien moltiplicato per la stessa potenza di X, e il suo grado aumenta del numero p. Risulta da § 7 Prop. 5.

Ponendo $p = -n$, si ha $c/_n a = \mathrm{X}^{-n} (\mathrm{X}^n c/_0 a)$, il cui grado è 0.

4. $$p \,\epsilon\, \mathrm{N} \,.\supset .\, \mathrm{V}_n\, (c/_{n+p} a) = (\mathrm{X}^p c)/_n\, (\mathrm{X}^p a),$$

cioè il valore con n decimali del rapporto di grado $n+p$, ove p è un intero positivo, vale il rapporto di grado n dei numeratore e denominatore moltiplicati per X^p.

5. $$\mathrm{V}_n\, (c/a) \leqq c/_n a.$$

Infatti, dalla definizione di rapporto graduale, si ha:

$$c < (c/_n a + \mathrm{X}^{-n}) \times_n a < (c/_n a + \mathrm{X}^{-n}) \times a,$$

onde

$$c/a < c/_n a + \mathrm{X}^{-n}, \qquad \text{e} \qquad \mathrm{V}_n\, (c/a) \leqq c/_n a.$$

6. $$\mathrm{rest}_n\, (c, a) = [\mathrm{V}_n c - (c/_n a) \times_n a]\, \mathrm{X}^n \qquad \text{Def.}$$

" $\mathrm{rest}_n\, (c, a)$, resto di grado n della divisione di c per a, vale l'espressione scritta; ed è un numero intero, positivo o nullo ".

Così, nell'esempio numerico del § 9, $\mathrm{rest}_8\, (c, a) = 81$.

7. $$c/a > \mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a + [\mathrm{rest}_n\, (\mathrm{V}_n c, \mathrm{V}_n a) - \mathrm{V}\, (\mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a) - \\ - \Sigma\, (\mathrm{C}_{-r}\, (\mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a) \,|\, r, 1 \cdots n)]\, \mathrm{X}^{-n}/a.$$

“ Il rapporto ordinario c/a è maggiore del rapporto di grado n dei valori con n decimali di c e di a, più il resto di grado n di c per a, diminuito della parte intera del quoziente, e della somma delle cifre decimali del quoziente, moltiplicato per l'unità decimale di grado n, il tutto diviso per a „.

Si può supporre che $\mathrm{V}(\mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a)$ sia di una sola cifra, o anche 0, colla moltiplicazione di c per potenze di dieci. Allora il resto di c per a dovrà essere diminuito della somma delle cifre del quoziente.

Infatti, posto $b = \mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a$, sarà:

$$c = \mathrm{V}_n a \times_n b + \mathrm{rest}_n (c, \mathrm{V}_n a)\, \mathrm{X}^{-n},$$

e per § 8 Prop. 7:

$$\mathrm{V}_n a \times_n b > a \times b - [\mathrm{V} b + \Sigma (\mathrm{C}_{-r} b \,|\, r, 1 \cdots n)]\, \mathrm{X}^{-n}.$$

Sostituisco nella precedente, e divido per a:

$$c/a > b + [\mathrm{rest}\, n (\mathrm{V}_n c, \mathrm{V}_n a) - \mathrm{V} b - \Sigma (\mathrm{C}_{-r} b \,|\, r, 1 \cdots n)]\, \mathrm{X}^{-n}/a,$$

e sostituendo a b il suo valore, si ha la proposizione.

8. $\mathrm{rest}_n (\mathrm{V}_n c, \mathrm{V}_n a) \geqq \mathrm{V} (\mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a) + \Sigma (\mathrm{C}_{-r} (\mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a) \,|\, r, 1 \cdots n)\,.$
$\supset . \mathrm{V}_n (c/a) = \mathrm{V}_n c /_n \mathrm{V}_n a\,.$

“ Se il resto della divisione graduale di c per a è maggiore, o eguale, del valore intero del quoziente, più la somma delle sue cifre decimali, allora il valore con n cifre decimali di c/a è esattamente il quoziente di grado n di $\mathrm{V}_n c$ per $\mathrm{V}_n a$ „.

Risulta dalla 5 e dalla 7.

Questa proposizione si trova in Fourier (3).

9. $a > 100 \,.\, c < 10 a \,.\, n \,\varepsilon\, 0 \cdots 10 \,.\supset . \mathrm{V}_n (c/a) \,\varepsilon\, c /_n a - (0 \cdots 1)\, \mathrm{X}^{-n}.$

“ Se a è maggiore di 100, e c è minore di $10a$, il che si può sempre supporre, dopo convenienti moltiplicazioni per potenze di 10, e se n è un numero da 0 a 10, allora il valore con n decimali di c/a è eguale al rapporto di grado n di c per a, o ne è minore di un'unità dell'ultimo ordine decimale „.

Risulta dalla proposizione 7, ove si faccia resto $= 0$, e la parte intera, e le cifre del quoziente $= 9$: sarà $c/a - V_n c/_n V_n a > -99 X^{-n}/a$, ed essendo $a > 100$, si ha la proposizione.

Si può enunciare dicendo: " Noti c ed a con un numero sufficiente di cifre, suppongo $a > 100$, e $c < 10a$, il che si ottiene trasportando il punto decimale. Allora, volendo c/a con n cifre decimali, essendo n non superiore a 10, calcolo il rapporto graduale $c/_n a$; tutte le cifre saranno esatte, salvo l'ultima che forse si deve diminuire di una unità ".

§ 11. — La divisione fulminea.

Il rapporto graduale $V_n c/_n V_n a$ si può pure calcolare invertendo la moltiplicazione fulminea. Fourier ne diede due esempi numerici, riprodotti in pochi libri. Forse le spiegazioni che seguono contribuiranno a diffondere questa importante operazione aritmetica.

Il problema è questo. Supponiamo noti $V_{n-1} c$, $V_{n-1} a$, e di aver calcolato il loro rapporto graduale $b = V_{n-1} c/_{n-1} V_{n-1} a$, ove $n \in N$. Noti ancora $C_{-n} c$ e $C_{-n} a$, cioè le cifre n-esime del numeratore e del denominatore, vuolsi calcolare $V_n c/_n V_n a$.

Pongasi perciò

$$V_n c/_n V_n a = b + x X^{-n},$$

ove x è la cifra a determinarsi. Essa dovrà essere la massima cifra soddisfacente la condizione

$$V_n a \times_n (b + x X^{-n}) \leqq V_n c,$$

ossia

$$V_n a \times_n b + V a \times x \times X^{-n} \leqq V_n c,$$

e ancora

$$V a \times x \leqq (V_n c - V_n a \times_n b) X^n.$$

Per continuare, faccio la convenzione:

1. $a, b \in Q . m \in n . \supset . P_m(a, b) = \Sigma [C_{-r} a \times C_{-m+r} b | r, n]$ Def.

" Essendo a e b due quantità, e m un intero, con $P_m(a, b)$ intendo la somma dei prodotti delle cifre di a per quelle di b,

ove la somma dei gradi delle cifre sia $-m$ „. L'indice r, rispetto cui si fa la somma, si può anche limitare fra — ord a e ord $b-m$. Questo $P_m(a, b)$ si può calcolare, come si è detto, scrivendo le cifre di b sopra una striscia di carta, che si inverte, e si pone sotto a, in modo che $C_0 a$ corrisponda $C_{-m} b$, e poi si fa la somma dei prodotti delle cifre corrispondenti.

Allora la Prop. 3 del § 7 si può scrivere:

2. $a, b \,\epsilon\, Q \,.\, n \,\epsilon\, n \,.\, \supset \,.\, a \times_n b = \Sigma\, [P_m(a, b)\, X^{-m} \mid m, n - N_0]$.

Il prodotto graduale $V_n a \times_n V_n b$ si può esprimere mediante il precedente:

3. $a, b \,\epsilon\, Q \,.\, n \,\epsilon\, N \,.\, \supset \,.\, V_n a \times_n V_n b = V_{n-1} a \times_{n-1} V_{n-1} b +$
$[V a \times C_{-n} b + V b \times C_{-n} a + P_n(Ma, Mb)]\, X^{-n}$.

Di qui, poichè $V_0 a \times_0 V_0 b = V a \times V b$, si ricava $V_1 a \times_1 V_1 b$, poi $V_2 a \times_2 V_2 b$, ecc.

Ritornando al nostro problema, la condizione

$$V a \times x \leqq (V_n c - V_n a \times_n b)\, X^n,$$

ove si sostituisca

$$V_n c = V_{n-1} c + (C_{-n} c)\, X^{-n},$$
$$V_{n-1} c = V_{n-1} a \times_{n-1} b + \mathrm{rest}_{n-1}(V_{n-1} c, V_{n-1} a)\, X^{-n+1},$$
$$V_n a \times_n b = V_{n-1} a \times_{n-1} b + [C_{-n} a \times V b + P_n(Ma, Mb)]\, X^{-n},$$

e ove si ponga

$$H_n(c, a) = \mathrm{rest}_{n-1}(V_{n-1} c, V_{n-1} a)\, X + C_{-n} c - C_{-n} a \times V b - P_n(Ma, Mb),$$

si trasforma nell'altra

$$V a \times x \leqq H_n(c, a)$$

ed x, o $C_{-n}(V_n c /_n V_n a)$, sarà la massima cifra soddisfacente questa condizione:

$$x = \max 0 \cdots 9 \cap z \ni [V a \times z \leqq H_n(c, a)].$$

Questa condizione determina effettivamente la cifra incognita x, se $H_n \geqq 0$. Se $H_n \geqq V a$, la cifra sarà 9, come dice la formula.

Posso scrivere quanto precede nella proposizione simbolica:

4. $a \epsilon 1 + Q . c \epsilon Q . n \epsilon N . b = V_{n-1} c /_{n-1} V_{n-1} a .$
$H_n (c, a) = \text{rest}_{n-1} (V_{n-1} c, V_{n-1} a) X +$
$C_{-n} c - C_{-n} a \times V b - P_n (M a, M b) . H_n \geqq 0 .$
$x = \max 0 \cdots 9 \frown z \ni [V a \times z \leqq H_n (c, a)] . \supset .$
$V_n c /_n V_n a = b + x X^{-n}.$

" Sia a una quantità maggiore di 1, e sia c una quantità positiva, ed n un numero naturale. Supponiamo di aver calcolato $b = V_{n-1} c /_{n-1} V_{n-1} a$, ed il resto di grado $n - 1$ di questa divisione. Chiamisi $H_n (c, a)$ questo resto, alla cui destra si scriva la n-esima cifra del dividendo [cioè resto $\times X + C_{-n} c$], diminuito della cifra decimale n-esima di a per la parte intera del quoziente, e della somma dei prodotti di grado n delle cifre delle mantisse di a e di b. Se H_n è $\geqq 0$, allora $V_n c / V_n b$ vale il rapporto $V_{n-1} a /_{n-1} V_{n-1} b$, cui si aggiunga come n-esima cifra decimale quella indicata; cioè il quoziente $\leqq 9$ di $H_n (c, a)$ per $V a$ ".

Se il quoziente ha una sola cifra intera, caso cui possiamo sempre ridurci, in virtù della prop. 3 del § 10,

$$C_{-n} a \times V b + P_n (M a, M b) = P_n (M a, b),$$

e l'espressione di H diventa più semplice.

Se $H_n (c, a) < 0$, si pone $b = V_{n-1} c /_{n-1} V_{n-1} a - X^{-n+1}$, cioè si diminuisce questo rapporto di una unità dell'ultimo ordine decimale.

Il resto si troverà per differenza:

5. Nell'ipotesi $4 . \supset . \text{rest}_n (V_n c, V_n a) = H_n (c, a) - x V a.$

Esempio: Vuolsi calcolare $1/\pi$. Pongo come prima, $c = 1000$, e $a = 100 \pi$, onde $1/\pi = (c/a)/10$.

	1 0 0 0	3 1 4·1 5 9 2 6 5 3 5
$3 \times 314 =$	9 4 2	
$c - 3 \times_0 a =$	5 8 0	
	3	3
	5 7 7	
$1 \times 314 =$	3 1 4	
$c - 3{\cdot}1 \times_1 a =$	2 6 3 0	
	1 6	3 1
	2 6 1 4	
$8 \times$ „	2 5 1 2	
$c - 3{\cdot}18 \times_2 a =$	1 0 2 0	
	4 0	3 1 8
	9 8 0	
$3 \times$ „	9 4 2	
$c - 3{\cdot}183 \times_3 a =$	3 8 0	
	5 8	3 1 8 3
	3 2 2	
$1 \times$ „	3 1 4	
$c - 3{\cdot}1831 \times_4 a =$	8 0	
	1 0 8	3 1 8 3 1
$0 \times$ „	3 2 2 0	
$c - 3{\cdot}1830 \times_4 a =$	1 0 7	3 1 8 3 0
	3 1 1 3	
$9 \times$ „	2 8 2 6	
$c - 3{\cdot}18309 \times_5 a =$	2 8 7 0	
	7 3	3 1 8 3 0 9
	2 7 9 7	
$8 \times$ „	2 5 1 2	
$c - 3{\cdot}183098 \times_5 a$	2 8 5 0	
	1 2 1	3 1 8 3 0 9 8
	2 7 2·9	
$8 \times$ „	2 5 1 2	
$c - 3{\cdot}1830988 \times_7 a =$	2 1 7 0	
	2 0 5	3 1 8 3 0 9 8 8
	1 9 6 5	
$6 \times$ „	1 8 8 4	
$c - 3{\cdot}18309886 \times_8 a =$	8 1	

In questa operazione, per 5ª cifra si presenta la 1; ed effettivamente $c/_4 a = 3{\cdot}1831$, ma per continuare il calcolo, senza introdurre cifre negative, la si diminuisce di 1; e si sopprime il calcolo racchiuso da linee.

I numeri che stanno sulle orizzontali in cui si trovano le cifre capovolte sono: $\mathrm{P}_n(\mathrm{M}a, b)$.

Sia coi prodotti parziali, sia colla divisione fulminea, si trova lo stesso valore di $c/_n a$ e del resto. Sia in un procedimento che nell'altro, dal dividendo si sottraggono i prodotti delle stesse cifre del divisore per le cifre del quoziente; varia nei due procedimenti il solo ordine in cui si fanno le sottrazioni.

Anche il tentativo, per cui qualche cifra nella divisione fulminea deve essere diminuita, corrisponde ai tentativi che si fanno nella divisione ordinaria per trovare le cifre del quoziente.

La divisione fulminea ha però il vantaggio di dare successivamente i valori $c/_0 a$, $c/_1 a$, $c/_2 a$, ecc. Perciò si potrà dire divisione *graduale*, se non pare abbastanza *fulminea*.

§ 12. — Quadrato.

Se i due fattori sono eguali, la moltiplicazione si semplifica. Si ha:

1. $x \,\epsilon\, \text{Interv' Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{d}(x^2) = (\mathrm{l}'x + \mathrm{l}_1 x) \times \mathrm{d}x$,

da cui, ovvero dal § 5 Prop. 5, si deduce:

2. $x \,\epsilon\, \text{Interv' Q} \,.\, \supset .\, \mathrm{d}(x^2) \,\epsilon\, 2x\, \mathrm{d}x$.

La moltiplicazione fulminea si può fare anche senza il sussidio della striscia di carta. Per spiegarla meglio, convengo che la successione di più cifre poste fra $\}\{$ indichi il doppio della somma dei prodotti delle cifre equidistanti dagli estremi, più il quadrato della cifra media se esiste. Così nell'esempio che segue:

$$\}3\{ = 3^2, \quad \}31\{ = 2\times3\times1, \quad \}314\{ = 2\times3\times4 + 1^2, \text{ ecc.}$$

cioè $\}314\{ = \mathrm{P}_2(\pi, \pi)$.

Calcolo di π^2:

```
            3·1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3
}3{ = 9
}31{ =   6
}314{ = 2 5
}3141{ =  1 4
}31415{ =   4 8
}314159{ =    7 2
}3141592{ =     7 1
}31415926{ =    1 2 2
                    1 0 1
                      1 7 0
                        1 8 9
                          1 8 8
                            2 7 8
                              2 7 8
                                3 1 6
                                  3 5 2
            9·8 6 9 6 0 4 4 0 1 0 8 9 3 1 2
```

Il numero trovato è $\pi \times_{15} \pi < \pi^2$; aggiungo la somma delle cifre di $V_{15}\pi$, più $3+1$ (§ 8, Prop. 3), cioè 84 unità dell'ultimo ordine; varieranno le sole due ultime cifre. Conchiudo:

$$V_{13}\pi^2 = 9{\cdot}869\,604\,401\,089\,3.$$

Per economia di carta, si possono far scorrere le cifre lungo le verticali. Il calcolo assume la disposizione:

```
V15 π =   3·1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3
          9·6 5 4 8 2 1 2 1 0 9 8 8 8 6 2
              2 1 4 7 7 2 0 7 8 8 7 7 1 5
                      1 1 1 1 1 2 2 3 3
π² >      9·8 6 9 6 0 4 4 0 1 0 8 9 3 1 2
                                      8 4
π² <      9·8 6 9 6 0 4 4 0 1 0 8 9 3 9 6
V13 π² =  9·8 6 9 6 0 4 4 0 1 0 8 9 3.
```

§ 13. — Radice quadrata.

Si ha:

1. $$x \in \text{Interv}'\, Q \,.\, \supset .\, \mathrm{d}\sqrt{x} \in \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$$

che si può leggere " se x è un numero positivo approssimato, l'errore nella sua radice quadrata vale l'errore di x diviso pel doppio della radice ".

Una dimostrazione elementare, e diretta, è

$$\mathrm{d}\sqrt{x} = \mathrm{l}'\sqrt{x} - \mathrm{l}_1\sqrt{x} = \sqrt{\mathrm{l}'x} - \sqrt{\mathrm{l}_1 x} = (\mathrm{l}'x - \mathrm{l}_1 x)/(\sqrt{\mathrm{l}'x} + \sqrt{\mathrm{l}_1 x}) = \mathrm{d}x/(\sqrt{\mathrm{l}'x} + \sqrt{\mathrm{l}_1 x}) \in \mathrm{d}x/(2\sqrt{x}).$$

Si può anche ragionare così: Posto $y = \sqrt{x}$, sarà $x = y^2$; differenzio: $\mathrm{d}x \in 2y\,\mathrm{d}y$, da cui $\mathrm{d}y \in \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$. È questa una forma di ragionamento, comune nei trattati di calcolo infinitesimale della metà del secolo scorso; ma trovata inesatta, perchè vi si suppone l'esistenza della derivata di y; qui, ove i differenziali sono quantità finite, la forma di ragionamento è esatta.

Risulta che se x è > 1, l'errore nella sua radice è minore dell'errore di x. Così, conoscendo π con 7 decimali, si potrà determinare la sua radice, a meno di un'unità del 7° ordine decimale.

La regola per estrarre la radice, quale si insegna nelle scuole, fa intervenire $2n$ cifre decimali, per fare il calcolo con n. Furono proposti molti metodi per ottenere la radice.

L'estrazione graduale della radice quadrata fa intervenire le sole cifre necessarie. Non mi consta che essa sia stata pubblicata sotto forma così elementare; si può derivare dal metodo di Fourier (3) per la risoluzione delle equazioni generali.

Il problema è: dato il numero a con n cifre decimali, cioè noto $\mathrm{V}_n a$, trovare il massimo numero x, avente n cifre decimali, e tali che

$$x \times_n x \leqq \mathrm{V}_n a.$$

Esempio. — Vuolsi calcolare $\sqrt{\pi}$. Comincio a calcolare le prime 2 cifre di $\sqrt{\pi}$, cioè la parte intera di $\sqrt{(100\pi)}$, cioè di $\sqrt{314}$, che è 17; il suo doppio $= 34$.

$V_7 (100\pi) =$	3 1 4·1 5 9 2 6 5 3
$\mathbf{17}^2 =$	2 8 9
	2 5 1
$\mathbf{7} \times 34 =$	2 3 8
	1 3 5
}7{ =	4 9
	8 6
$\mathbf{2} \times 34 =$	6 8
	1 8 9
}72{ =	2 8
	1 6 1
$\mathbf{4} \times 34 =$	1 3 6
	2 5 2
}724{ =	6 0
	1 9 2
$\mathbf{5} \times 34 =$	1 7 0
	2 2 6
}7245{ =	8 6
	1 4 0
$\mathbf{4} \times 34 =$	1 3 6
	4 5
}72454{ > 45	
$\mathbf{3} \times 34 =$	1 0 2
	3 8 5
}72453{ =	7 8
	3 0 7
$\mathbf{8} \times 34 =$	2 7 2
	3 5 3
}724538{ =	1 6 4
	1 8 9
$\mathbf{5} \times 34 =$	1 7 0
	1 9

Per quinta cifra si è provato il 4, che risulta troppo grande, e si prova il 3.

Parimenti per la 6ª cifra non si è provato il 9, benchè $9 \times 34 = 306$, perchè troppo grande.

Il calcolo aritmetico precedente, ove si ponga

$$x = 17\cdot7245385,$$

fornisce l'eguaglianza:

$$V_7(100\pi) = x \times_7 x + 19 \times X^{-7}.$$

Ora

$$V_7(100\pi) < 100\pi < V_7(100\pi) + X^{-7}$$

$$x \times_7 x < x^2 < x \times_7 x + 34\, X^{-7},$$

ove 34 è la somma delle cifre decimali di x. Ricavo:

$$100\pi < x^2 + 20 \times X^{-7}$$

$$100\pi > x^2 - 15 \times X^{-7},$$

onde $$10\sqrt{\pi} < x + (20/34)\, X^{-7}$$

e $$> x - (15/34)\, X^{-7};$$

quindi il valore con 8 decimali di $\sqrt{\pi}$ sarà 1·772 453 85, o questo numero diminuito di un'unità dell'ultimo ordine.

Si è supposto nel calcolo precedente di aver estratto le prime 2 cifre della radice; se se ne avesse una sola, si sarebbe presentato più spesso il caso di dover provare cifre maggiori del vero. Se se ne estraggono 3, ricorrendo a piccole tavole dei quadrati (10), i tentativi diminuiscono.

Se si estraggono le tre prime cifre della radice, il calcolo si presenterà così:

---

(10) Queste tavole si trovano nei Manuali degli ingegneri, degli operai, sono unite a varie tavole di logaritmi, all'*Aritmetica* del prof. Burali, alla *Geometria* del prof. Pensa, ecc., facilitando così la ricerca delle radici.

$V_8 X^4 \pi$ = 3 1 4 1 5·9 2 6 5 3 5 8 9
177^2 = 3 1 3 2 9

8 6 9
2×354 = 7 0 8

1 6 1 2
}2{ = 4

1 6 0 8
4×354 = 1 4 1 6

1 9 2 6
}24{ = 1 6

1 9 1 0
5×354 = 1 7 7 0

1 4 0 5
}245{ = 3 6

1 3 6 9
3×354 = 1 0 6 2

3 0 7 3
}2453{ 5 2

3 0 2 1
8×354 = 2 8 3 2

1 8 9 5
}24538{ = 8 1

1 8 1 4
5×354 = 1 7 7 0

4 4 8
}245385{ = 1 1 4

0 3 3 4

3 3 4 9
}2453850{ = 1 2 9

3 2 2 0
9×354 = 3 1 8 6

3 4

Questo calcolo, posto $x = 177{\cdot}24538509$, conduce al risultato:

$$V_8 (X^4 \pi) = x \times_8 x + 34 \times X^{-8},$$

e siccome

$$x \times_8 x < x^2 < x \times_8 x + 36 \times X^{-8},$$

conchiudo come prima, che il valore con 10 decimali di $\sqrt{\pi}$ è

$$1{\cdot}7724538509,$$

o questo numero diminuito di un'unità dell'ultimo ordine.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Marzo 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Carle, De Sanctis, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, S. E. Boselli, Direttore della Classe, Manno, S. E. Ruffini, e Vidari.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente del 4 corrente.

Il Presidente annunzia con parole di vivo compianto la morte del Socio nazionale residente Luigi Balbiano della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Rispettando la volontà del compianto collega, si limita a poche parole di commemorazione per ricordare quanto egli fosse stimato per il grande valore scientifico e amato per le doti dell'animo suo. Si unisce al Presidente il Socio Stampini, che fu amico del Balbiano e potè lungamente apprezzarne le altissime doti di mente e di cuore.

Il Presidente invita il Socio Segretario a dar lettura di una circolare dell'Onorevole Edoardo Daneo, Presidente del

Comitato di Torino della Società Nazionale " Dante Alighieri ", per una viva propaganda " contro le manovre pazze, nefande, " parricide dei nemici interni, detrattori delle ragioni supreme " ineluttabili della nostra guerra e della nostra pace ". La Classe ne prende atto.

Il Socio Segretario Stampini presenta, a nome della Ditta G. B. Paravia e C., il 6° volumetto del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum* contenente lo *Stichus* di Plauto (*Ad codicis Ambrosiani praecipue fidem edidit, appendicem criticam addidit* C. O. Zuretti). Poscia, a nome dello stesso Prof. Zuretti, nostro Socio corrispondente, presenta, rilevandone l'opportunità della pubblicazione, un suo opuscolo concernente Roma dell'età imperiale, edito dalla Sezione di Milano della Società " Atene e Roma ", e intitolato *L'encomio di Roma di Elio Aristide (II secolo dopo C.) tradotto. Segue un'appendice di scritti dell'età imperiale riguardanti Roma.* La Classe ringrazia.

Il Socio De Sanctis presenta una *Nota* manoscritta del Prof. Adolfo Faggi dal titolo *Il " Re Lear " e i " Promessi Sposi "*. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Patetta presenta per la pubblicazione negli stessi *Atti* una seconda *Nota* riguardante *Il poeta torinese Camillo Maulandi e uno strano errore di Carlo Botta.*

In fine il Socio Prato presenta una sua *Nota*, che sarà pure pubblicata negli *Atti*, su *Il programma economico-politico della " Mitteleuropa " negli scrittori italiani prima del 1848.*

LETTURE

Il "Re Lear„ e i "Promessi Sposi„.

Nota del Prof. ADOLFO FAGGI.

Pochi forse, leggendo nei *Promessi Sposi* la scena della presentazione di Lucia e di sua madre fatta dal padre guardiano alla signora di Monza, si fermano a cogliere il vero e profondo significato delle parole che la Signora, con un atto altero e iracondo che la fece parer quasi brutta, rivolge ad Agnese, allorchè questa risponde alle sue pressanti interrogazioni invece della figlia: " Siete ben pronta a parlare senza " essere interrogata! State zitta voi! *già lo so che i parenti " hanno sempre una risposta da dare in nome dei loro figlioli!* „. Ma leggendo la stessa scena nella prima minuta del romanzo, cioè negli *Sposi Promessi* (ediz. Lesca), si ha un'ampia e particolareggiata rappresentazione di tutto ciò che passa in quella circostanza per la mente di Gertrude. " Voi siete ben pronta a " parlare senz'essere interrogata „, disse la Signora dando sulla voce ad Agnese. " Non so che fare dei parenti che rispondono pei " loro figlioli „. Agnese voleva aprir bocca, ma la Signora con tono ancor più brusco riprese: " Zitto, zitto; le vostre parole " non servono a nulla „. Così dicendo il suo aspetto prendeva sempre più un non so che di sinistro, di feroce, che quasi faceva scomparire ogni bellezza, o almeno la alterava di modo che chi avesse osservato quel volto in quel punto ne avrebbe conservata un'immagine disgustosa per sempre. I suoi sguardi erano fissi sopra Agnese, torvi e sospettosi, come se cercassero di raffigurare un nemico. E continuò: " Voi fate conto forse che, " perchè io son qui rinchiusa, fuori del mondo, senza esperienza, " mi si possa dare ad intendere qualunque cosa. Povera donna! " Appunto perchè son qui, sono men facile ad essere ingannata

“ su certe materie. Certo, lo sposo che i parenti destinano ad
“ una figlia è sempre un uomo compito, e il monastero dove la
“ vogliono rinchiudere è così allegro, in così bella situazione!
“ così tranquillo! è un paradiso! Poveretti! portano invidia alla
“ loro figlia: vorrebbero anch'essi ritirarsi in quel porto di
“ pace, ah! a far vita beata; ma... pur troppo son legati nel
“ mondo. Scusi il mio caldo (*sic*), padre, ma ella sa meglio di
“ me, almeno ella deve saper troppo bene come vanno queste
“ cose; la menzogna la più imperterrita, la più persistente, la
“ più solenne è quella che sta sul labbro di colui che vuole
“ sacrificare i suoi figli e far loro violenza. Questi sono i pec-
“ cati contro i quali si dovrebbe predicare: *a costoro bisognerebbe*
“ *minacciare l'inferno!* „.

Gertrude si trova davanti una povera giovane, che la madre, valendosi dell'appoggio autorevole d'un padre cappuccino, vuole internare, come si direbbe oggi, in un monastero per sottrarla alle insidie d'un pericoloso amatore. In questa povera giovane ella crede di riconoscere sè stessa, che, per la violenza fattale dai suoi genitori, è stata strappata alla vita, alle gioie di quell'amore cui il suo cuore di donna aspirava, e chiusa inesorabilmente contro la sua volontà nel freddo e nell'ombra di un chiostro. Quando vede per la prima volta Lucia, Gertrude è ormai un essere moralmente e intellettualmente distrutto: un passato atroce pesava sopra di lei coll'orrore di un incubo insormontabile, in cui ai patimenti lontani, ma ancor vivi, provati in famiglia, si univano quelli più vicini e non men gravi provati nel chiostro, la lenta preparazione alla colpa, poi la colpa, il delitto, i rimorsi, gli spaventi, le allucinazioni... Le sue facoltà superiori non potevano non essere frante ed abbattute, la sua sensibilità stessa non poteva non essere sconvolta. Gertrude è poco più di un automa nervoso, dominato da un'idea fissa: la violenza subìta per opera dei suoi genitori, cui ella riporta l'origine di tutti i suoi mali e di tutte le sue sventure. Dappertutto ella vede perciò figli oppressi e genitori oppressori.

Il motivo che domina nell'episodio della monaca di Monza è insomma quello stesso che domina nel *Re Lear* dello Shakespeare, lo snaturamento dei rapporti fra padri e figli. Nell'episodio del Manzoni è la figlia ancor bella, ancor giovane, ma irreparabilmente perduta, che protesta contro il padre e gl'im-

preca, nelle parole rivolte al cappuccino, l'inferno: nel dramma dello Shakespeare è il padre canuto, affranto dall'età e dalle sofferenze, abbandonato senz'asilo in mezzo alla tempesta, che maledice l'ingratitudine delle figlie. Il grido che s'inalza dal freddo e silenzioso monastero di Monza risponde a quello che s'inalza dalla boscaglia inglese battuta dalla pioggia e dal vento. Anche nel *Re Lear* abbiamo l'ingiustizia del vecchio Sire verso la figlia Cordelia, l'ingiustizia di Gloster verso il figlio Edgardo. Ma così l'uno come l'altro sono padri ingannati: non c'è in essi consapevole snaturamento dell'amore paterno. Il grande poeta inglese ha voluto presentarci due tipi diversi di padri ugualmente traviati da figli subdoli e crudeli. Il vecchio re ci apparisce subito, fin dalla prima scena, qual egli è nel suo fondo, debole di mente e squilibrato: ci vuol poco ad abbindolarlo: bastano le frasi scaltre ed orpellate di Regana e Gonerilla per renderlo incapace di comprendere l'amore vero e sincero di Cordelia. Gloster invece è presentato come uomo perfettamente normale, ancora lieto, fin dalla prima scena con Kent, dei ricordi e delle scappate di gioventù; e il benamato figlio, benchè bastardo, Edmondo, deve ordire una trama astuta per aizzarlo contro l'altro figlio, legittimo, Edgardo. Figli naturali e figli legittimi, figli dell'amore e figli del letto coniugale congiurano ugualmente contro i genitori, e Gloster può ben dire: “ La nostra “ carne, il nostro sangue sono così degenerati da detestare chi “ li procreò „. Cordelia e Edgardo, figli incolpevoli e buoni, sono anch'essi vittime della tremenda congiura.

Edgardo, nella scena VII dell'atto III, a vedere il Re Lear così trattato dalle figlie, pronuncia la celebre intraducibile frase: “ *He childed as I fathered!* Egli ha tali le figlie quali io il “ padre „, perchè, ignorando le macchinazioni di Edmondo, non sa spiegarsi l'odio del padre a suo riguardo; ma in realtà Gloster non è colpevole, come Lear, se non di soverchia credulità alle parole di figli degeneri e traditori. Il Manzoni invece immaginò nella monaca di Monza un caso in cui potesse compiutamente applicarsi la designazione di Edgardo; perchè nessuno meglio della povera Gertrude avrebbe potuto, messo a confronto col Re Lear, esclamare: “ *He childed as I fathered;* “ le sue figlie furono per lui quello che fu per me mio padre „. La crudeltà del Principe verso Gertrude non è minore nella

sua apparente compostezza e nella sua freddezza metodica di quella di Regana e Gonerilla messe insieme. L'infelice Signora vede dappertutto figlie oppresse e genitori oppressori, come il Re Lear vede dappertutto genitori conculcati e figlie ingrate. Quando in mezzo alla tempesta gli si presenta nella landa deserta Edgardo, negli stracci di un pazzo mendico e tremante di freddo, ei gli domanda: “ Hai dato tutto alle figlie? Anche “ tu sei giunto a tanto? Le figlie t'hanno condotto a questo passo? “ Non serbasti nulla per te? Hai dato loro tutto? „. E quando Kent, vedendolo prorompere in furie ed imprecazioni, gli fa osservare, coll'intento di calmarlo, che quel povero mendicante non ha figliole, la sua collera si riversa su di lui: “ Tu sei “ un traditore! Nient'altro al mondo poteva ridurlo in questo “ stato se non l'ingratitudine delle figlie! „. Gertrude non è arrivata certo al punto di sconoscere gli uomini e le cose come il Re Lear, che ormai ha perduto la ragione: ma, se anche lei fosse stata uno spirito normale, le sarebbe bastato guardare in faccia Agnese e Lucia per leggervi la sincerità, e allontanare dal suo animo ogni sospetto di trucco o di violenza. Ella doveva anche sapere che casi simili al suo avvenivano di solito nelle grandi famiglie; alla fin fine Lucia non s'era presentata per esser rinchiusa in un monastero e prendere il velo; cercava solamente un rifugio e un asilo temporaneo contro le persecuzioni di un odioso amatore. Va bene; ma come assicurarsi che questo persecutore fosse veramente odioso a Lucia? Non poteva esserle stata fatta violenza dalla madre per farle accettare un altro partito, che alla madre paresse più conveniente per i suoi fini? C'era, è vero, la dichiarazione di Lucia: “ Reverenda si- “ gnora, quanto le ha detto la mia buona madre è la pura “ verità. Il giovane che mi parlava lo sposava io... di mio genio „. Ma anche lei, Gertrude, non aveva detto al vicario delle monache: “ Mi fo monaca di mio genio, liberamente „? L'idea fissa di Gertrude l'avvolgeva necessariamente in un vortice mentale, ed ella poteva ben dire: “ Vi ha due linguaggi che si somi- “ gliano: quello che parte dal fondo del cuore, e quello d'una “ figlia oppressa, che dice il falso per terrore, e protesta di “ amare ciò che ella abborre più al mondo „.

Bisognava adunque che seguisse l'interrogatorio a quattr'occhi, in cui Gertrude si proponeva di fare molto più sul serio

la parte del vicario. Anche questi aveva detto: “ Signorina, io “ vengo a far la parte del diavolo „. E Gertrude fa veramente con Lucia la parte del diavolo. Nè con ragioni, con dichiarazioni, con giuramenti sarebbe stato facile, come avviene in simili casi patologici, alla povera Lucia di persuadere l'infelice Signora, se non fosse riuscita a *farle toccar con mano* che cosa poteva essere il bene di quel signore, raccontandole in tutti i suoi particolari l'avventura di Don Rodrigo colla povera Bettina. Allora finalmente il nodo psichico si risolve, e la Signora prorompe: “ È “ un vile birbante, avete ragione; avete fatto bene a voltargli “ le spalle, e io vi proteggerò „.

È innegabile che tutta la scena è condotta dal Manzoni con un profondo senso psicologico, che apparisce anche nei particolari. Per esempio, quando Lucia racconta della povera Bettina, che per la vergogna non potè più vivere nel suo paese e un bel mattino fece un fagottello e finì col girare il mondo, la Signora, che era stata obbligata dalla violenza dei genitori a rinchiudere la sua verde gioventù nelle quattro mura di un chiostro, interrompe: “ Girare! non è poi la peggior disgrazia! „. — Priva ormai di dominio su sè stessa, non può nel suo atteggiamento e nei suoi discorsi con Lucia nascondere la sua familiarità colla colpa, e ride delle titubanze e degli scrupoli della povera giovine: nella chiusa poi della scena apparisce in un ghigno beffardo tutto l'animo suo sconvolto. Essa crede di giustificare il suo contegno con Lucia dicendo che dapprima avea supposto Don Rodrigo volesse sul serio sposarla. “ E perchè “ no? „ rispose, e abbandonandosi alla intemperanza della sua fantasia, continuò: “ Perchè no sposarvi? Se ne vede tante a “ questo mondo. Sareste la signora Donna Lucia: che mara- “ viglia! non sareste la donna più stranamente nominata di “ questo mondo. Avete sentito come mi chiamava quel buon “ uomo colla barba bianca che vi ha condotta qui? — Reverenda “ madre. — Io, vedete, sono la sua reverenda madre. Bel bam- “ bino davvero ch'io ho. E a questa idea si pose a ridere sgan- “ gheratamente, ma tosto aggrondatasi e levatasi a passeggiare “ nel parlatorio... madre!... continuò... avrei voluto sentirmelo “ dire, non da un vecchio calvo e barbato „. Pare quasi che il mondo sembri a Gertrude una mascherata, in cui ciascuno è fuori di posto: una contadina diventa la signora Donna Lucia,

e una giovane come lei, che aspirava all'amore e alle carezze di un bambino, diventa la reverenda madre di un cappuccino barbuto!

A. Luzio ha fatto un raffronto tra la *Religieuse* del Diderot e la Monaca di Monza del Manzoni (1), coll'intento di mostrare che il Manzoni ha voluto da buon cattolico addebitare al secolo, all'individuo quanto il Diderot aveva attribuito di tristo e di odioso all'istituzione monacale e all'idea religiosa. E per vero lo scopo apologetico del Manzoni risulta anche da quel passo che si trova già nella prima minuta: " È uno dei carat- " teri più ammirabili e più divini della religione cristiana di " potere in qualunque circostanza dare all'uomo che ricorra ad " essa un rimedio, una norma e il riposo dell'animo „ e si conchiude che " per questa via e con questo mezzo Gertrude, a " malgrado della perfidia altrui e dei suoi errori di ogni genere, " avrebbe potuto diventare una monaca santa e contenta, co- " munque lo fosse divenuta „. Ed è anche fuori di dubbio che il Manzoni mirò, coll'episodio della monaca di Monza, a compiere il quadro di quello sciagurato secolo, da lui, come dice il Luzio, così intimamente rivissuto, in cui l'ambizione, lo spirito di casta e l'abitudine alla violenza potevano arrivare a rendere i genitori così freddamente crudeli e ingiusti verso la prole. Il Bertana dal suo canto osserva (2) che accenni di voti claustrali strappati o imposti a povere fanciulle, violentate dalla tirannide paterna o sagrificate dall'orgoglio gentilizio di genitori snaturati, si trovano facilmente in libri italiani del sec. XVIII di molto anteriori alla *Religieuse* del Diderot; e cita opportunamente alcune stanze del *Cicerone* del Passeroni, che non è temerario supporre il Manzoni potesse aver letto a Milano anche prima della *Religieuse*. Tutto ciò è giusto, e potrebbe anche non essere del tutto infondata l'ipotesi, che il Manzoni s'ispirasse anche al ricordo di certa sua zia ex-monaca, con la quale era vissuto giovanetto. Ma io non credo di andar molto lontano

---

(1) A. Luzio, *Manzoni e Diderot. La Monaca di Monza e la " Religieuse „*, Milano, 1884.

(2) E. Bertana, *Postilla manzoniana. La Monaca di Monza*, " Giornale Storico della Lett. it. „, vol. XXXV, pagg. 172-175.

dal vero affermando che lo studio dello Shakespeare entrò per qualche cosa nella concezione del famoso episodio, nel quale si continua, per così dire, e si compie il motivo dominante del *Re Lear*, lo snaturamento dei rapporti fra padri e figli. La psicologia del Manzoni è, specialmente nella prima minuta, così penetrante, così tremenda, direi quasi così spietata, che fa ben nascere in noi quel sentimento d'orrore per la colpa, in cui, secondo lo scrittore lombardo, consiste la perfezione etica dell'arte in generale e di quella dello Shakespeare in particolare (1). L'orrore che noi sentiamo per il principe non è minore di quello che noi sentiamo per Regana e Gonerilla: e la pietà per l'infelice giovane sperduta nel monastero di Monza non è minore di quella che noi sentiamo per il vecchio Re sperduto fra la bufera nella boscaglia inglese. Fatta la diversità tra romanzo e dramma, mi pare che l'episodio della monaca di Monza faccia un perfetto riscontro al *Re Lear*, e che la psicologia del Manzoni equivalga a quella dello Shakespeare. Nulla di simile, sotto il rispetto psicologico, era comparso nella letteratura italiana, e non so se sia comparso dopo: tanto più se si consideri che il Manzoni non trovò nel Ripamonti, da cui attinse, se non due parole intorno alla monacazione forzata della Signora, e nulla riguardo alle arti che furono impiegate dai genitori per forzare la volontà della figlia.

Certo, nella redazione definitiva del romanzo molte cose furono tolte o attenuate: il colloquio fra Lucia e la Signora è soppresso, e riassunto brevemente in maniera generica, mentre da ultimo fa capolino l'umorismo del Manzoni in quelle parole che Agnese dice a Lucia per confortarla dell'impressione sinistra rimastale dal colloquio: " I signori, chi più, chi meno, chi per " un verso, chi per un altro, han tutti un po' del matto ". Ma, pur attenuando in qualche parte la crudezza della psicologia, la storia anteriore di Gertrude e la mirabile analisi dell'animo suo fino all'entrata nel chiostro, anzi fino alla sua risposta d'amore a Egidio, è stata mantenuta: vuol dire dunque che il

---

(1) Cfr. il Saggio di Alfredo Galletti su *Manzoni, Shakespeare e Bossuet* nei *Saggi e Studi*, Bologna, Zanichelli, 1916, e il mio articolo nel " Marzocco " del 23 aprile 1916, *Il Macbeth e i Promessi Sposi*.

Manzoni ci teneva molto a questa storia; e sì che egli, così prodigo di tagli all'opera sua, avrebbe potuto tagliare anche qui e contentarsi di riassunti; perchè, in fondo, tutta quella storia così intima, così particolareggiata della monaca di Monza non era strettamente necessaria per l'intelligenza dei fatti che ulteriormente si svolgono nei *Promessi Sposi.*

Con questo breve scritto e col già citato in nota mio articolo del " Marzocco „, io ho cercato di mostrare l'efficacia che ha avuto lo studio dello Shakespeare nella concezione primitiva dei *Promessi Sposi*; e mi pare di poter conchiudere che il Manzoni, contro quello che si sarebbe potuto credere e crede almeno in parte anche il Galletti in uno dei suoi recentissimi *Saggi e studi,* era fatto per comprendere appieno la psicologia dello Shakespeare anche nei suoi aspetti morbosi e patologici. Se egli fosse rimasto su questa via, chi sa dove sarebbe arrivato! Ma egli non vi rimase; e la stessa redazione definitiva dei *Promessi Sposi* ne è una prova. Fu questo un bene o un male per l'arte sua, per la letteratura italiana, per il romanzo che forma la sua gloria immortale? Poichè egli è tempo finalmente di muoverci questa domanda. Io ho già avuto occasione di rispondervi almeno in parte in altro mio scritto (1), per quello che riguarda la morte di Don Rodrigo nella prima stesura del romanzo. Come in omaggio ai principi e al carattere dell'arte manzoniana io approvavo allora, per ciò che spetta quella morte, il cangiamento radicale introdotto nella edizione definitiva, così io approvo ora pienamente i tagli e le riduzioni nell'episodio di Gertrude. Ho già accennato all'economia del romanzo: tutta quell'abbondanza di particolari, tutto quel lusso di situazioni psicologiche, sarebbe stato più a posto in una narrazione che avesse per oggetto la monaca di Monza e non già i promessi sposi. Ma ci sono ragioni anche più gravi. Quelle, chiamiamole pur così, situazioni psicologiche che io son venuto ora esaminando, se costituiscono uno studio, un documento umano molto importante, stonano col carattere generale del romanzo e dell'arte manzoniana quale si è poi venuta maturando e affermando.

(1) V. " Giorn. Stor. della Lett. it. „, vol. LXVII, 1916, pag. 76 e seg., *Il parere di Perpetua e la concezione dei Promessi Sposi.*

Vi si sente troppo la " psicologia fisiologica „ dello Shakespeare. Ricordiamo a questo proposito la definizione del Taine, dove, accanto a un po' di esagerazione, c'è buona parte di vero: " L'uomo è per lo Shakespeare una macchina nervosa governata " da un temperamento, disposta alle allucinazioni, trasportata " da passioni sfrenate, irragionevole per essenza, miscuglio del- " l'animale e del poeta, avente la *verve* per spirito, la sensibi- " lità per virtù, l'immaginazione per molla e per guida, condotta " a caso dalle circostanze al dolore, al delitto, alla demenza e " alla morte „. Ora non era certamente questo il concetto che dell'uomo s'era fatto, in conformità delle sue idee religiose, il Manzoni. La sua psicologia dovea perciò necessariamente andare spiritualizzandosi, assumendo contorni e ritmi sempre più composti e misurati. Quell'armonia di ragione, quella sicurezza di equilibrio che costituisce l'arte e la mente dello scrittore lombardo, non poteva a lungo acconciarsi colla terribilità grandiosa, ma rude e selvaggia dello Shakespeare. D'altra parte, concedendo troppo, sia pure per ragioni morali, a quell'orrore che dovrebbe sempre suscitare la rappresentazione della colpa nelle opere d'arte, il Manzoni sarebbe potuto andare a finire in quel romanticismo tetro e spaventoso verso cui piega talora l'episodio di Gertrude nella prima redazione. Ora io credo che nulla sarebbe stato più contrario alla sua indole e al suo ingegno.

Questo " spiritualizzamento „ della psicologia manzoniana dalla prima stesura all'edizione definitiva del romanzo si riscontra non solo nell'episodio di Gertrude, ma in molti altri luoghi; per esempio, nella descrizione della notte passata da Lucia al castello dell'Innominato: " Tremava, avea scritto dapprincipio " il Manzoni della povera giovine, tremava, si faceva animo, " sperava (nella promessa del Conte di tornar la mattina dopo), " disperava, pregava: le forze del corpo cedettero ad un tale " combattimento dell'animo e Lucia fu presa da una febbre " violenta. *Le sue idee divennero più vive, più forti, ma più in-* " *terrotte, più mescolate, più varie, si urtarono più rapidamente;* " *e la confusione, togliendole una parte della coscienza, rese sof-* " *feribile un'angoscia, che altrimenti ella non avrebbe potuto sof-* " *ferire e vivere* „. Sguardo molto acuto e penetrante quest'ultimo sull'animo di Lucia; ma è lo sguardo di un fisiologo o di

un medico: supposte quelle condizioni, era naturale che la povera giovine non avesse nemmeno chiara coscienza del voto di verginità che stava per pronunziare, perciò il Manzoni aveva scritto: “ Proferito il voto, *o quello che a Lucia parve tale*, ella “ si sentì come racconsolata „. Non citerò i passi corrispondenti dell'edizione definitiva: la diversità della psicologia apparisce subito, e il voto è pronunziato con coscienza e con vero sentimento di consacrazione religiosa (1).

Si potrebbe anche, a proposito della psicologia sull'episodio di Gertrude, arrischiare un'ipotesi. Dopo il primo cenno fattole da Egidio, la sventurata, che provò in quel punto un terrore schietto e forte e corse subito a ripararsi dall'occhio audace e temerario, esaminò rapidamente la sua condotta, s'ella era stata in qualche parte biasimevole. “ Ma più ella esaminava (si legge “ nella prima stesura del romanzo), più le pareva di non avere “ errato alla prima; e questo esame, aumentando la sua cer- “ tezza, la andava familiarizzando con quella immagine (la “ scena preparata da Egidio), e diminuiva quel primo orrore e “ quella prima sorpresa. Cosa strana e trista! il sentimento “ stesso della sua innocenza le dava una certa sicurtà a tornare “ su quelle immagini: ella compiaceva liberamente ad una cu- “ riosità, di cui non conosceva ancora tutta l'estensione, e guar- “ dava senza rimorso e senza precauzione una colpa che non “ era la sua „. Anche questo è un brano psicologico di molta acutezza e profondità, ma, diciamolo pure, di una psicologia spietata. Come apparisce qui chiara ed evidente l'impotenza dell'anima umana a guardarsi, almeno in certi casi, *colle sole sue forze*, dal male: poichè il sentimento stesso della propria innocenza può diventare una condizione favorevole al familiarizzarsi colle immagini della colpa! Non si direbbe che l'anima umana sia malata *radicalmente*, e che la concupiscenza abbia *radicalmente* indebolito il suo libero arbitrio, suscitando in lei una vertigine fatale verso il delitto? Ma che altro son queste se non le dottrine dei Giansenisti, secondo i quali noi siamo

---

(1) Ha buone osservazioni su questo proposito N. Busetto in uno dei suoi *Saggi Manzoniani*, Napoli, 1916, *La notte di Lucia nel castello dell'Innominato*, pagg. 35-44.

veramente malati nell'anima dopo il peccato originario e assolutamente incapaci, senza la Grazia divina, di rivolgerci al bene? Dobbiamo dunque nell'episodio di Gertrude, come fu primieramente concepito, riconoscere un influsso sul Manzoni di quelle dottrine giansenistiche, che altri è andato a ricercare nella conversione dell'Innominato? (1).

Ma nella edizione definitiva del romanzo, anche dopo i tagli e le riduzioni sagacemente fatti, apparisce pur sempre il gusto del Manzoni per la psicologia in generale e per gli aspetti morbosi di essa in particolare. Non invano egli avea studiato, non invano egli avea ben letto lo Shakespeare (*après avoir bien lu Shakespeare*, dic' egli nella lettera al Fauriel, da Milano, del 25 marzo 1816). Io ho avuto altrove occasione di studiare il sogno di Don Rodrigo, maravigliosamente rifatto in confronto della prima stesura (2); potrei ora citare la scena di Renzo ubbriaco all'osteria della luna piena. Anch'essa, in confronto alla prima stesura, è ampliata e recata a perfezione dal lato psicologico: il Manzoni non ha potuto resistere alla tentazione (e noi non possiamo che rallegrarcene) di riprodurre alcuni atti e discorsi propri dell'uomo dissennato, che non appariscono più coscienti, ma piuttosto macchinali. Per esempio, la scenetta relativa al bicchiere di vino che Renzo aveva invano preparato per il falso Fusella, manca nella prima stesura; e ci presenta con molta arte psicologica l'annebbiamento della mente di Renzo, che subisce come una fascinazione da quel bicchier di vino sulla tavola. E l'ultimo discorso di Renzo, ormai del tutto ubbriaco, è, nell'edizione definitiva, molto bene riprodotto: lo psicologo o lo psichiatra più severo non ci troverebbe che da applaudire. I ricordi sfilano in maniera meccanica nella mente di Renzo; e l'una serie di essi, quelli che lo richiamano al suo paese natale, s'intreccia e si confonde con l'altra serie, quella degli avvenimenti di cui nella giornata era stato testimone e parte a Milano. Vengono così stranamente associati Ferrer e il Padre Cristoforo, il latino di Don Abbondio e il latino di

---

(1) V. su questa quistione dell'Innominato e della sua conversione gli *Studi Manzoniani* di A. Pellizzari, Napoli, Perrella, 1914, il II vol.

(2) " Fanfulla della Domenica ", 16 aprile 1916.

Ferrer nelle gride *Vidit Ferrer*, che per il povero contadino si equivalevano, *siés baraòs trapolorum* (forse gli era rimasta impressa come se fosse latina anche qualche frase spagnola di Antonio Ferrer arrivata fino a lui nel pigia pigia intorno al palazzo del Vicario); risuona ancora all'orecchio quel maledetto ton ton ton e poi ancora ton ton ton della campana di allarme la notte del tentativo di sorpresa su Don Abbondio, l'ultima notte passata al paesello in compagnia di Lucia e di Agnese. E in mezzo e sopra a tutto ciò una che ben si potrebbe chiamare *inibizione istintiva o automatica*, molto ben notata dallo stesso Manzoni, per cui Renzo è fortunatamente trattenuto dal fare i nomi o dal farli per intiero.

Da quanto siamo venuti esponendo mi pare si possa conchiudere che, se il Manzoni studiò, per la primitiva concezione dei *Promessi Sposi*, alla grande scuola psicologica dello Shakespeare e ne subì l'influsso, imparò presto a far da sè in maniera più consona e più confacente al suo ingegno e alla sua arte, imparò insomma, come sogliono imparare tutti i grandi, a far da maestro: e ciò non è poco argomento d'onore per lui e per la letteratura nostra.

Torino, 22 febbraio 1917.

Il poeta torinese Camillo Maulandi e uno strano errore del Botta.

Nota II del Socio FEDERICO PATETTA.

4. Torniamo al Maulandi, riprendendo l'esame delle sue lettere, già condotto fino a tutto il 1790, ed aggiungendovi le poche notizie spigolate altrove.

Da un'ode del nostro poeta stampata nel 1791, nel terzo volume degli *Ozi letterarii*, risulta che egli aveva visitata la casa del Petrarca in Arquà, e quindi anche Padova e probabilmente Venezia. Questo viaggio, come si vedrà a suo tempo, deve certo porsi nel 1790, forse posteriormente al soggiorno in Milano ed in Albonese.

Nel 1789, o 1790 (1), sorse in Torino l'Accademia degli Unanimi, con programma molto simile a quello della Società Filopatria, cioè per promuovere gli studi di storia patria e insieme quelli della poesia e dell'eloquenza. Il Maulandi fu socio col nome accademico *Il Rinomato*; e contribuì, come abbiamo accennato, ai *Voti* per nozze Maffoni-Bruna (pagg. 166-169), con alcune traduzioni da Catullo, riprodotte poi nel *Saggio,* pagg. 53-57. Non fu però dei primi soci, e perciò il suo nome manca così nell'*Elenco de' componenti la Società letteraria degli Unanimi*, stampato a Torino nel 1792 ed aggiunto comunemente al primo volume dei *Saggi dell'Accademia degli Unanimi* (To-

(1) Cfr. Vallauri, *Delle società letterarie*, pag. 282 e segg. Egli dice che un'accademia istituita a Lagnasco nel 1789, col nome di *Teocrita*, fu trasferita a Torino nel 1790 e vi prese il nome di *Accademia degli Uniti*; ma che *la prima generale adunanza* fu tenuta solo il 25 novembre 1791. Risulta però dal periodico torinese “ *Nuova frusta letteraria per l'anno 1798* „, n° 11, pag. 184, che il trasferimento avvenne sin dal 1789 e che il nuovo nome di *Unanimi* fu preso nell'adunanza del 6 maggio 1790.

rino, 1793), come nella *Continuazione dell'elenco* aggiunta al secondo volume, d'egual data. Più strano può sembrare il fatto che nei *Voti*, pag. 239, il Maulandi sia detto *Socio della Reale Accademia di Fossano e Corrispondente di quella delle Scienze di Torino*, e che il suo nome sia stato nondimeno omesso tanto nell'*Elenco di tutti gli Accademici* (dell'Accademia di Fossano) *dal 1777 al 1829* pubblicato dal Vallauri (1) quanto nella serie dei corrispondenti della nostra Accademia compilata dal Manno (2). Si direbbe a primo aspetto che il Maulandi abbia avuto poca fortuna anche per rispetto ai suoi titoli accademici. Va però osservato che, se la mancanza nell'elenco degli Accademici di Fossano è quasi certamente da imputarsi a negligenza del Vallauri, eguale addebito non si può fare al Manno, poichè, esaminando i verbali dell'Accademia delle Scienze di Torino, non vi si trova punto, salvo errore, che il Maulandi sia stato nominato corrispondente. Nella seduta del 22 settembre 1784 fu invece deciso di " accondiscendere al desiderio dell'Accademia " fossanese e di far spedire... al Corpo intiero di quest'Acca- " demia le patenti di Corrispondente " (3); e solo perciò il Maulandi dovette, a torto o a ragione, attribuirsi personalmente il titolo di corrispondente.

Inutile dire che, non essendo forse ancor socio, il Maulandi non contribuì affatto ai due volumi dei *Saggi* degli Unanimi. Del resto, quando si attendeva a tale pubblicazione, incombevano su di lui doveri ben più gravi e ben più sacri. Sul finire del 1792 era scoppiata la guerra coi Francesi, la cui superiorità s'andava ogni giorno più delineando, nonostante le prove di valore date dagli Austro-Sardi e coronate qualche volta da buon successo. Egli, che per scienza militare e doti personali pare fosse già prima tenuto in gran conto (4), combatteva ora

---

(1) *Delle società letterarie* cit., pagg. 234-240.

(2) *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Torino, 1883, pag. 189 e segg.

(3) *Registro originale ms.*, vol. I, pag. 84. Cfr. Vallauri, *Delle società lett.* cit., pagg. 229-230.

(4) Suppongo che debba riferirsi a lui la notizia, che trovo nelle sincrone *Memorie* del cav. Gaetano Balbo sulla *Guerra delle Alpi e d'Italia dall'anno 1792 al 1800*, Torino, 1876, pag. 5, nota: " .. il sig. Maullandi ebbe

sulle Alpi col grado di capitano aiutante di campo; e nei momenti di riposo scriveva al cugino Somis rimpiangendo i piaceri e le occupazioni letterarie dei tempi, che dovevano ormai sembrargli lontani, ma ricadendo poi, com'era naturale, nel grande argomento del giorno, la guerra.

Le lettere, che ho presenti e delle quali darò fedelmente i brani più importanti, attestano, malgrado la sciatteria della forma, nobiltà di sentimenti e di propositi, mostrandoci però il Maulandi profondamente turbato per il modo, con cui la guerra era condotta, e quasi presago di inevitabili catastrofi.

Nessuna lettera è del 1792. Nella prima dell'anno successivo, che è del 2 giugno, dalle vicinanze di Vinadio, il Maulandi si scusa col Somis di non avergli ancora scritto dopo la partenza da Torino, incolpandone le sue *gravi e continue occupazioni*. Accenna però a lettere dirette *al teologo Pavesio*, che avrebbe potuto mostrarle agli amici; e confessa di aver scritto anche ad altri..... " Ma tu ridi? Che vuoi? Non ho poi l'alma " sì dura nè si fredda come i sassi e le nevi, in cui sono con- " dannato a vivere continuamente per mettere in istato di dif- " fesa queste frontiere. Io feci veramente un viaggio di 25 giorni " nella Valle di Santo Steffano per riconoscerne le alture e i " passaggi: ne feci lunga descrizione al mio ritorno, ai 14 dello " scorso maggio, al Generale: vi aggiunsi osservazioni e un prog- " getto di diffesa: ma *cunctando perdidimus rem* (1); ai 20 sap- " piamo che i posti avanzati dell'Isola sono investiti. Il primo " pensiere fu di pigliare tutti i battaglioni, che avevamo sotto la " mano, e piombare sopra i Franzesi avanti che avessero scacciati " i nostri, ovvero avanti almeno che si potessero stabilire. Si " aspettò la permissione da Torino; essa venne negata. I Fran- " zesi s'impadronirono dell'Isola e di tutta la Valle di Santo " Steffano senza perdere forse 20 uomini. La perdita nostra fu " di un morto e varii feriti..... Io non mi sono trovato la Dio " mercè in questo fatto vergognoso; nè so quello che avrei

---

" ordine [*prima della Rivoluzione*] di ben visitare il corso del Ticino, di " notare i siti ove si potessero gettare ponti, ecc. Tutto ciò si seppe a " Vienna e ce ne fu serbato rancore ".

(1) Il Maulandi ricorda e torce in senso opposto la nota frase di Ennio su Fabio Massimo: " *cunctando restituit rem* ".

“ fatto a vista di sì ripetuta infamia. — Ma tiriamo il velo, nè “ scopriamo più oltre *turpitudinem nostram*. . . . .

“ Fannì sia da te caldamente ringraziata della memoria, “ che tiene di me. Digli che mi serbo tuttora illibato e puro “ dagli aliti infetti, di cui pareva temere a mio riguardo, e che “ l'ambizione non mi farà mai dimenticare la sola gloria ch'io “ conosca. . . . .

“ Le tue rifflessioni politiche mi ritoccarono una piaga, di “ cui gemo tuttora profondamente. Ma che? Un destino ignoto “ guida gli affari umani; ed in quanto a me, ho già provato “ varie volte a cotestoro, che non si manca nè di coraggio nè di “ scienza, ma di guida e di consiglio „.

La seconda lettera, del 10 luglio 1793, *dal campo sul colle della Maddalena*, è in gran parte dedicata ad un opuscolo pubblicato dal Somis, appunto nel 1793 (1). Il Maulandi non è parco di lodi: “ Ho trovato la tua analisi critica degna dei quaranta “ epigrammi aggiuntivi in Appendice, e gli epigrammi corrispon- “ denti all'analisi. Io fui sopra tutto colpito dalla evidenza, vi- “ bratezza e giustezza della definizione, che dai dell'Epigramma, “ e dalle citazioni, che nascono così naturalmente a infiorare i “ tuoi pensieri e corroborare il tuo sistema. Le tue rifflessioni “ critiche sono dettate dalla delicatezza e da quel senso o gusto “ che vogliam dire, che è figlio della vera filosofia. Tu cammini “ spedito e libero per la strada angusta del vero e del bello. “ Il Comaschi la conosce pur egli e la tiene qualche volta, ma “ qualche volta ne smarrisce la traccia per troppa tema di per- “ derla. Ed in vero non si può negare che gli epigrammi di “ questo autore non spirino talvolta un tal quale odor greco, “ che non dispiacerà certamente agli eruditi ed uomini di let- “ tere; ma i tuoi sono conditi del vero atticismo moderno, senza “ perdere della purità e parsimonia antica; ed oserei dire che “ se gli autori dell'Antologia greca fossero stati contemporanei “ del tuo Marcone, d'Ibraim, di Critone, di Mena, non gli avereb- “ bero meglio punti di quello che hai tu fatto..... „.

Seguono poche notizie personali: “ ... la mia salute si è

---

(1) *Analisi critica del saggio sopra l'epigramma italiano di Vincenzo Comaschi.....*, estr. dal volume di giugno 1793 della *Biblioteca per l'anno NDCCXCIII* (pagg. 48, in-8°).

“ appieno ristabilita mercè le nuove fatiche a cui mi sono esposto
“ in questo campo. Egli è ben vero che, se l'amor proprio fosse
“ la sola mia passione, io dovrei essere pienamente pago della
“ considerazione, che si ha qui dei miei avvisi e rapporti; ma
“ tante altre riflessioni avvelenano questo interno moto di sod-
“ disfazione, che non sono così fortunato quant'altri potrebbe
“ essere alla mia piazza „.

In altra lettera dell'8 agosto, essa pure *dal campo della Maddalena,* leggiamo:

“ Saprai certamente a quest'ora il movimento retrogrado
“ dei Franzesi dall'alto contado di Nizza, e la nuova posizione
“ presa dai nostri colà. Da queste parti essi conservano lo stesso
“ contegno, ed aumentano in luogo di diminuire. Continuiamo
“ nel nostro canonneggiamento monotono da ambe le parti, senza
“ un effetto corrispondente alla polvere, che si sparge in aria;
“ nè saprei bene che pronosticare sullo scioglimento di questa
“ lunga farsa „.

Sempre dallo stesso campo, il Maulandi scrive il 21 ottobre 1793, scusandosi di una *grande lacuna* nella corrispondenza, e spiegandola in parte per “ alcuni sospetti pigliati
“ da moti nemici, che *gli* diedero la briga parecchi giorni di
“ scorrere *quei* contorni „. Continua poi: “ La nostra posizione
“ è pur la stessa, ma può diventare fra giorni di gran rilievo.
“ La resa di Lione, la ritirata dei nostri dalla Savoja mettono
“ i Franzesi in istato di mandare grandissimi rinforzi verso
“ Nizza, e questi potrebbero, passando, farci qualche brutto
“ scherzo e pigliare alle spalle l'armata del Duca d'Aosta e di
“ Devins, da cui si aspetta la nuova della presa di Giletta, at-
“ taccato da jeri l'altro per la terza volta. Egli è ben vero che,
“ mentre non abbiamo più la metà degli uomini necessarii per
“ diffendere questo campo, mille uomini di Caprara se ne stanno
“ a Caraglio a godere delle delizie dell'autunno, e dodici e più
“ Battaglioni disponibili dei nostri se ne stanno a Susa inutil-
“ mente rammentando le rovinose operazioni della pretesa occu-
“ pazione della Savoja. Intanto per un prodigio il tempo ancora
“ tien fede, e va di paro alla lentezza, con cui si agisce nel
“ Contado di Nizza... ma se si rompe... gran problema da risol-
“ vere! Io ti giuro che alfine commincio a perdere la pazienza,
“ vedendo da vicino gli affari. Ci vuole tutta la flemma, indo-

" lenza e stupidità di un Tedesco per non esserne vivamente " affettato. Tu mi conosci, e devi agevolmente imaginarti la mia " situazione. Oh! quando avran fine questi giorni funesti!... ".

Il 29 novembre il Maulandi è all'Argentera " in mezzo di " cinque piedi di neve "; e dopo *le gite del giorno* deve passar la sera a scrivere *la relazione e gli ordini. Fra pochi giorni* sarà però a Demonte; e *fra pochi altri* spera di poter essere a Torino.

Se la speranza si sia avverata, non so. Certo il 14 gennaio 1794 il Maulandi è a Saorgio, e di là scrive al conte Franchi di Pont a Centallo (1): " Io vivo fra dure montagne, attorniato " dalle atroci imagini d'una guerra crudele; le mie cure sono " sempre micidiali; le mie idee non respirano che stragi e morti: " non posa, non requie; sono destinato a rimanere fra questi " orrori, in questo inverno ".

Di lettere al Somis ne abbiamo nel 1794 due sole; l'una del 20 febbraio senza indicazione di luogo, l'altra del 6 marzo da Saorgio. Nella prima il Maulandi, cercando di rincorare l'amico, molto probabilmente sospettato dal governo d'eccessiva moderazione verso i novatori, se non addirittura di tendenze politiche pericolose, dà interessanti ragguagli di sè, della sua condotta e dei suoi sentimenti:

" *Difficillima tempora*, amico: *incedimus per ignes* (2). Le opi- " nioni stravolte, spirito di parti dettante solo i giudizj degli " uomini, i principii della morale rovesciati, sconvolgimento to- " tale delle idee degli uomini formano un caos, dentro il quale " è impossibile lo schivar gli scogli, che ti presentano il nau- " fragio per ogni dove. L'uomo dabbene, involto nella sua virtù, " consapevole e contento di sè, trova in se stesso quella giusta " ricompensa della sua buona coscienza, che gli niegano gli " uomini acciecati dalle loro passioni. *Perfer et obdura* (3), amico: " che hanno che fare con te i giudizj del volgo? Tu sai, che ho " avuto anch' io a soffrire dell'ingiustizie siffatte. Ebbene, mi

---

(1) La lettera è nella raccolta d'autografi della Biblioteca civica di Torino (*mazzo* 25), ed è in gran parte occupata da un *articolo* in francese " contenente la scena della presentazione dell'ambasciatore turco alla " Czara "; *articolo*, che il Maulandi dice *del comune amico*, e che dev'esser certo di Carlo Bossi, allora residente a Pietroburgo.

(2) Cfr. Orazio, *Carm.* II, 1, 7.

(3) Ovidio, *Amor.* III, 11, 7.

" contentai di rintuzzarle colla mia condotta, senza affannarmene " di troppo. Delicato è il sentirsi tacciare, è vero; ma chi è al " di sopra della calunnia, in questi tempi specialmente? Io pure " recentemente, per aver fatto energicamente il mio dovere, " esponendo la mia opinione contraria a quella di grandi pri- " meggianti, mi son sentito minacciar guerra, e guerra ho pro- " vocato spiegando maggiormente e con più calore tali verità " ed opinioni. Il bene del Paese, il mio dovere saranno sempre " da me anteposti ad ogni interesse privato d'ingrandimento " chimerico. Quale ingrandimento può sperarsi dal tradir il " proprio pensiere, dal rovinare la sua patria? L'unica conso- " lazione, che mi resta, è di versare il sangue per essa, non " potendo di più. Racconsolati pertanto della simile o quasi " simile situazione del tuo amico. Straordinaria forza d'animo " fa d'uopo in questi tempi straordinarii. La letteratura a te, " le occupazioni del tuo impiego, faranno diversione alla me- " lancolia: a me i rischi e le cure della guerra mi torranno " dalle nere rifflessioni, che mi si affacciano alla mente. Addio „.

Nella lettera del 6 marzo il Maulandi si mostra ancor più pessimista, contrapponendo giustamente l'*inerzia mortale* degli alleati all'attività e all'entusiasmo delle truppe repubblicane:

" A. C. Oh se potessi passare di quei momenti, che mi ac- " cenni, fra le lettere, l'amicizia e l'amore! oh quanto sarei " felice! Ma un sogno è per me la felicità; ma le occupazioni " barbare, che mi trattengono continuamente in cure nojose e " atroci; ma il core oppresso dal disordine, che veggo regnare " dapertutto, dall'inerzia mortale, in faccia a nemici attivi ed " entusiasti; una prospettiva di grandissimi disastri, in qualunque " maniera si voglia riguardar la cosa pubblica; ma l'impotenza " di far il bene, vedendolo, e di sfuggire il male, che si pre- " vede, non sono circostanze, che possano illudere la mia mente " un istante, ed abbandonarmi a un soave delirio di sognata " felicità..... Quest'oggi sul tardi ci fu una scaramuccia sulle " alture dell'Ausione: i Francesi tengono ancora un'altura vi- " cina, detta il Morigone. Siccome questa occupazione potrebbe " essere di grande importanza, partirò questa notte per questo " posto, per darvi le disposizioni di attaccarli e scacciarneli, " ovvero di diffendere i nostri posti se ci attaccano in forza. " Almeno almeno, se si presenterà qualche occasione di combat-

" tere vivamente, potrò versare il fiele che mi amareggia „. E qui segue immediatamente il passo già riportato sulla *donna rispettabile* morsa dal *Solitario*, e che forse non era del tutto irresponsabile dello stato d'animo del Maulandi.

5. Questi trovò non molto dopo l'occasione desiderata di *combattere vivamente*; e nel fatto d'armi del 27 aprile, se dobbiam prestar fede ai versi già citati del suo amico Bossi, parve veramente che cercasse la morte. Fu invece ferito e fatto prigioniero.

Gli amici di Torino non tardarono a saperlo e a trovar mezzo di scrivergli. Ancora da Torino, cioè prima del 20 maggio, pare gli scrivesse il Viale, e gli scrisse di nuovo *appena giunto* a Genova, come narra egli stesso nella lettera già citata del 5 luglio, dalla quale abbiamo le prime notizie sul prigioniero: " A Maulandi scrissi, appena qui giunto, per Nizza, pregandolo " nel tempo medesimo a segnarmi con quale indirizzo potev'io " direttamente scrivergli, onde schivare di passare per mani di " terza persona come avevo fatto per lo passato. Ma egli era " partito per Draguignano, onde mi fu scritto da Nizza, ch'egli " in Draguignano trovavasi, nè si sapea se dovesse andare " anche più oltre; ma che col tempo mi si sarebbe dato del " tutto un perfetto riscontro, che finora non mi è riuscito d'avere. " Spero però che non tarderà molto a giungermi; pertanto, se " volete inviarmi la lettera, mi giova credere che sarammi fat- " tibile di fargliela al più presto pervenire „. Evidentemente il Somis aveva pensato che da Genova, e per mezzo d'un amico dei *giacobini*, sarebbe stato più facile che non da Torino far pervenire una lettera al povero Maulandi. Il 14 luglio il Viale scrive di nuovo, che aspettava la lettera *per Camillo*: ma il 31 gennaio 1795 deve confessare di non averne notizie e di temere per lui: " Nulla ho più risaputo di Maulandi. Ah! ne ho " scritto per ogni dove, ma ne pavento la risposta „. Probabilmente la ferita del Maulandi doveva essere più grave di quanto si era creduto; e invece di trovarsi cogli altri prigionieri, egli era stato lasciato in qualche ospedale. Più tardi fu mandato alle acque termali di Digne, nel Dipartimento delle Basse Alpi. Abbiamo infatti veduto, che ai bagni di Digne attribuiva la sua guarigione.

Contemporaneamente al Viale e agli amici torinesi, s'interessava del Maulandi anche una delle sue *conoscenze* di Milano,

cioè il conte Gian Rinaldo Carli, una cui lettera al Somis credo opportuno riferire integralmente, non tanto in omaggio allo scrittore, veramente illustre, quanto perchè è indice perfetto della mentalità delle classi dirigenti dell'epoca, che non vedevano possibilità di salvezza se non nella più feroce repressione. " *Chi non ha saputo uccidere a tempo, è stato o sarà ucciso* „, aveva scritto l'Alfieri (1) da Parigi; e il Carli e mille altri con lui volevano appunto che si uccidesse *a tempo*:

" Illustrissimo Signore Signor Padron Colendissimo,

" Milano 30 Luglio 1794.

" Spiacemi, che il nostro Maulandi sia ancora prigioniero in " mano degli Eretici Regicidi; e di più che non si sappia no- " vella di Lui. Qualunque volta se ne abbia alcuna, io la prego " parteciparmela.

" La ringrazio della copia della sentenza contro i due per- " versi bricconi. Intendo sentenziato anche il Destefanis. Spero " che così sarà dell'Avv. Fantolini d'Asti (2); e così dovrebbe " accadere a tanti altri. È meglio ad un sovrano aver pochi " sudditi buoni, che esser circondato da moltissimi traditori. Se " questi sono, come non v'è dubbio, tanto numerosi in Piemonte, " e in Torino medesimo, e forse in Corte, cred'Ella che il pe- " ricolo non crescerebbe se si deponessero le armi e si dormisse " sotto l'ombra d'una pace, che non potrebbe essere se non " che simulata? I Genevrini non erano nè sono in guerra. " Cosa n'è avvenuto? Il medesimo dee aspettarsi ogni Paese, " sinchè il veleno non è interamente estinto, e sinchè dura

(1) In un frammento di lettera del 14 agosto 1792 pubblicato per la prima volta da me nel già citato vol. II della *Miscellanea* in onore di A. Manno, pag. 161, nota 2.

(2) I *due perversi bricconi*, giustiziati al pari del Destefanis, sono lo Chantel ed il Junod. Quanto all'*avv. Fantolini d'Asti*, al quale il Carli desiderava cristianamente la stessa sorte, confesso di non saperne nulla. Solo da un documento pubblicato dallo Sforza (*L'indennità ai giacobini piemontesi perseguitati e danneggiati*, Torino, 1908, pag. 80; estr. dalla *Bibl. di storia ital. recente*, vol. II) appare, che nel giugno del 1794 era in Asti un vice-prefetto Fantolino " *delegato per procedere contro i delittuosi in materia* " *democratica* „, e ch'egli fece arrestare parecchie persone, fra le quali l'avv. Felice Berruti, fucilato poi, col fratello medico, nel 1797. Che il Carli abbia fatto confusione di nomi e augurata la forca all'inquisitore anzichè all'inquisito?

“ quell'iniquo decreto della Convenzione Nazionale di dar soc-
“ corso ad ogni popolo, che volesse liberarsi dal proprio Sovrano.
“ Non abbiamo ancora numero sufficiente di truppe. Ne ven-
“ gono giornalmente, sicchè spero che in breve saremo in istato
“ di non temere. Pure, se qualche cosa accadesse a Exiles, a
“ Cuneo o altrove, la prego darmene sollecito avviso.

“ I Belgi refrattarj, che non hanno voluto armarsi, sono
“ lasciati al loro destino. Sono puniti: ma la campagna non è
“ ancor, colà, terminata. Tentano bensì i nemici di penetrare in
“ Brisgovia, e di là pel Tirolo aprirsi la via per l'Italia. Ai
“ Governi di Venezia e degli Svizzeri hanno fatto impertinen-
“ tissime ricerche. Cercano pretesti da per tutto; e pretendono
“ di comandare a tutta l'Europa. Se non si ajutano con attrezzi
“ militari e con danaro i Realisti della Vandea, nei quali io ho
“ sempre riposta l'unica speranza, l'Europa in gran parte è in
“ pericolo. Se invece di dare le 620 mila (1) Lire sterline ai Prus-
“ siani si avessero dagli Inglesi date ai Realisti, tutta la Bre-
“ tagna e la Normandia sarebbero in armi; e, per Dio, a
“ quest'ora sarebbero sotto Parigi. Si son fallati i piani; e siamo
“ ciechi per isciegliere la vera strada. Almeno apprendessimo
“ l'arte, che si usa dai nemici contro di noi; ed è di ajutare,
“ sollecitare, ordire le sollevazioni. Convien persuadere i Fran-
“ cesi che non si vuole conquistar nulla in Francia; ma soltanto
“ di (!) ajutare la buona causa e liberarli dai Tiranni. Queste
“ armi sarebbero più formidabili dei cannoni; ed io sin dalla
“ prima campagna non mancai di predicare e di scrivere queste
“ verità: ma fatalità de' nostri tempi è quella di dover confes-
“ sare con Medea

“ ... *video meliora, proboque:*
“ *Deteriora sequor* „ (2).

“ Basta: si conservi in buona salute, e mi creda

“ tutto Suo De.^{mo} S.^{e} e Amico
“ *GC.* „ (3).

---

(1) Il numero è scarabocchiato e, salvo per la prima cifra, di lettura incerta.

(2) Ovidio, *Metam.* VII, 20-21.

(3) Il testo della lettera occupa quasi due facciate del formato di in-4°. Nella quarta facciata è l'indirizzo al conte GB. Somis, *Vice Procurator Ge-*

Notiamo in questa lettera, che è importante anche per la condizione ufficiale di chi la scrisse, il timore, mal dissimulato, d'una pace separata del Piemonte; pace, che si voleva far credere pericolosa, date le condizioni interne del paese, e che forse si cercava di render più difficile anche collo spingere il governo piemontese ad infierire contro gli implicati nella nota congiura. Quanto all'osservazione che " è meglio ad un sovrano " aver pochi sudditi buoni, che esser circondato da moltissimi " traditori „, osservazione messa dopo l'augurio di ampio uso della forca, essa, più che d'esser commentata, meriterebbe d'esser stata illustrata da quello stesso caricaturista, che rappresentò, se ben ricordo, Robespierre in atto di decapitar egli il carnefice dopo avergli fatto decapitare tutti gli altri Francesi.

6. Il Maulandi rimase *prigioniero, in mano,* come diceva il Carli, *degli eretici regicidi,* per non meno di quindici mesi; negli ultimi dei quali era a Tournon, di dove diresse al Somis le due sole lettere che abbiamo di lui scritte durante il tempo della prigionia.

Nella prima lettera, del 23 maggio 1795, si accenna già alla speranza in uno scambio di prigionieri: " La nostra sorte " da qualche tempo in qua si è migliorata di assai. Il vortice " politico tuttavia, entro cui siamo aggirati, ha movimenti così " irregolari e rapidi, che il nostro stato e la presente nostra " tranquillità è affatto incerta e precaria. Si parla di cambi. Il " Conte d'Agliano, che recherà questa mia in Piemonte, parte " sulla parola. Egli è mio amico, nè gli invidio questa prefe- " renza; ma non tralascio di rifflettere che io caddi ferito in " mano del nimico dieci giorni prima di lui, e che mi lusingava " di non essere dimenticato dal nostro governo „.

Il 20 del successivo giugno le speranze di poter rimpatriare erano sempre più vive; e più vive, benchè contaminate dalla

---

nerale di S. R. M., in Torino. Testo e indirizzo sono indubbiamente di mano del Carli, il quale indica il suo nome di battesimo colla sola iniziale *G* (*Gianrinaldo*) anche negli altri scritti autografi, che posseggo o che ebbi occasione di vedere. Il sigillo in ceralacca rossa è ormai quasi spianato, ma corrisponde certo a quello, pure mal conservato, d'una lettera al libraio Carlo Scapin di Padova, in data di Milano, 1° dicembre 1790.

retorica, si facevano pure le lagnanze: “ Io vivo fra gli odi e
“ le vendette atroci, in terra nimica fumante sempre di sangue,
“ lungo un fiume rotolante cadaveri umani! e il mio core deve
“ lanciarsi al di là dell'Alpi, fra voi, per nodrire l'inestinguibil
“ sete di amore pei suoi simili! „.

Giunse finalmente, nell'agosto, il giorno della liberazione, certo coll'obbligo al Maulandi di non prender più parte alla guerra; obbligo che non gli impediva di seguirne ansiosamente il corso, e forse d'offrire i suoi consigli. Infatti il 13 settembre 1795 egli scriveva al Somis da Carrù, dicendogli di esservisi trattenuto lungamente in villeggiatura, e che non sarebbe probabilmente di ritorno in Torino se non fra dieci o dodici giorni, volendo prima *far un viaggetto a Savona e su quelle frontiere.* “ Le nuove dell'armate (*continuava*) sono sempre sconsolanti per noi: disposizioni cattive, peggiore esecuzione, esito pessimo. Quando mai “ si finirà di spargere il sangue piemontese senza profitto? „. La lettera successiva, l'ultima che ho diretta al Somis, è del 26 ottobre, da Givoletto, il piccolo paese da cui, sei anni addietro, era partita la prima, colla confessione dell'amore disperato. Ora il Maulandi, invitando il cugino a passar *almeno un paio di giorni in quella sua solitudine,* non accenna affatto ai ricordi del passato, ma gli parla d'una *relazione interessante,* della quale *non vorrebbe che si tirassero altre copie,* all'infuori di quella da lui comandata e certo destinata al Governo, poichè *potrebbero comprometterlo* senza alcuna utilità *pel bene della cosa pubblica.* Forse la *relazione* era il frutto della sua visita alle *frontiere* liguri. Il Governo intanto mostrava la sua fiducia nel Maulandi promovendolo in novembre al grado di maggiore.

Non ho notizie del Maulandi per tutto il successivo 1796, così ricco per l'Italia d'avvenimenti e di speranze. In tale anno le vittorie napoleoniche imposero al Piemonte la pace, che, dopo la conquista francese della Lombardia e le successive strepitose vittorie contro gli Austriaci, dovette nel 1797 cambiarsi in alleanza, coll'obbligo di mettere un certo numero di soldati a disposizione della Repubblica. Così il Maulandi venne a trovarsi di fatto, volente o nolente, al servizio della Francia. Una sua lettera, che posseggo, del 23 marzo 1797, al Boucheron, segretario al Ministero degli Affari esteri, lascia, nella sua ironia, facilmente capire quali dovessero essere i sentimenti del suo animo,

comuni del resto a buona parte dei Piemontesi, non esclusi i *giacobini*. Ciononostante, segno dei tempi, la lettera è in francese. La dò qui integralmente e fedelmente:

“ Nibbiola, ce 23 May 97.

“ Mon cher ami, Je viens d'écrire par ce courrier à l'In-
“ tendant Morand de faire passer à vôtre bureau et à vôtre
“ adresse les trois volumes de *Gordon sur Tacite et Salluste*. Je
“ ne pourrais rien vous mander d'intéressant au sujet de nôtre
“ armée; nous sommes sous les ordres du Général en Chef de
“ l'Armée d'Italie, à ce qui paroit par les rapports, qu'on lui
“ envoit officiellement de nôtre force et de nos dislocations.
“ Nous avons même déja mis en exécution un des articles de
“ l'alliance en renvoyant a Milan sous l'escorte de 24 Dragons
“ Piémontois 45 *Esclavons*, qui s'étoient sauvés dans nos états.
“ Au reste rien ne perce encor au sujet de nôtre destination.
“ Nous sommes cantonnés dans cet hameau à 3 milles de No-
“ vare. Nous y menons une vie monastique, n'ayant aucune société
“ ni amusement quelconque. Je n'ai pas encor eu envie de voir
“ à Novare les féseurs et les exécuteurs de nos hautes destinées.
“ On dit qu'on va changer les cantonnemens à toutes les troupes
“ chaque 20 jours. C'est très bien vu. Cette dislocation donnera
“ un air d'activité à nôtre armée, qui ne peut qu'en relèver
“ l'importance. En attendant quelle sera donc la destinée de
“ l'Italie? Mantoue restera-t-elle encor entre les mains des
“ Huns? Quelle paix solide en peut-on espérer? *Eheu, quantus*
“ *equis, quantus adest viris sudor!* (1)... Donnez-moi de vos nou-
“ velles, de celles de nos amis communs tels que Pavesio,
“ Gaschi etc. etc.: mes compliments à M.^r et M.^e Verney, et
“ croyez-moi cordialement

“ Tout à vous
“ CAMILLE MAULANDI.

“ *P. S.* J'ai été bien inquiet sur Bossi au moment des
“ troubles de Venise... Veuilléz m'en donner des nouvelles „.

---

(1) ORAZIO, *Carm.* I, 15, 9-10.

Il 26 settembre 1797, forse in conseguenza d'uno di quei cambiamenti di guarnigione, che il Maulandi ironicamente trovava utili a rialzare il prestigio dell'esercito piemontese, egli era in Acqui, alloggiato " *per biglietta* „ in casa della marchesa Scati. Di là scriveva ad uno dei nominati nella lettera precedente, cioè all'ab. Giuseppe Pavesio, professore di filosofia morale nell'Università e assistente nella Biblioteca di Torino: " Quando io avrò più sicura sede e più tranquillità, forse potrò " pensare a far versi; ma questi tempi son troppo torbidi per " dar luogo ad idee amene „. Più tardi, in altra lettera allo stesso Pavesio del 6 gennaio 1798 (1), accennava ai *rumori,* che si spargevano *riguardo a Roma*, cioè probabilmente sugli avvenimenti del 27 e 28 dicembre 1797, che ebbero così gravi conseguenze: " Aspettiamo con impazienza la conferma di certi " rumori sparsisi riguardo Roma, che si diceva repubblicaniz- " zata, ecc. ecc. „.

7. L'ultima parte della vita del Maulandi non m'è nota se non per ciò che si può ricavare dalle notizie sulla sua morte, cioè dal ricordo che ne fece il Ranza in una nota a pag. 71-72 del fascicolo VI del suo *Anno patriotico* (2), e da una lettera, finora sconosciuta, d'un compagno d'armi.

Il Ranza afferma, che il Maulandi, dopo che i Francesi ebbero " occupato l'anno 7 il Piemonte... e incorporatene le truppe

---

(1) Le due lettere al Pavesio si trovano, segnate coi numeri 121 e 122, nel ms. 267 della Biblioteca di S. M. il Re in Torino. Questo codice, che porta a tergo l'indicazione " Pavesio, *Epistolario* „, contiene in realtà anche lettere dirette ad altri eruditi, quali il Pasini, il Ricolvi, il Rivautella, ecc. ecc. Uno degli *Epigrammi di* Oligoro (pag. 97) è diretto al Pavesio, invitato a pranzo coll'obbligo

" Di rallegrar co' detti *suoi* gli amici
" Nell'udir*lo* felici „.

(2) La nota si riferisce al capitolo già citato del Bossi, scritto a Pietroburgo in settembre 1794. In una nota precedente, nella stessa pag. 71 e parimenti firmata colla sigla del Ranza, si legge che questi nel 1794 s'incontrò in Nizza col Maulandi prigioniero: " Camillo Maulandi, Militare in- " strutto e valoroso, non che Poeta Filosofo come Bossi (testimonio le sue " *Odi* stampate in Parma) difese ostinatamente la Tanarda in qualità di " Ajutante di Campo, fu gravemente ferito, fatto prigione e condotto a " Nizza, dove noi l'abbiamo abbracciato. R. „.

" nelle loro armate, passò a militare in Italia per la libertà „ e che " nella sgraziata rotta di Verona fu fatto prigioniero dagli " Austriaci e condotto in Germania; di dove tornando in... 1800 " morì a Vicenza „. Come si vede, egli ignorava la data precisa della morte, ma la credeva avvenuta in principio del 1800. Il Maulandi era invece morto negli ultimi giorni d'ottobre del 1799, com'è provato dalla lettera, che un Leopoldo Vacha, già ufficiale al servizio del re di Sardegna e caduto poi egli pure prigioniero degli Austriaci, scriveva il 12 dicembre 1799 da Vicenza a Pietro Paolo Burzio, raccomandandosi alla sua protezione per ottenere d'esser rimpatriato: " Cavalchini, Scigala e " Fessigny... pure piemontesi, ... passarono al cambio in Pavia, " saranno 40 circa giorni; e sarebbero stati seguiti dal maggiore " Maulandi, anche lui partigiano francese, se la morte non lo " avesse rapito in Vicenza li ultimi del passato ottobre „ (1).

Mettendo i passi riportati in relazione cogli avvenimenti storici dell'epoca, risulta che il Maulandi (non sappiamo se veramente mutato in *partigiano francese*, come il suo amico Bossi, oppure costretto a far di necessità virtù) dovette trovarsi fra le truppe piemontesi aggregate all'esercito del generale Scherer; che, sconfitto questo esercito dagli Austriaci il 30 marzo 1799 vicino a Verona, cadde egli pure prigioniero, come molti altri suoi compatrioti (2), e fu probabilmente condotto in Austria; che sarebbe stato liberato, come altri ufficiali di famiglie ben note, Cavalchini, Cigala, Feissigny, se non fosse morto a Vicenza, appunto negli ultimi giorni d'ottobre del 1799.

---

(1) Debbo la conoscenza di questa lettera, come già accennai, alla gentilezza del cav. Vincenzo Armando, che la copiò dal ms. Q^2, III, 41 della Nazionale di Torino prima che andasse distrutto, come tanti altri ben più preziosi, nel famoso incendio del 26 gennaio 1904.

(2) Il Botta, *Storia d'Italia dal 1789 al 1814*, Parigi, 1824, vol. III, pag. 225, narra che " in questo fatto per frenare l'impeto del vincitore " e dar campo ai vinti di ritirarsi, prestò opera egregia la cavalleria pie- " montese „; ma che fu nondimeno *tagliata la strada* prima che la ritirata fosse compiuta, cosicchè " dodici centinaia *di soldati* venuti sani in poter " delle genti imperiali ornarono il trionfo di Kray „.

Il programma economico-politico della " Mitteleuropa „ negli scrittori italiani prima del 1848.

Nota I del Socio GIUSEPPE PRATO.

All'idea della " Mittel-Europa „, additata ai popoli dei due imperi come mèta e come compenso ai sacrifici della lor disastrosa avventura, non mancano, secondo il massimo suo profeta, titoli di nobiltà antica, connessi a lontane origini di tradizioni e di eventi.

Tale concetto di una stretta unione politico-economica delle nazioni formanti il nucleo centrale del continente europeo, completata dalle propaggini protese verso oriente in cerca di libera espansione, risulterebbe secondo lui quasi ultima e fatale fase di un processo storico, svoltosi fra mille contrasti ininterrottamente attraverso una lunga serie di secoli, ma maturato con piena coscienza di sè soltanto negli ultimi cento anni, per ricevere, dalla gran crisi attuale, la consacrazione definitiva (1).

La visione non manca di verità complessiva, anche se tendenziosamente esagerata e foggiata a fatalità storica al confessato scopo di dare un contenuto ideale a correnti che pei più si concretano in spontanee armonie di interessi puramente materiali.

È un fatto innegabile che il sacro romano impero dell'età di mezzo, più che creazione arbitraria di sovrani e di pontefici ispirata ad astratta concezione scolastica, fu espressione di un particolare atteggiamento di coltura e di vita individuale e sociale, emergente con caratteristiche analogiche ed unitarie abbastanza numerose e distinte fra le spiccate divergenze parti-

(1) Cfr. H. Naumann, *Central Europe* (tr. ingl.), Londra, 1916, p. 35 e sgg.

colaristiche dei popoli periferici, offrendo elementi di raggruppamento organico in parte compensatori delle innumeri forze discordemente disgregatrici. Basterebbe la maestosa durata dell'augusto fenomeno per attestarlo.

Le contese religiose, le rivalità feudali e dinastiche, la decadenza della Hansa, più tardi le ambizioni prussiane ed i crescenti influssi di più raffinate civiltà straniere dovevan però indebolire i fattori di coesione, riducendoli pressochè ad un nome vano, quando l'invasione napoleonica venne subitamente a risuscitarli con la coscienza della comune offesa e dell'unanime risentimento. L'idea dell'unità non si afferma se non in una vacua finzione al congresso di Vienna, dove si disegnano le incipienti rivalità di egemonia dei due maggiori stati tedeschi. Ma il loro contrasto, che aumenta e si inasprisce fino alla decisa manifestazione anti-austriaca dell'assemblea del 1848, non impedisce nè arresta la lenta, graduale, in parte inavvertita maturanza del concetto di solidarietà, il quale trova negli interessi economici un campo fecondo di consentita azione. Nelle discussioni di Francoforte si parla apertamente di problemi central-europei, comprendendo in tal nome i popoli ed i territori formanti le così dette appendici storiche e naturali del nucleo schiettamente teutonico ed ungarico, non escluse l'Olanda, la Danimarca, la Polonia, l'Italia. Il dissidio verte unicamente sul potere che realizzerà, in modo più effettivo e più saldo, il sogno unitario. Metternich spera a lungo di trattenere e consolidare a Vienna il centro di gravità del sistema. Ma la comparsa di Bismarck lo assicura definitivamente alla Prussia. E l'impresa danese, Sadowa, Versailles, la guerra attuale sono le tappe sanguinose attraverso le quali l'individualità secolare, in gran parte fittizia, del sacro impero, evolve e si concreta nella invertita prevalenza egemonica a pro del nucleo politico più efficiente.

Le fasi e gli atteggiamenti del grandioso fenomeno presentano, secondo i luoghi e le epoche, un vario interesse. L'aspirazione tenace, e spesso indistinta, sembra talvolta smarrirsi in illogici conati. Ma riappare ben presto, se non in fisionomia identica, quasi sempre ravvisabile sotto i lineamenti alterati. Una di queste analogie e di questi ritorni mi sembra degno di particolare ricordo nei riguardi dell'Italia nostra, che del piano grandioso ostinatamente vagheggiato dal pangermanismo formò

per il passato come forma tuttora — geograficamente almeno ed economicamente, se non politicamente ed etnicamente — un fattore di integrazione essenziale. Dell'eco che il problema, oggi tanto appassionante, suscitò, in altri tempi e in momenti non men gravi, fra noi riuscirà perciò interessante qualche sommario cenno.

***

Ci fu nella storia italiana un periodo durante il quale il problema dell'unione economica central-europea venne dibattuto come cosa nostra dalle personalità più rappresentative della coltura e dell'opinione nazionale; e furono gli anni di incertezze e di affannoso disorientamento che precedettero l'esplosione rigeneratrice del 1848.

Il contrasto, da tempo latente, fra la tenacia egemonistica dell'Austria e le nuove aspirazioni della Prussia si veniva allora delineando in termini nettamente economici, connessi allo sviluppo crescente del fortunato Zollverein germanico.

È noto l'insuccesso subìto da Federico List nel 1820, allorchè recò al congresso ministeriale di Vienna la prima proposta della unificazione doganale dell'impero; e la nuova delusione da lui sofferta quando gli fu preclusa la via a sostenere la stessa idea nella riunione di Darmstadt, apertasi poco dopo.

Ma non doveva tardare l'Austria ad amaramente pentirsi della diffidenza e del malvolere dimostrato a quelle proposte, appena incominciò, nella Germania meridionale dapprima, indi intorno all'intraprendente nucleo prussiano, il vasto movimento associativo, destinato a far capo ad una unità commerciale contrapposta, se non ostile, alla tutela ed alla supremazia legale di Vienna (1).

Riusciti vani i tentativi di mettere ostacoli, nel 1833, alla costituzione del grande organismo (2), e dopo aver per qualche

---

(1) Cfr. E. Worms, *L'Allemagne économique, ou histoire du Zollverein allemand,* Parigi, 1874, p. 26 e sgg.

(2) Cfr. H. Richelot, *L'Association douanière allemande,* Parigi, 1845, p. 363 e sg.

tempo ostentato quasi di ignorarne l'esistenza, il gabinetto imperiale intuì la minaccia che ai suoi danni veniva maturando, sebbene non ne abbia apprezzata mai adeguatamente la vitale importanza. Onde, dopo il 1836, lo troviamo più arrendevole, almeno in massima, all'idea di un accordo con la Prussia, o con l'insieme dei consociati; al quale disegno però, ed ai replicati tentativi per attuarlo, creano, in pratica, difficoltà insormontabili la perduranza di un sistema proibitivo rigorosissimo negli stati degli Absburgo, nonchè il dualismo della vecchia monarchia (1).

Ciò tuttavia non impedisce che, fra i popoli soggetti all'Austria, l'idea non si propaghi con crescente favore. Metternich stesso, che già nel 1833 non aveva nascoste le proprie preoccupazioni, a segno da meditare, a scopi di concorrenza, un rapido passaggio ad una libertà di commercio anche più larga di quella promossa dalla Prussia (2), nuovamente confida, nel 1841, i suoi crescenti timori al fido barone di Kübeck (3); il buon volere del quale non riesce però a vincere le resistenze degli interessi organizzati e dei vari particolarismi. Quando, alla fine del 1849, la Gazzetta di Vienna, in una serie di articoli di intonazione manifestamente ufficiosa, si fa banditrice di un intimo accordo con lo Zollverein, il momento propizio è già passato. E i due memoriali del barone di Bruck, in cui il programma della solidarietà central-europea è esposto come emanazione logica dell'impero federativo e come necessario portato delle condizioni economiche del vasto paese, trovano una resistenza passiva nel contegno della Prussia, ormai gelosa della funzione direttiva che intende assumere nella politica tedesca (4).

---

(1) Cfr. Worms, *L'Allemagne économique, ou histoire du Zollverein allemand*, p. 146 e sgg.

(2) Cfr. " L'union douanière prussienne. Metternich à l'empereur François „ (extrait de rapport), 1833, in *Mémoires, documents et écrits divers*, etc., Parigi, 1880, vol. V, p. 519 e sgg., n. 1135.

(3) Cfr. " Politique commerciale de l'Autriche, vis-à-vis de l'Allemagne et de l'Italie „, 20 ott. 1841, in *Mémoires, documents et écrits divers*, vol. VI, p. 564 e sgg., n. 1423.

(4) Bismarck narrò francamente di non aver mai giudicato prudente di favorire le tendenze dell'Austria ad una fusione doganale con lo Zollverein. Cfr. *Pensées et souvenirs* (tr. fr.), 2ª ed., Parigi, 1899, p. 112 e sg. Non

Nella vicenda delle discussioni e delle schermaglie diplomatiche in cui si inizia e si accentua il contrasto (1), un aspetto riesce particolarmente istruttivo in noi: la parte fatta all'Italia nei piani dei due contendenti.

Una constatazione intanto emerge con evidenza sovrana dallo studio di quelle complicate controversie: che cioè, tanto nell'uno che nell'altro campo, considerasi fenomeno necessario e normale l'inclusione della penisola nel raggio d'azione della economia germanica, sia che questa si presenti separata in due organismi rivali, sia che le correnti solidaristiche vi abbiano il sopravvento.

Se Federico List non accenna al nostro paese nelle pagine in cui traccia i confini della progrediente unità commerciale teutonica, includendovi il Belgio e l'Olanda (2), gli è probabilmente perchè il problema delle coste nordiche presentavasi in sul principio con urgenza ed importanza prevalenti. Ma i continuatori della sua opera, in uno stadio più avanzato di maturanza, sospingono lo sguardo assai oltre. All'interesse con cui scrittori come il Reumont e il Mittermayer parlano del fremito di civile risurrezione che agita la patria nostra non è certo estraneo il desiderio di additare ai loro concittadini un fecondo campo di intima intesa e di scambi fraterni (3).

Il disegno però meglio si colorisce nel fervido consenso che presso i governi meridionali ed occidentali tedeschi, il Baden, la Baviera, il Würtemberg, trova ben presto il vasto programma ferroviario proposto dal Piemonte e dalla Svizzera, allo scopo

---

mancarono però anche in seguito, fra gli economisti dei due paesi, gli interpreti autorevoli di un postumo rimpianto sul fallimento di quegli antichi tentativi. Così, fra gli austriaci: E. v. Philippovich, *Ein Wirtschafts- und Zollverband zwischen Deutschland und Oesterreich-Ungarn*, Lipsia, 1915, p. 59; e, fra i tedeschi: W. Gerloff, *Der wirtschaftliche Imperialismus und die Frage der Zolleinigung zwischen Deutschland und Oesterreich-Ungarn*, Berlino, 1915, p. 35.

(1) Cfr. Worms, *L'Allemagne économique, ou histoire du Zollverein allemand*, p. 158 e sgg.

(2) Cfr. *Système national d'économie politique* (trad. franc.), 2ª ed., Parigi, 1857, p. 526 e sgg.

(3) Cfr. particolarmente: C. Mittermaier, *Delle condizioni d'Italia* (trad. it.), Lipsia, Milano e Vienna, 1845, p. 50 e sgg.

di abbracciare in un vasto sistema economico, mercè il valico alpino del Luckmanier, lo Zollverein germanico e gli stati italiani men soggetti alla supremazia absburghese (1); piano che discutesi contemporaneamente dagli organi liberali d'oltr'Alpi con aperto favore (2). E un indice eloquente della rapida diffusione dell'idea scorgesi nei dibattiti del parlamento di Francoforte, dove, nel 1849, i problemi commerciali italiani compaion più d'una volta nei calcoli di espansione della emancipata unità central-europea (3).

Mentre tali disegni accompagnano il graduale affermarsi del nazionalismo anti-austriaco, ad analoghi propositi, sebbene da un inverso punto di vista, intende la corte viennese. Nella citata lettera del 20 ottobre 1841, il Metternich, impensierito dalla divisata diversione delle vie del traffico (4), pone nettamente il problema della necessità di una politica che faccia di Trieste il centro degli scambi marittimi, non solo dell'Austria, ma dell'intiero impero, in esso comprese le provincie italiane ed i finitimi stati vassalli. La quale idea vien completata dal barone de Kübeck, che vorrebbe costituito una specie di Zollverein italo-austriaco, in cui le regioni meridionali della penisola avrebbero funzione economica analoga a quella che alla Baviera ed al Würtemberg compete nell'unione tedesca (5).

---

(1) Cfr. T. A. Gualterio, *Gli ultimi rivolgimenti italiani,* 3ª ed., Napoli, 1861, vol. III, p. 299 e sgg.

(2) Cfr. R. Ciasca, *L'origine del "programma per l'opinione nazionale italiana" del 1847-'48,* Roma, 1916, p. 528 e sgg.

(3) Cfr. Naumann, *Central Europe,* p. 51.

(4) Le preoccupazioni del ministro rispondevano d'altronde ai precedenti della sua politica, che, fin dal 1831, aveva con successo impedita la concessione di privilegi per parte delle corti di Torino e di Firenze alla società dei piroscafi marsigliesi, nel timore potesse sorgere fra i due stati un orientamento commerciale meglio emancipato dalla influenza austriaca. Cfr. A. Sandonà, *Il regno lombardo-veneto, 1814-1859. La costituzione e l'amministrazione,* Milano, 1912, p. 274 e sg.

(5) Cfr. *Mémoires, documents et écrits divers,* vol. VI, p. 570 e sgg. L'Austria aveva d'altronde già incominciato da tempo ad applicare praticamente l'idea, costringendo i minori stati della penisola ad accordare favori doganali particolari ai suoi prodotti. Cfr. per lo stato pontificio: R. Broglio d'Aiano, *La politica doganale degli Stati italiani dal 1815 al 1860,* in "Giornale degli economisti e rivista di statistica", 1911, nn. 11, 12, 13. Allorchè

La polemica giornalistica a cui diede occasione la pubblicazione del libro del piemontese Petitti, sul quale avrem a ritornare fra breve, dimostrò chiaramente quanto un simile programma stesse a cuore ai governanti e interessasse il pubblico della duplice monarchia. È tutto un piano di unità economica austro-italo-germanica quello che appare negli articoli sarcastici e virulenti con cui l' " Osservatore triestino ", la " Gazzetta d'Augusta ", il " Lloyd austriaco " combattono la tesi degli organi piemontesi, svizzeri, berlinesi e bavaresi (a cui plaudono gli inglesi) per il raccordo con Genova (1); ma un piano che fa capo alla ribadita egemonia imperiale, e che, anche economicamente, non implica se non un minimo di rinuncie al proibizionismo monopolistico degli stati ereditari, nè ammette alcun riconoscimento degli interessi vitali di Milano e di Venezia (2).

poi, nel 1847, Roma e Sardegna stipularono, a iniziativa di Pio IX, un embrione di lega doganale, l'Austria, dopo averne contrastata l'estensione con metodi che provocarono persino i rimproveri del gabinetto inglese, vi rispose stringendo una federazione commerciale e politica coi governi di Parma e Modena, e facendo occupare quei paesi dalle sue truppe.

(1) Cfr. *Raccolta di atti officiali e di diversi scritti pubblicati in Italia, in Francia ed in Germania intorno alle presenti vertenze fra l'Austria ed il Piemonte,* Losanna, S. Bonamici, 1846, pp. 119 sgg., 206 e sgg., IX sgg. e passim. Nelle *Osservazioni sulle strade ferrate in relazione alla posta delle Indie orientali,* riprodotte, dal " Lloyd austriaco ", a p. 107 di questa raccolta, particolarmente traspare l'inasprirsi del dissidio, accusandosi i pubblicisti germanici di affettare la massima indifferenza per quanto venisse compiendosi in Austria per dotare la Germania tutta di una linea non interrotta verso l'Adriatico e, attraverso l'Appennino, per Roma e Napoli, " considerando soltanto il mare del Nord e il Baltico, e quasi ignorando " che Trieste è anch'essa una porta della confederazione allemanna ".

(2) Questo episodio — logico epilogo della politica di favore praticata da tempo, cfr. E. Rota, *L'Austria in Lombardia e la preparazione del movimento democratico subalpino,* Roma, 1911, pp. 72 e sgg., 80 e sgg. — sembrerebbe smentire l'asserto degli scrittori triestini, i quali, rinfrescando la tesi vittoriosamente sostenuta dai lombardi prima del 1859, accusarono il governo di Vienna di non aver curati mai gli interessi vitali del traffico della loro città. Cfr. M. Alberti, *Trieste e la sua fisiologia economica,* in " Rivista delle società commerciali ", 31 luglio 1915. La verità è però che i moventi dell'aulica sollecitudine confermano, anche in quel caso, ciò che ebbe ad osservare, per tempi più antichi, un altro storico: che cioè la ragione delle cure date a Trieste devon cercarsi sempre nelle difficoltà incontrate dal commercio austriaco nel suo orientamento verso il nord' Cfr. Grossmann, *Oesterreichs Handelspolitik,* 1914, p. 409 e sgg.

Il " système autrichien bien combiné „ di ferrovie di cui parla Metternich (1), deve dunque significare la consolidazione d'una supremazia che, costretta a fare i conti col temibile rivale cresciutole ai fianchi, vuol mantenere almeno l'Italia nella condizione di una appendice sottratta a influssi concorrenti (2). Pensare agli interessi dei sudditi meridionali, e " pretendere di " voler fare causa distinta da Trieste e da Vienna „, curando i collegamenti della Lombardia con la Germania, con gli stati occidentali e col Mediterraneo, conclude il " Lloyd austriaco „, " è ridicolaggine scientifica e delitto di ribellione „. E il contegno del governo, di fronte all'iniziativa per la linea ferdinandea (Milano-Venezia), si incarica di ribadire tale punto di vista (3).

Non è mio proposito far oggetto di speciale indagine la parte di questa controversia che si svolse al di là delle Alpi.

I periodici e la letteratura occasionale dell'epoca ne contengon certo ben altre traccie; ma una ricerca di tal fatta riuscirebbe necessariamente, nell'ora in cui scrivo, più che mai incompleta, per la inaccessibilità di gran parte del materiale.

Valga il breve accenno a guisa di semplice premessa, indispensabile all'intelligenza dei rilievi — anch'essi più che sommari — che intendo fare circa la rispondenza che gli opposti punti di vista trovaron fra noi e l'influsso che i medesimi esercitarono sulla formazione della risorgente coscienza nazionale italiana.

---

(1) Cfr. *Mémoires, documents et écrits divers*, vol. VI, p. 568.

(2) È la ripresa, in forma più subdola, del programma vagheggiato dai diplomatici viennesi fin dai primi anni della restaurazione, quando Vittorio Emanuele I fu richiesto di entrare in una " federazione italiana „ con l'Austria alla testa: proposta a cui il re, geloso della propria indipendenza, rispose con un dignitoso rifiuto, pur temendone possibile (come risulta dalla sua corrispondenza privata) una dichiarazione di guerra della prepotente vicina. Cfr. D. Perrero, *Gli ultimi reali di Savoia del ramo primogenito ed il principe Carlo Alberto di Carignano*, Torino, 1889, p. 225 e sgg.

(3) Cfr. per il caratteristico episodio: Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, p. 370 e sgg.

***

Lo spettacolo della parabola ascendente dello Zollverein ebbe, sulla mentalità dei nostri scrittori, effetti profondamente suggestivi. Ne fan fede le voci più rappresentative dell'opinione e della coltura, che ne commentano fin dalle origini, e con crescente ammirazione, le fasi. Se nel 1829 Enrico Mayer si limita a ravvisare nelle prime società scientifiche tedesche le antesignane dell'unità morale progrediente (1), ben presto è la federazione economica che attira quasi esclusivamente gli sguardi. Il " Giornale agricolo toscano „ ne addita, nel 1836, l'esempio e l'insegnamento, per gli effetti della libertà commerciale attuata su così vasto territorio (2). Ed un giudizio altrettanto favorevole esprime poco dopo Luigi Serristori (3). Ma uno studio più completo del fenomeno aveva dato, fin dal 1834, Carlo Cattaneo, prospettandone le conseguenze, non meno economiche, che politiche, intellettuali, morali (4). E, nel 1838, Terenzio Mamiani aveva proposto all'imitazione dei principi italiani quella provvida politica unificatrice (5). Mentre A. Mele la chiamava " insigne progresso nella pratica delle più sane e ragionevoli dottrine „ (6). L'entusiasmo per lo Zollverein rapidamente propagavasi anche fra i minori scrittori nostri, che ne seguivano a gara le vicende e gli incoraggianti risultati (7).

---

(1) Cfr. *Società dei naturalisti e medici tedeschi*, in " Antologia „, XXXV, maggio 1829, n. 101, p. 12; riprodotto in " Annali universali di statistica „, vol. XXVIII, apr. 1831, n. 82, p. 99 e sgg.

(2) Cfr. vol. X, 1836, n. 39, p. 349.

(3) Cfr. *Frammento di letteratura*, in " Giornale di commercio „, 4 settembre 1839, n. 36.

(4) Cfr. *Notizie sulla lega daziaria germanica*, in " Annali universali di statistica „, vol. XXXIX, marzo 1834, n. 117, p. 240 e sgg.; e *Progresso commerciale e industriale della Prussia e della Confederazione germanica*, con annot. di G. Sacchi, Ibid., vol. XLVI, ott.-nov. 1835, nn. 136-137.

(5) Cfr. " Documenti pratici intorno alla rigenerazione morale ed intellettuale degli Italiani „, in *Opere*, vol. I, p. 42 e sg.

(6) Cfr. *Della libertà delle industrie*, in " Progresso „, vol. XXI, 1838, p. 57 e sgg.

(7) Cfr. Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, p. 355.

Le simpatie si accentuano nel decennio seguente. Nel 1841 gli "Annali universali di statistica „ dànno ampia notizia della rinnovazione della lega allora avvenuta, magnificandone le conseguenze (1): fatto che porge lo spunto e l'occasione anche agli scritti, comparsi poco dopo, di Ludovico Bianchini (2), di Pasquale Stanislao Mancini (3) e d'altri scrittori del mezzogiorno (4). Con pari ottimismo considerano l'avvenimento il Killias (5) e il Salvagnoli (6) in Toscana, il Melano di Portula in Piemonte (7), Marco Minghetti negli stati pontifici (8). Largamente pure si vale, a scopo di propaganda, del suggestivo esempio il giornalismo giobertiano, fiorito in Torino alla vigilia del 1848 (9).

Studiare ed ammirare quanto si vien compiendo in Germania, per proporsene l'imitazione, non implica necessariamente l'accedere al punto di vista, ivi, in varia forma, manifestato, circa la funzione sussidiaria che al nostro paese può riserbarsi nel sistema economico così predisposto. Numerosi son tuttavia gli scrittori a cui l'idea sorride, sia pure con vari temperamenti, adattamenti e riserve.

---

(1) Cfr. vol. LXIX, agosto 1841, n. 206, p. 217.

(2) Cfr. *Associazione doganale*, in " Progresso „, vol. XXX, 1843, p. 14 e sgg.

(3) Cfr. *L'avvenire dell'associazione*, in " Antologia italiana „, vol. II, 1847, p. 57 e sgg.

(4) Cfr. Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, pp. 431, 481 e sgg.

(5) Cfr. *Pensieri intorno ad una unione doganale italiana*, Lucca, 28 maggio 1843.

(6) Cfr. *Storia dei lavori accademici per l'anno 1843*, in " Atti dei Georgofili „, vol. XXI, 1843, p. 219 e sgg.

(7) Cfr. *Dizionario analitico di diritto e di economia industriale e commerciale*, Torino, 1843, p. 91 e sgg.

(8) Cfr. " Riforma delle leggi frumentarie in Inghilterra „ (1846), in *Opuscoli letterari ed economici*, Firenze, 1872, p. 97 e sgg.

(9) Cfr. E. Passamonti, *Il giornalismo giobertiano in Torino nel 1847-1848*, Roma, 1914, p. 51. Altri autori richiaman l'attenzione sul potente strumento di unificazione trovato dai governi germanici nel programma ferroviario, tracciato con vasta visione dei bisogni generali e dei vicendevoli rapporti. Cfr. G. Potenti, *Strade ferrate della Toscana e dell'Italia in generale, con un prospetto delle linee in esercizio in Europa e in America*, in " Annali universali di statistica „, t. LXXXVII, s. 2ª, vol. VII, marzo 1846, n. 21, p. 338 e sgg.

A due gruppi posson i medesimi essenzialmente ridursi: i fautori di un accordo italo-austro-germanico, tendente a render effettivo nel campo commerciale l'assai labile vincolo unitario imperiale, a benefizio dei comuni scambi e sviluppo delle naturali attitudini produttive di ciascun paese; ed i propugnatori di un programma economico-ferroviario-politico destinato a stringer intimi vincoli fra lo Zollverein e la penisola, con l'esclusione dell'Austria, abbandonata al suo impenitente proibizionismo.

Senza troppa meraviglia, per chi conosce il cieco regionalismo che scema tanto pregio all'opera indubbiamente geniale e benemerita dell'economista lombardo, troviamo alla testa dei primi il nome di Carlo Cattaneo. Il quale, ampiamente illustrando, sugli " Annali „ del 1834, il successo dello Zollverein, calorosamente e senza riserve propugna l'accessione al medesimo delle provincie non ungariche della monarchia danubiana, vagheggiando il momento in cui, con la aperta navigazione di sette fiumi reali, e col libero sbocco su quattro mari, venga dischiuso ai prodotti lombardi (particolarmente alle sete) un magnifico campo di circolazione e di smercio (1). L'autore dello scritto è, in fondo, un buon suddito austriaco, che si preoccupa di far riprendere all'aggregato politico di cui la sua provincia fa parte (sia pure a vantaggio prevalente di quest'ultima) il primato perduto.

Delle altre regioni italiane, neppure un cenno; tranne l'allusione ai quattro mari, dei quali uno è evidentemente il Tirreno, ciò che implica di necessità la sottintesa previsione che gli stati meridionali ed occidentali debban gravitare come satelliti intorno al grandioso sistema imperiale.

Trionfa fin d'allora nel Cattaneo la mentalità gelosamente particolaristica che, nel 1848, lo faceva preferire gli austriaci ai piemontesi nelle vie di Milano, e che, anche in pure questioni economiche, scemava serenità ai suoi giudizî fra i discordi interessi locali (2).

Precursore dello scrittore milanese, nel suggerire la solu-

---

(1) Cfr. *Notizie sulla lega daziaria germanica.*

(2) Cfr. fra l'altro gli scritti polemici ferroviari del 1857, in *Opere edite ed inedite*, vol. V, Milano, 1908, p. 207.

zione che possiam chiamare austriaca, sembrerebbe per verità, fin dal 1822, G. P. Vieusseux. Comunque però, in forma e con intendimenti ben diversi. Trattavasi infatti di risposte alle richieste del ministro Bombelles, le quali non furono pubblicate prima del giugno 1848, per viva premura di amici, e non senza che il loro autore pregasse il lettore " di rammentare lo stato " in cui erano le cose d'Italia dopo i tentativi infelici del 1821, " e di riflettere che *egli* scriveva ad un ministro d'Austria e " che si trattava di presentare un progetto di federazione ita- " liana ad un Congresso di Verona „ (1). Il Vieusseux d'altronde non pensava ad una lega commerciale austro-italiana se non relativamente al Lombardo-Veneto, al quale una larga autonomia commerciale e una carta costituzionale avrebbero consentito di unirsi con vincoli più o men stretti alle regioni sorelle della penisola, avviamento e preparazione al programma di emancipazione integrale, che, per allora, era d'uopo tacere. Non dunque coordinazione organica alla nordica unità, ma affermazione di individualità decisa; non programma di smembramento e di ribadita servitù generale a supposto beneficio d'una regione, ma scopi indiscutibilmente, sebbene velatamente, nazionali.

Intenti non dissimili ispirano, oltre vent'anni più tardi, L. Serristori, allorchè si fa banditore di una lega doganale italiana, muovente dalle provincie austriache e aggregante successivamente a sè Parma, Modena, Lucca, la Toscana, il Piemonte e così via (2). Ma, quasi al tempo stesso, l'idea lanciata dal Cattaneo di una più vasta e stabile intesa fra gli stati italiani da un lato e gli austriaci e germanici dall'altro trova un calo-

---

(1) Cfr. *Frammenti sull'Italia nel 1822 e progetto di confederazione*, Firenze, tip. Galileiana, 1848, prefazione. La raccomandazione del Vieusseux appare tanto più attendibile a chi pensi fra quali diffidenze, ostacoli, contrasti egli conducesse proprio in quegli anni, con miracoli di volontà e di abnegazione, l'impresa benemerita della sua " Antologia „, oggetto di così vigile sorveglianza alle censure dei vari principati italiani e della stessa Toscana. Gioverà pure ricordare che, suo autorevole patrono a mitigarne i rigori, era appunto il Bombelles, della cui famiglia era intimo. Cfr. P. Prunas, *L'"Antologia„ di Gian Pietro Vieusseux*, Roma, 1906, p. 126 e sgg.

(2) Cfr. *Di una lega doganale fra gli Stati italiani*, in " Annali universali di statistica „, vol. LXXV, marzo 1843, n. 228, p. 299.

roso sostenitore in L. Vigna, che ne dimostra i grandi vantaggi dal punto di vista esclusivamente commerciale (1); mentre Gaetano Recchi non giudica, come molti altri, utopia completa il sogno di una così grandiosa federazione (2); e il Killias ritiene possibile che l'Austria, smettendo il sistema proibitivo, si ponga in grado un giorno di formare un solo mercato con la auspicata lega italiana (3).

Per questi autori e per quelli che ne seguono l'indirizzo, l'aspetto politico del problema o non è accennato o passa completamente in linea secondaria (4).

La capitale importanza invece di questo fattore — che non sfugge anche a commentatori stranieri del movimento (5) — appare in tutto il suo peso agli scrittori del secondo gruppo, determinandone l'orientamento più o men nettamente contrario.

Per lo stesso Recchi, a dire il vero, la confusione della lega italiana con uno Zollverein di marca viennese non era punto soluzione unica e necessaria del complesso problema; chè anzi la federazione degli stati della penisola doveva, nel suo pensiero, aver tale indipendenza di movimenti da poter volgersi indifferentemente a oriente o ad occidente, influendo col proprio peso sull'altrui contegno (6). Non trovasi però traccia in lui di pregiudiziale anti-austriaca.

Senza riserve questa rivelasi invece in altri, ben maggiori, scritti.

Contro la prevalenza data dagli economisti tipo Cattaneo alle considerazioni del materiale tornaconto non tardano a sorgere le accuse di spirito prevenuto ed interessato (allora dicevasi “ bancocratico „), del quale si denunziano i pericoli per il carattere nazionale delle provincie soggette allo straniero. Note-

---

(1) Cfr. *Delle associazioni doganali fra vari Stati*, in “ Messaggiero torinese „, 1842, n. 37.

(2) Cfr. *Cenni sul progetto della lega doganale*, in “ Annali universali di statistica „, vol. LXXVII, settembre 1843, n. 231, p. 292 e sgg.

(3) Cfr. *Pensieri intorno ad una unione doganale.*

(4) Cfr. Ciasca, *L'origine del “ programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, p. 497 e sgg.

(5) Cfr. Richelot, *L'Association douanière allemande*, p. 365 e sgg.

(6) Cfr. *Cenni sul progetto di una lega doganale italiana.*

vole in tal senso è la memoria: *Sull'uniformità del sistema doganale tra i vari Stati d'Italia*, letta il 10 agosto 1845 nell'Accademia aretina da Mariano Mucciarelli: sebbene vi si parli meglio assai di semplice autonomia che di possibile ostilità (1). Ma più categorico suona, a conforto della stessa tesi, il giudizio del conte Ilarione Petitti di Roreto, la figura del quale assume subito, nella memoranda controversia, una posizione dominante.

---

(1) Cit. in Ciasca, *L'origine del "programma per l'opinione nazionale italiana" del 1847-'48*, p. 461 e sg.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Marzo 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente dice di avere ricevuto in comunicazione dalla famiglia del compianto Socio Balbiano una copia del suo testamento, e legge quella parte nella quale esprime il desiderio che non si facciano commemorazioni accademiche in suo onore.

Il Direttore D'Ovidio, associandosi alle condoglianze per la perdita dell'illustre Collega, avverte che, assente da Torino, non potè rappresentare ai funerali la R. Accademia dei Lincei, come ne aveva ricevuto incarico dal Vice Presidente dell'Accademia stessa.

Il Presidente comunica la lista degli Istituti e delle persone che inviarono condoglianze per questo nuovo lutto dell'Accademia.

Il Segretario presenta in omaggio per incarico dell'A. Prof. Filippo Eredia il volume *Strumenti e osservazioni di Meteorologia, con norme pel servizio meteorico nelle Colonie* e ne rileva l'importanza e la pratica utilità.

Il Socio PEANO offre in omaggio la 5ª edizione del suo " Formulario Mathematico „ (3 fascicoli).

Presentano per la stampa negli *Atti*:

il Socio PANETTI una sua Nota, *Un apparecchio per lo studio sperimentale delle trasmissioni con cinghie* (*);

il Socio SOMIGLIANA una Nota del Dr. Ing. Gustavo COLONNETTI, *Sul comportamento dei pali di una conduttura elettrica per strappamento completo di una tesata*;

il Socio PARONA una sua Nota, *Notevole deformità nell'apparato cardinale di un Ippurite.*

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

LETTURE

Sul comportamento dei pali di una conduttura elettrica per strappamento completo di una tesata.

Nota del Dr. Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

L'argomento è stato trattato, specialmente dal punto di vista statico, da molti Autori (1); pochi però si sono preoccupati seriamente delle azioni dinamiche che lo strappamento di una tesata porta con sè, e delle conseguenze loro sul comportamento dei pali.

Qui si vuole segnalare all'attenzione dei tecnici un metodo grafico, mediante il quale l'interessante problema può essere razionalmente impostato, e risolto con singolare semplicità.

*
* *

Incominciamo col precisare in qual modo si svolge il fenomeno che vogliamo studiare. Perciò prendiamo in considerazione

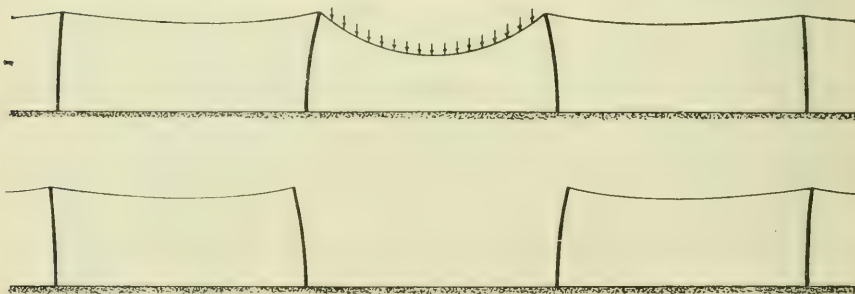



Fig. 1.

una serie di tesate consecutive (fig. 1), e supponiamo che in una di esse intervenga il fatto nuovo che deve determinarne lo strap-

(1) Cfr. la recentissima Nota pubblicata su questo argomento dall'ill. Prof. C. Guidi in questi stessi Atti (pag. 226 e seg.).

pamento: sarà a volte un sovraccarico eccezionalmente grande di neve o di vento, accompagnato forse da un notevole abbassamento di temperatura; altre volte sarà l'urto di un albero che si abbatte sulla tesata gravandovi sopra col suo peso; ma poco importa per noi la conoscenza di questa eventualità: ciò di cui si può esser certi è che essa deve incominciar col determinare un incremento della tensione della tesata.

Il filo o i fili che la compongono saranno infatti stati messi in opera con una tensione tale da lasciare in ogni caso il consueto più o meno grande margine di sicurezza: la loro tensione massima prevista sarà quindi sempre notevolmente più bassa di quella che può causarne la rottura: perchè questa avvenga occorre dunque che la tensione in discorso sia prima cresciuta al di là del massimo previsto fino a coprire tutto quel margine.

Durante questo eccezionale incremento della tensione di una tesata che cosa avverrà dei pali che la limitano?

È evidente che questi, sotto l'azione delle nuove forze in giuoco, dovranno deformarsi inflettendosi verso l'interno della tesata stessa, fino a che le reazioni elastiche che in essi si vengono a generare, unitamente alle accresciute tensioni delle tesate adiacenti divengano sufficienti ad equilibrare l'azione della tesata sovraccaricata.

Segue da ciò che, al momento in cui i fili di questa tesata vengono a rompersi, i pali che la limitano vengono improvvisamente a trovarsi liberi dalle relative tensioni, sotto l'azione simultanea delle reazioni elastiche tendenti ad annullare la precedente deformazione e delle tensioni delle tesate adiacenti in virtù delle quali essi dovranno inflettersi in senso contrario.

Tali pali inizieranno allora una serie di oscillazioni, attorno alla lor nuova posizione di equilibrio, durante le quali la lor resistenza potrà esser messa a ben dura prova.

Il problema della lor capacità a resistere in questa eccezionale eventualità si riduce naturalmente tutto alla determinazione della deformazione massima che si verifica durante il periodo dinamico del fenomeno.

***

Consideriamo dunque un particolare palo e riteniamo, tanto per fissar le idee, che lo strappamento si verifichi nella tesata immediatamente a sinistra di esso.

Supporremo per semplicità che le due tesate che ad esso fanno capo siano entrambe contenute in un medesimo piano verticale, e che in esso giaccia anche uno degli assi principali centrali d'inerzia di ciascuna sezione retta del palo: in queste ipotesi lo stesso piano conterrà anche le varie deformate del palo che a noi potrà occorrere di considerare.

Noi ci limiteremo alla determinazione degli spostamenti della sua estremità superiore, e riterremo, per ragioni sulle quali sarebbe ozioso l'insistere, che le componenti verticali di questi spostamenti siano sempre trascurabili a fronte delle rispettive componenti orizzontali (freccie).

Ciò posto ecco come conviene procedere.

Su due assi coordinati ortogonali Ox ed Oy (fig. 2) si rappresentino rispettivamente gli spostamenti orizzontali dell'estremità del palo e le componenti pure orizzontali delle forze ad esso applicate.

Si sa allora rappresentare graficamente il comportamento elastico del palo mediante una retta $A_2 B_2$, passante per l'origine O, la cui inclinazione sull'asse delle ascisse misura la intensità della forza che all'estremo superiore di esso palo si deve applicare secondo un'orizzontale contenuta nel piano delle tesate se si vuole che l'estremo stesso subisca nella stessa direzione uno spostamento eguale all'unità di lunghezza.

Meno semplice riesce la rappresentazione del comportamento delle tesate, cioè della relazione che lega gli spostamenti orizzontali dell'estremità del palo alle componenti orizzontali delle tensioni dei fili. Purtuttavia il problema si sa sempre risolvere colla voluta approssimazione, sia che si trascurino, sia che si tengano in conto le deformazioni degli altri pali della condutture. Si perviene in ogni caso ad una curva il cui andamento (per la tesata di destra) è quello della $A_1 B_1$, con ordinate lentamente decrescenti per spostamenti rivolti verso l'interno della

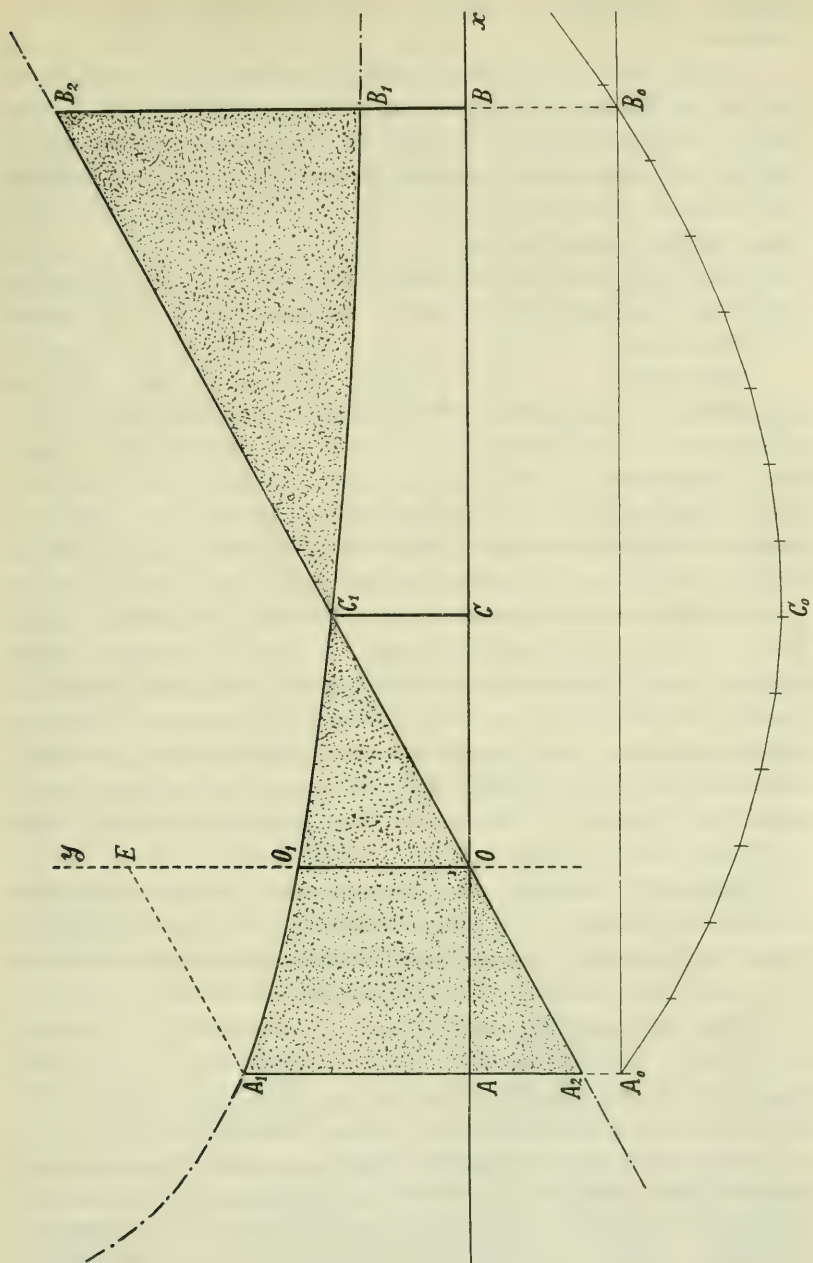



Fig. 2.

tesata, e rapidamente crescenti per spostamenti rivolti verso l'esterno.

L'ordinata $O O_1$ che questa curva presenta in corrispondenza dell'origine misura la tensione orizzontale della tesata di destra nell'ipotesi che il palo non abbia subìta nessuna deformazione. Perchè in queste condizioni esso si trovi in equilibrio occorre naturalmente che una tensione orizzontale eguale sia sviluppata dalla tesata di sinistra.

Sia EO (generalmente assai maggiore di $O_1 O$) la tensione orizzontale che quest'ultima tesata assume quando è sul punto di strapparsi.

Conducendo da E una parallela alla retta $A_2 B_2$ fino ad incontrare in A_1 la curva $A_1 B_1$ si ottiene immediatamente in OA lo spostamento dell'estremità del palo nell'istante immediatamente precedente la rottura: la somma algebrica delle due tensioni orizzontali AA_1 della tesata di destra ed $A_1 A_2 = EO$ di quella di sinistra è infatti identicamente eguale alla forza AA_2 che si richiede per produrre la freccia OA.

Avvenuto lo strappamento della tesata di sinistra, resta in azione la sola tensione della tesata di destra: la nuova posizione di equilibrio si otterrà quindi ancor più semplicemente, imponendo che la componente orizzontale di questa tensione abbia quel valore che giustifica il nuovo spostamento dell'estremità del palo: ciò è quanto dire che questo spostamento è misurato dall'ascissa OC del punto C_1 di intersezione della curva $A_1 B_1$ colla retta $A_2 B_2$.

Senonchè il sistema giungerà in questa nuova sua configurazione di equilibrio con una certa forza viva, equivalente al lavoro sviluppatosi durante il movimento, lavoro che è misurato nel nostro disegno dall'area del triangolo mistilineo $A_1 A_2 C_1$.

Esso sistema oltrepasserà dunque l'accennata configurazione di equilibrio proseguendo nel suo movimento fino a che la sua forza viva si sia annullata, fino a che cioè tutto il lavoro sviluppato si sia trasformato in energia potenziale elastica.

Lo spostamento massimo OB dell'estremità del palo in movimento deve adunque soddisfare alla condizione che l'area del triangolo mistilineo $C_1 B_1 B_2$ sia eguale a quella del triangolo mistilineo $A_1 A_2 C_1$: la posizione del punto B si determina immediatamente per mezzo di una semplice integrazione grafica:

in corrispondenza di tale punto deve invero annullarsi l'ordinata della linea integrale $A_0 C_0 B_0$ dell'area racchiusa fra l'ordinata iniziale $A_1 A_2$, la curva $A_1 B_1$ e la retta $A_2 B_2$ (1).

Basta uno sguardo alla figura per convincersi che le conseguenze dello strappamento di una tesata saranno, pei pali che la limitano, tanto meno gravi quanto maggiore sarà l'inclinazione sull'asse x delle curve caratteristiche delle tesate adiacenti: si viene così a giustificare l'uso, imposto in tempi recenti anche da alcune disposizioni ufficiali, di fiancheggiare le tesate di cui per qualsiasi ragione si teme lo strappamento con tesate di ampiezza molto ridotta.

*
* *

Fin qui si è implicitamente supposto che il palo possa sopportare la sollecitazione derivantegli dallo strappamento completo di una tesata senza che il materiale resistente di cui è costituito si scosti dal comportamento teorico espresso dalla classica legge di Hooke.

Ora è il caso di avvertire che in pratica ciò non si verifica che assai raramente: criterii di economia si impongono al costruttore, e lo inducono a calcolare il palo in base ad ipotesi di carico assai meno sfavorevoli di quella da noi presa in esame: quando questa eccezionalmente si verifichi il palo potrà allora restarne danneggiato: ma si ritiene dai più preferibile questa concessione, alla necessità, in cui altrimenti si incapperebbe, di aumentare in modo rilevante le sezioni resistenti e conseguentemente il costo dell'opera.

Il procedimento grafico che siamo venuti esponendo non

---

(1) È frequente fra i tecnici l'uso di riferire la freccia dinamica OB alla freccia statica OC introducendo un *coefficiente dinamico* per cui questa deve essere moltiplicata se si vuol basare su di essa il calcolo di verifica della resistenza dei pali. Siccome, malgrado l'allungamento plastico dei fili che ne precede lo strappamento (e la conseguente maggiore inclinazione che essi vengono ad assumere in corrispondenza dei sostegni), la tensione orizzontale EO è, nei casi pratici, sempre maggiore di OO_1, quel coefficiente riesce sempre maggiore di due.

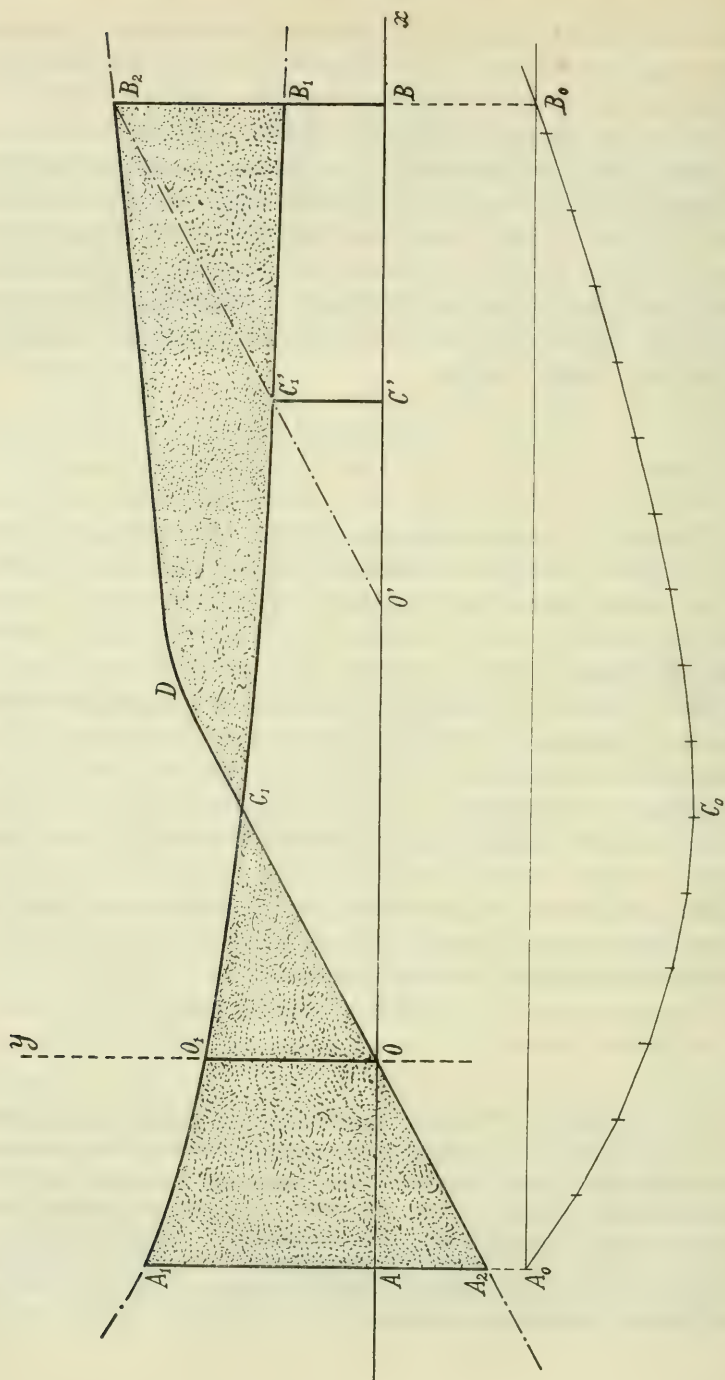



Fig. 3.

cade in questi casi in difetto: anzi si presta ad alcune considerazioni del maggiore interesse.

Naturalmente nell'applicarlo bisogna tener presente che la retta $A_2 C_1$ (fig. 3) non rappresenta il comportamento del palo indefinitamente, ma bensì soltanto fino ad un certo punto D, in corrispondenza del quale il materiale resistente presenta un primo accenno di snervamento, o almeno una prima deformazione permanente. A partire da questo punto la linea DB_2 rappresentativa del comportamento del palo si presenterà, a seconda dei casi, più o meno depressa: a volte potrà anche assumere un andamento parallelo all'asse delle ascisse.

A parte ciò, nulla è da mutarsi nel ragionamento che ci ha condotti alla determinazione della freccia massima OB; muta invece radicalmente l'andamento successivo del fenomeno in ragione della irreversibilità del processo di deformazione permanente.

Tenuto conto però che questa deformazione non altera generalmente in modo apprezzabile il modulo di elasticità del materiale, si può (ove essa non abbia raggiunto valori eccessivi) ritenere che il comportamento successivo del palo venga con grandissima approssimazione rappresentato nel nostro diagramma da una retta $B_2 O'$ parallela alla $A_2 O$.

OO' sarà dunque la freccia permanente prodotta nel palo dalla sollecitazione considerata; quanto alla freccia caratterizzante la nuova configurazione di equilibrio, che il palo stesso assumerà in definitiva sotto l'azione della tensione della tesata di destra, si può, per le ragioni stesse che si sono esposte a suo tempo, concludere che sarà misurata da OC'.

Resta ben inteso che tutto ciò sta in quanto la freccia OB non oltrepassi quei limiti oltre i quali la componente verticale della tensione della tesata potrebbe contribuire, in modo non più trascurabile, ad accrescere la sollecitazione a flessione a cui il palo è soggetto, e quindi ad aggravarne le già critiche condizioni.

Torino, marzo 1917.

Notevole deformità nell'apparato cardinale di un Ippurite.

Nota del Socio C. F. PARONA

(Con 1 Tavola).

Nel suo recente studio " *Di alcuni problemi geologici che risguardano la valle dell'Isonzo* „ (1) il prof. TARAMELLI accennò opportunamente alla convenienza di raccogliere abbondanti dati paleontologici, in quanto che sono indispensabili per determinare l'estensione relativa delle varie *facies* giurassiche e cretaciche in rapporto ai passaggi laterali di *facies* ed alla interpretazione tectonica della regione. In questo ordine di idee, ed anche in vista di utili confronti della geologia appenninica con quelle delle prospicienti terre dalmate, istriane e carsiche, aggiungo, colla presente breve *Nota*, un altro pur modesto contributo paleontologico a quelli già dati (2).

Si conoscono pochi casi di irregolarità nello sviluppo dell'apparato cardinale delle rudiste in generale e degli ippuriti in particolare, tali da modificare radicalmente, se non lo schema fondamentale, la situazione degli elementi costitutivi ed i reciproci loro rapporti, colla conseguente scomparsa di una o di due delle fascie o dei solchi longitudinali, che alla superficie esterna del guscio accennano alla posizione interna della cresta legamentare o cardinale e alle aperture anale e respiratoria, coincidenti, per gli ippuriti, ai pilastri della valva inferiore.

---

(1) T. TARAMELLI, " Rend. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. „ (XLIX, 1916), 1917.

(2) C. F. PARONA, *Le Rudiste del Senoniano di Ruda sulla costa meridionale dell'isola di Lissa,* " Atti R. Acc. Torino „, XLVI, 1911; ID., *Affioramento di " Titonico „ con " Diceras Luci „ presso Parenzo in Istria,* " Rend. R. Acc. Lincei „, XXI (2°), 1912.

Ricordo il caso offerto dall'*Hippurites Baylei* Guisc. (1) del collegamento dei due pilastri, mediante la fusione, o saldatura delle loro lamine peduncolari, in una base unica coincidente con un solco solo all'esterno, oltre quello corrispondente alla cresta cardinale, e l'anomalia simile, fatta conoscere dal Douvillé (2), in un esemplare dell'*H. Gosaviensis* H. Douv.

Il Douvillé ritenne lo *H. Baylei* specificamente inseparabile dall'*H. (Vaccinites) Taburni* Guisc., considerandolo come varietà. Modificazioni nell'apparato cardinale riscontrò pure il Douvillé in due esemplari del suo *Hipp. Jeani*, nell'uno per la saldatura del primo pilastro colla cresta cardinale, nell'altro per la riunione alla base dei due pilastri; e il primo caso trovò ripetuto in una varietà del *Hipp. corbaricus* Douv., e il secondo in un esemplare dell'*H. giganteus* d'Hombr. Firm. (3). Il De Alessandri (4) fra i fossili della puddinga senoniana di Sirone in Lombardia riconobbe lo *H. Taburni* rappresentato dalla forma tipica e da un esemplare anomalo come nel caso dell'*H. Baylei*, con questa differenza che i pilastri, invece di inserirsi direttamente su unica e larga base, sono portati da esile e lungo peduncolo che biforcandosi li allaccia. Il De Alessandri espresse il " parere che queste forme non si debbano ritenere varietà, " ma casi mostruosi o teratologici, imperocchè le differenze fra " esse e le forme tipiche sono tali, che, come già il Pirona aveva " osservato, se fossero costanti, più che a varietà darebbero " cagione a istituire per essi nuovi generi ". — È da notare a questo riguardo che il Douvillé, a proposito delle anomalie riscontrate nell'*H. Jeani*, aveva pure già espressa l'idea che si trattasse di carattere puramente individuale e senza importanza

(1) G. Guiscardi, *Studii sulla famiglia delle Rudiste*, " Mem., Atti R. Acc. Sc. Napoli ", II, 1864, pag. 3, tav. I, fig. 2.

(2) H. Douvillé, *Étude sur les Rudistes; Revis. des princip. espèces d'Hippurites*, " Mém. Soc. Géol. de Fr. ", *Paléontol.*, mém. n° 6, 1891, pag. 29, figg. 16-19.

(3) Douvillé, op. cit., 1895, pag. 154, tav. XVIII, fig. 3, tav. XXII, fig. 2; 1891, pag. 13, fig. 5, pag. 22, fig. 7.

(4) G. De Alessandri, *Fossili cretacei della Lombardia*, " Palaeontogr. Italica ", IV, 1899, pag. 185, tav. XIV (I), fig. 4.

dal punto di vista specifico. — Il Pirona (1), al quale qui si accenna, aveva illustrato una anomalia più complessa e più interessante, presa pure in considerazione dal Douvillé, della quale ora ci occuperemo a proposito e in confronto con altra simile, oggetto di questa Nota.

Presentatomi dall'Ing. Camillo Crema, e cortesemente offertomi in studio, e in dono per il Museo di Torino, dall'Ing. Capo D. Zaccagna, ebbi un grande e bello esemplare di ippurite, trovato nei lavori di trincea sulle falde ovest del M. Sabotino, reso storico dalle epiche gesta dei nostri soldati. Lo raccolse il tenente Oreste Zaccagna, figlio del collega geologo, al quale pure devo un frammento di valva superiore di *Caprina Schiosensis* Boehm. (2), con questa indicazione: " M. Sabotino, ai piedi, probabilmente presso Podgora ". A questi signori rinnovo ora i più vivi ringraziamenti.

Il rinvenimento della *Caprina Schiosensis* confermerebbe l'estendersi dell'orizzonte turoniano del Col dei Schiosi verso oriente, oltre Tarcento, nella valle dell'Isonzo: ma a questo riguardo si devono tener presenti le osservazioni del professore O. Marinelli, nonchè quelle del Redlich (3). — Non posso evidentemente asserire che l'ippurite provenga dallo stesso orizzonte, ma lo ritengo probabile, considerando che identico è il calcare bianco compatto dei due fossili e di identico aspetto del calcare che forma il noto giacimento fossilifero del Col dei Schiosi nel Cansiglio.

L'ippurite in esame è completo (tav. fot. 1, 1 *a*), provvisto delle due valve e di forma tozza: infatti è alto complessivamente mm. 145, col diametro alla commessura delle valve di

(1) G. A. Pirona, *Sopra una particolare modificazione dell'apparato cardinale di un Ippurite*, " Mem. R. Ist. Veneto di Sc. e Lett. ", XXI, 1880.

(2) Cfr. fig. 2 in C. F. Parona, *Saggio per uno studio sulle caprinidi dei calcari di scogliera nelle Prealpi venete orientali*, " Mem. R. Acc. Lincei ", VII, 1908, pag. 11.

(3) O. Marinelli, *Descriz. geolog. dei dint. di Tarcento in Friuli*, " Pubblicaz. R. Ist. St. Sup. ", Firenze, 1902, pag. 40. — A. Redlich, *Die Kreide des Görtschitz-und Gurkthales*, " Jahrb. k. k. geol. Reichs. ", 1899, Bd. 49; Id., *Ueber Kreideverstein. aus d. Umgeb. von Görz u. Pinguente*, ibid., 1901, Bd. 51.

mm. 130. La valva superiore, a margine quasi perfettamente circolare, è appena convessa, con emergenza cupolare nel centro, e colla superficie a pieghe radiali molto somigliante a quella dell'*H. cornuvaccinum* Bronn., anche per la rete alveolare a pori. La valva inferiore ha forma di cono obliquo, irregolare e il suo fianco è ornato da pieghe longitudinali arrotondate, uniformi, alquanto flessuose, separate da solchi profondi e lineari: presso il margine dell'apertura se ne contano in media cinque nello spazio di due centimetri. Considerandone i caratteri mi colpì il fatto insolito dell'esistenza di un unico solco nella valva inferiore (invece dei tre normali in rapporto cogli elementi dell'apparato cardinale) e, in coincidenza sulla valva superiore, di una sola depressione allungata nel senso radiale, rispondente ad un unico osculo, mascherato da incrostazione, che non mi fu possibile di togliere.

Un taglio condotto a circa un centimetro e mezzo sotto la commessura ha dato la spiegazione dell'anomalia, ponendo in evidenza (fig. 1 *a*) dietro al solco un robusto pilastro anteriore (*S*)

Fig. 1 (gr. $\frac{1}{2}$).

ben sporgente, uniformemente largo e all'estremità arrotondato. Su ciascun lato del pilastro, a metà all'incirca della sua lunghezza, si stacca un peduncolo lineare: quello anteriore, piegandosi e incurvandosi verso l'interno, si allarga all'estremità

a forma di staffa, e rappresenta la cresta cardinale (*L*); il peduncolo posteriore, meno inclinato sull'asse del pilastro, si allarga poco dopo a formare il pilastro posteriore (*E*) ripiegato e allargato a capocchia irregolare, allungata. Una fine screpolatura attraverso il pilastro anteriore collega i due peduncoli. Nessuna anormalità si rileva per gli altri caratteri. La fossetta del dente anteriore della valva superiore (*D'*) è molto più grande della posteriore (*D*): assai sviluppato appare il dente (*N*) interposto alle due fossette, e tra il dente stesso e l'estremità troncata, quasi rettilinea, della cresta cardinale si nota un intervallo presumibilmente da interpretarsi come cavità legamentare terminale. Ben distinta è la lamina miofora posteriore (*mp*), mentre di quella anteriore si ha soltanto un accenno, non essendo sufficientemente profondo il livello pel quale fu condotto il taglio; ed infatti della cavità accessoria (*O*) non compare interamente il margine, che è aperto verso la cavità viscerale. Grande lo spessore del guscio nei due strati chiaramente separati, e relativamente ristretta la cavità interna.

La presenza di un solo solco sul fianco della valva e la descritta profonda deviazione dal normale nella disposizione dell'apparato cardinale mi ricordarono l'anormalità dell'*H. Giordani* Pir. suaccennato. L'anomalia è simile ma non identica, in quanto che in quest'ultimo i tre peduncoli, che rispettivamente portano la cresta cardinale e le due capocchie dei pilastri, convergono, non ad una robusta piega rappresentante il pilastro anteriore, bensì ad un peduncolo nastriforme (sezione di piega laminare), che incurvandosi si insinua attraverso lo spessore del guscio in direzione del solco esterno (tav. fot. 2 e fig. 2*a* in testo).

Fig. 2 (gr. $\frac{1}{2}$).

Desiderando procedere ad un confronto diretto, richiesi in comunicazione l'esemplare descritto dal Pirona e l'ottenni dalla cortesia del Prof. Comm. M. Misani, Preside del R. Istituto Tecnico di Udine, al quale sono grato per il favore. L'esame fattone mi dà modo di avvertire che l'estremità libera allargata della cresta cardinale non è irrego-

larmente arrotondata, come risulta dalla figura del PIRONA: è invece nettamente troncata e colla punta anteriore ripiegata ad uncino. La supposizione che l'esemplare del Sabotino potesse essere attribuito specificatamente a questo *H. Giordani* non mi risulta fondata: a parte la forma schiacciata a focaccia, patelloide secondo l'espressione del PIRONA, lo *H. Giordani* ha pieghe longitudinali meno rilevate, ineguali di larghezza e fascicolate per la presenza di piegoline secondarie, che però, almeno in parte, sono da attribuire a particolare modalità di decorticazione e di erosione. Appartiene al gruppo del *Vaccinites giganteus* (1) ed è affine all'*H. gosaviensis*; ma, pur riconoscendo che come specie non è ancora sufficientemente conosciuta, non mi pare che il complesso dei suoi caratteri ne giustifichi l'attribuzione, proposta dal DOUVILLÉ, all'*H. gosaviensis* come varietà.

Verificare la causa delle descritte deformazioni nell'apparato cardinale sarebbe desiderabile e utile, ma evidentemente non è cosa agevole; ed appunto perciò può giovare l'occuparsene nel senso di raccogliere i fatti che valgano a chiarire il quesito, se non a risolverlo. Credo possa contribuire l'osservazione che la deformità nell'*H. Giordani* è manifesta ma parziale nello stadio giovanile, cioè limitata all'allacciarsi mediante un unico lungo peduncolo della cresta cardinale col primo pilastro, rimanendo il secondo indipendente (fig. 2*b*), come si rileva da una sezione presso la base di attacco della valva; mentre nell'esemplare del Sabotino, all'origine della valva inferiore, i tre elementi dell'apparato cardinale si presentano indipendenti e normali, come dimostra la figura 1*b*. La deformità è dunque l'effetto di un processo iniziatosi e svoltosi durante lo sviluppo della valva; e non saprei intravvedere relazioni di sorta con fatti d'ordine filogenetico, o richiami a tipi primitivi, dato che, secondo le vedute del DOUVILLÉ (2), i *Vaccinites* costituiscono un ramo derivato dal genere primitivo *Hippuritella*,

---

(1) H. DOUVILLÉ, op. cit., pagg. 19 e 28. — A. TOUCAS, *Ét. sur la class. et l'évolut. des Hippurites*, " Mém. Soc. Géol. de Fr. ", *Paléontol.*, n° 30, 1903, pagg. 89 e 92.

(2) H. DOUVILLÉ, *Ét. sur les Rudistes*, ecc. " Mém. Soc. Géol. de Fr. ", *Paléontol.*, XVIII, 1910, n° 41, pag. 7 e seg.

presentandone tutti i caratteri in un primo stadio di sviluppo, nonchè lo schema fondamentale differenziato dell'apparato cardinale coi tre elementi distinti. Piuttosto il processo può essere stato provocato dall'intervento di irregolarità funzionali o da cause traumatiche. Probabilmente, moltiplicando le sezioni trasversali nei campioni che offrano simili anomalie si potrà giungere a determinare caso per caso il livello dove l'anomalia si inizia e seguirla nel suo complicarsi successivo, forse con vantaggio per l'indagine delle cause occasionanti e determinanti la deviazione dallo schema normale. Per altro si può dire che queste anomalie non determinavano ostacoli allo sviluppo ulteriore dell'ippurite in individuo adulto e di grande statura: i due ippuriti ora considerati lo comprovano.

Ed ora non mi resta che a dichiararmi relativamente alla specie, cui può essere attribuito l'esemplare del Sabotino. Non parmi dubbio il suo riferimento al gruppo dell'*H. cornuvaccinum* Bronn.; e riguardo alla specie propendo ad assegnarla allo *H. Gaudryi* Mun. Chal., strettamente affine al tipo del gruppo e che fu già riconosciuto altrove nel Veneto orientale e nel Carso triestino (1).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1, 1 *a* — *Hippurites* (Vaccinites) *Gaudryi* Mun. Chalm., ($^1/_2$). M. Sabotino, dalle trincee sulle falde ovest (Podgora, Isonzo).

" 2 — *Hippurites* (Vaccinites) *Giordani* Pirona, ($^1/_2$). M. Lauer presso Subit, sopra Attimis (Tarcento).

---

(1) H. Douvillé, op. cit., 1897, pag. 213, tav. XXXIV, figg. 1, 2. — A. Toucas, op. cit., 1903, pag. 100. — C. F. Parona, *Sopra alcune Rudiste del Cret. sup. del Cansiglio nelle Prealpi ven.*, " Mem. R. Acc. Torino ", LIX, 1908, pag. 148, fig. 8.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Aprile 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Manno, S. E. Boselli, Direttore della Classe, De Sanctis, S. E. Ruffini, e Vidari.

Si legge e si approva l'atto verbale del 18 marzo u. s.

Il Socio Segretario Stampini presenta alla Classe da parte del Prof. Remigio Sabbadini, nostro Socio corrispondente, il secondo volume dell'*Epistolario di Guarino Veronese raccolto ordinato e illustrato* (estratto dalla " Miscellanea di Storia Veneta ", Serie III, vol. XI), comprendente il testo dal num. 507 al 976 e l'Indice degli inizi delle lettere, rilevando anche di questo volume l'alta importanza scientifica. La Classe ringrazia e si rallegra col Prof. Sabbadini. Il Socio Stampini presenta inoltre del Socio corrispondente Carlo Salvioni: 1° *Note di dialettologia corsa* (Estr. dai " Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere ", 1916); 2° *Dell'elemento germanico nella lingua italiana a proposito di un libro recente* (Estr. dai " Rendiconti " pred., 1917); 3° *Ladinia e Italia*, discorso inaugurale letto

l'11 gennaio 1917 nell'adunanza solenne del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Notata l'importanza di tutte queste tre pubblicazioni, il Socio Stampini richiama in particolar guisa l'attenzione dei Colleghi sulla gravità dell'argomento, svolto con altissima competenza di scienziato e con altissimo sentimento d'italianità, concernente la favella ladina, pur troppo minacciata di naufragio dalla penetrazione tedesca anche nella Svizzera stessa. Il discorso, seguìto da molte note, è dedicato dal Salvioni alla memoria de' suoi due figlioli Ferruccio ed Enrico, caduti entrambi *combattendo per Italia e Ladinia in terra ladina*, e alla loro madre che li volle educati a quella morte. La Classe che, a suo tempo, apprese con ammirazione l'eroica morte dei due giovani, ringrazia il Prof. Salvioni per il dono fattole, compiacendosi che la terribile sventura non abbia interrotto l'attività scientifica dell'insigne glottologo.

Il Socio Vidari presenta, per la pubblicazione negli *Atti*, una sua seconda *Nota* su *La coltura dello spirito come ideale pedagogico.*

Il Socio Prato presenta, pure per la pubblicazione negli *Atti*, una sua seconda *Nota* su *Il programma economico-politico della " Mitteleuropa „ negli scrittori italiani prima del 1848.*

Infine il Socio Stampini presenta, perchè sia pubblicata negli *Atti*, una prima *Nota* del Prof. Clemente Merlo della R. Università di Pisa, concernente *L'Articolo determinativo nel dialetto di Molfetta. Parti I e II* (*).

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

LETTURE

La cultura dello spirito come ideale pedagogico.

Nota II del Socio nazionale residente GIOVANNI VIDARI.

3.

Il rapporto così delineato e fissato fra soggetto e oggetto, tra forma e materia nell'ideale di cultura si illumina di nuova luce quando si consideri il RAPPORTO FRA L'INDIVIDUO E LA SOCIETÀ, in cui quello si riflette. Tanto l'indagine storica quanto la psicologica ci hanno dimostrato che i particolari fini, ai quali vien rivolta l'educazione, i procedimenti o didattici o disciplinari, ai quali l'educando è sottoposto, le cognizioni credenze abilità abitudini, nelle quali esso viene esercitato, gli istituti per cui passa (famiglia, scuola, ateneo, ecc.) e gli strumenti che adopera (giuochi, libri, attrezzi, armi ecc.) son tutti di origine sociale, cioè proprii della collettività (tribù, casta, città, chiesa, nazione, ecc.), alla quale l'educando appartiene o che su di lui esercita il proprio potere, e accolti dalla collettività stessa per tradizione, cioè per assenso tacito e sottinteso, o per espresso atto di volere, epperò infine consapevolmente imposti. In nessuna età, in nessuna esperienza pedagogica reale è mai accaduto che una educazione siasi compiuta al di fuori della società, cioè delle istituzioni e pratiche, che in questa si sono storicamente formate e fissate. Appunto perchè, come dicevamo, la cultura dello spirito è il risultato della stessa esplicazione empirica dell'attività del soggetto e del conseguimento dei fini particolari, accade che quella non si possa ottenere al di fuori della società, in cui quei fini sorgono e si impongono, e senza rapporto alle istituzioni e tradizioni sociali, entro cui le attività del soggetto son chiamate a svolgersi.

D'altra parte è anche vero che gli stimoli e gli elementi,

onde si costituisce il sistema sociale di educazione, non agiscono sull'educando se non attraverso alla coscienza personale di questi, la quale naturalmente si comporta in modo diverso rispetto a quelli: ne accoglie più o meno l'influenza o vi reagisce, si plasma su di essi o se ne distingue a seconda del modo come l'attività spirituale adopera e, direi quasi, manovra e guida se stessa. Il bambino nella famiglia, il fanciullo nella scuola, il giovinetto nel ginnasio o nell'ateneo, così come il monaco nel convento, il cavaliere nel castello, il soldato nella caserma, il nobile alla corte si foggiano variamente sulla società che li circonda, ne seguono i costumi, ne accolgono le idee e le credenze, ne perseguono i fini a seconda del modo come la coscienza individuale si atteggia nel valutare e nel giudicare, nel sentire, nel volere, nell'esperimentare e nell'operare. Di nessuna azione educativa sociale potrebbe mai dirsi che siansi riscontrati effetti identici anche in due soltanto degli infiniti educandi.

L'individualità auto-cosciente è dunque il fuoco di concentrazione, di rielaborazione e di trasformazione spirituale delle correnti e azioni di origine e contenenza sociale. E la società a sua volta è il termine a cui sbocca o il terreno in cui fluisce la vita spirituale emanante dal soggetto. Poichè la cultura dello spirito, che si compie nella elaborazione individuale delle azioni educative provenienti dalla società, si traduce poi in opere o conati, in affermazioni o tendenze, in istituti o abitudini, in iscoperte o intuizioni, che poi, irraggiando più o meno largamente, penetrano come forze nuove nel tessuto sociale e vi si adagiano nelle più svariate forme, o modeste o cospicue, o languide o fiorenti.

Fra l'individuo e la società è, dunque, una mutua azione, non nel senso che ambedue compiano una medesima funzione, ma nel senso che compiono ciascuno una funzione propria e diversa, le quali, però, fra di loro si richiamano necessariamente e si integrano nel processo vivo della cultura spirituale. L'UNA, LA SOCIETÀ, PORGE LA MATERIA; L'ALTRA, LA COSCIENZA INDIVIDUALE, PORGE LA FORMA; dall'azione, dirò così, attiva della forma sulla materia, a cui corrisponde l'azione, dirò così, passiva della materia sulla forma, nasce il processo dialettico, cioè di composizione unitaria dei due elementi, in cui lo svolgimento

dello spirito si dispiega, l'individualità si afferma, e la società si rinnovella continuamente per porgere nuovo materiale a ulteriori sviluppi. Onde l'educazione, cioè la formazione del soggetto umano nella ricca e viva esplicazione ed espansione delle sue energie spirituali, non è un fatto esclusivamente sociale, cioè di modellamento esercitato dalla società, da' suoi istituti e poteri, sull'individuo, nè un fatto esclusivamente individuale, cioè di creazione e di sviluppo che il soggetto fa di se stesso, bensì è un fatto che si compie nella *mutua azione eccitativa e nutritiva che la società esercita sul soggetto, formativa e direttiva che il soggetto esercita direttamente su di sè e indirettamente sulla società stessa.* I due termini si devono distinguere, ma non si possono separare: distinguere, perchè non coincidono le loro funzioni, non separare, perchè si richiamano e co-agiscono nel processo educativo.

Polarizzare interamente e assolutamente verso l'uno o verso l'altro termine il fatto dell'educazione è alterarne o, anzi, deformarne la natura. Sostenere, come fanno tuttora alcuni moderni, che l'educazione è un fatto di produzione sociale nel senso più assoluto, che la cultura dello spirito è il risultato della collettività sussistente e operante al di là o al di sopra delle coscienze individuali, e che queste sono pure determinazioni della coscienza collettiva, cosicchè basti foggiare in certo modo gli istituti sociali, le proprietà, le classi, lo stato, la famiglia, la scuola, ecc., perchè *ipso facto* si foggino e si svolgano in modo corrispondente le coscienze individuali, è un errore tanto grave quanto quello di coloro, che concepiscono l'educazione in modo del tutto separato da ogni azione dell'ambiente sociale, cioè delle istituzioni, costumanze, pratiche, nelle quali si esprime la coscienza della collettività, e che quindi, facendo coincidere l'educazione tutta quanta, senza residui, coll'auto-educazione, assorbono nel processo dialettico della coscienza individuale quello della coscienza storica e sociale, e pretendono che al di fuori di ogni azione della famiglia o della scuola, del libro o degli istrumenti didattici, del comune o della nazione, dei costumi o delle leggi lo spirito si educa da sè. Nel primo caso l'individualità, come energia suicosciente, scompare inghiottita nella voragine sociale, o ridotta a cera più o meno molle sotto la pressione plasmatrice dell'ambiente; nel secondo essa si

chiude in sè identificandosi, nell'atto vivo del suo essere, con lo spirito assoluto. In ambo i casi non si può parlare veramente di cultura spirituale e quindi di educazione: non nel primo, perchè viene a mancare ogni azione del soggetto su di sè, epperò sulla società; non nel secondo, perchè l'atto vivo del soggetto, non conoscendo nessun limite fuor di sè, non è neppure un agire, ma è un divenire. Nel primo caso non vi è opera educativa, perchè non vi è vero soggetto educando; nel secondo non vi è neppure, perchè il soggetto educando, in verità, non ha bisogno di educazione. Nel primo non vi è cultura dello spirito, perchè non vi è lo spirito; nel secondo non c'è, perchè lo spirito assoluto non soffre cultura.

Bisogna, dunque, ammettere che, se l'educazione mira in ultimo alla cultura dello spirito, essa non si può pensare che come poggiante per un lato sul potere formativo e direttivo della individualità suicosciente, per l'altro sull'azione eccitatrice e nutritiva dell'ambiente sociale.

4.

Senonchè a questo punto un problema nuovo, importantistissimo, si presenta: se la cultura dello spirito, come ideale pedagogicó, implica lo svolgimento e l'espansione progressiva dei poteri onde la vita spirituale si caratterizza, non può sembrare che ad essa, per sè presa, manchi il principio secondo cui debba dirigersi o la indicazione della via, lungo la quale deve mettersi? Non è forse vero che la cultura spirituale, cultura della mente e del cuore, come suolsi dire, ha bisogno di una guida certa e sicura, senza della quale essa necessariamente degenera o si arresta? Il vero è che nel concetto pieno e bene inteso di cultura spirituale è implicita l'idea della linea, lungo la quale essa si compie, o della legge ideale a cui si deve informare.

Qui conviene partire da due considerazioni: Prima: LA CULTURA DELLO SPIRITO POGGIA EVIDENTEMENTE TUTTA SOPRA la esplicazione di quel potere che, nell'organismo complesso della vita spirituale rappresenta, oserei dire, la colonna vertebrale: IL VOLERE. *Coltivarsi* vuol dire essenzialmente *volersi coltivare*,

cioè, o in maniera diretta, per un preciso e consapevole moto, o in maniera indiretta, per un consentimento implicito, voler svolgere il proprio essere spirituale; volere, o negativamente (col non fare, col resistere, con l'evitare, ecc.), o positivamente (con l'operare, l'intraprendere, il perseverare, il mutare, ecc.), tener in esercizio i proprii poteri, corroborarli, esprimerli, espanderli. Nel volere si concentra e disfavilla tutta la vita del soggetto: nel volere che regge il pensiero e guida il ragionamento, che pone i fini e ispira i giudizi di valutazione, che smorza o riaccende i sentimenti, che tesse in un lavorìo segreto e incessante i proprii disegni e inalvea verso di essi tutta la corrente della vita interiore; nel volere, che palpita nell'attenzione, che trepida nell'attesa, e freme nella speranza, che si esalta nella gioia e si umilia nella delusione, che è presente in chi studia e in chi agisce, nel bambino che si assorbe nel giuoco e nel giovinetto che balza nell'agone della vita; nel volere, dico, è la radice o la forza motrice e organizzatrice di tutta la cultura. Ma perchè il moto e l'organizzazione che il volere imprime ad essa siano nel senso ideale, occorre che il volere stesso si informi del principio supremo, onde tutta quanta la vita dello spirito è dominata, che non può essere se non principio di moralità. *Il volere non è volere ideale, direttivo, organizzatore di una vera cultura spirituale, se non è volere moralmente buono o retto.* E il principio che lo informa è, come sappiamo dall'Etica, quello della PERSONALITÀ, o della stima assoluta che merita l'uomo per se stesso, come essere di ragione, o anche della GIUSTIZIA, secondo la quale le persone son riconosciute e rispettate come tali. Se la cultura poggia sul volere, essa d'altra parte non può non informarsi alla legge morale suprema, a cui il volere è soggetto. Una cultura, che sia bensì creata e sostenuta da una forte e salda, oserei dire, impalcatura di volontà, ma di una volontà ignara o immemore della legge ideale che le è propria, cioè della legge morale, che è legge di giustizia nei rapporti obiettivi, di rettitudine nei rapporti soggettivi, una tal cultura, dico, è spirituale solo di nome, perchè di fatto nega lo spirito stesso nella sua fondamentale e consostanziale esigenza.

Seconda considerazione: onde attinge il suo valore la cultura spirituale? Forse dai fini concreti, che per essa si possono conseguire? Dalla grandiosità ora stupefacente ora terribile dei

suoi risultati, o dalla perfezione tecnica dei mezzi onde i fini sono raggiunti, o dalla rapidità nella attuazione dei disegni, o dalla fecondità, con cui i propositi l'un sull'altro crescono quasi sollecitati dalla stessa ricchezza dei beni che la cultura profonde? In tutti questi casi la cultura trarrebbe il suo valore da fonte non spirituale, cioè dalle cose esteriori in quanto sono quantitativamente misurabili (nel numero, nel tempo, nello spazio, nella forza viva, ecc.) e fra di loro empiricamente comparabili; il che evidentemente non può ammettersi. La cultura spirituale, cioè la vivacità, la forza, la ricchezza, l'impeto produttivo dei poteri spirituali, può bensì, come fatto, esser considerata in rapporto coi fatti esterni (prodotti, risultati, conquiste, avanzamenti, ecc.), a cui essa conduce, e sotto un tale rapporto può ben dirsi che la cultura ha un valor maggiore o minore a seconda della sua maggiore o minore attitudine a produrre tali effetti; ma in questo caso si tratta soltanto di un valore *tecnico,* in quanto implichi adattamento di mezzi a fine, o *economico*, in quanto importi risparmio del costo di produzione. Ma la cultura spirituale non può non avere un valor proprio, indipendentemente dai risultati a cui essa conduce: che se così non fosse, l'unico fondamento del suo valore sarebbe il successo, epperò in fine ciò che nel successo è implicito, cioè la prevalenza della forza materiale o fisica: il che è contradditorio col concetto di cultura spirituale. Onde, dunque, trarrà la cultura spirituale il proprio vero intrinseco valore se non appunto da ciò che caratterizza lo spirito, che è la razionalità come contrapposta alla casualità, la libertà come contrapposta alla necessità, l'universalità come contrapposta alla singolarità, il che stupendamente si riassume nel concetto di personalità, dove la ragione, come principio di legge universale, implica la libertà come principio di attuazione?

Se, dunque, la cultura dello spirito poggia sull'attività del volere, e se non può trarre il suo valore che da se stessa, EVIDENTEMENTE LA LEGGE SUPREMA DEL VOLERE E IL FONDAMENTO SUPREMO DEL VALORE SI IDENTIFICANO, e coincidono con l'ideale etico della personalità umana.

Ciò non vuol dire che l'ideale etico coincida con l'ideale pedagogico. Questo rimane la cultura dello spirito, quand'anche si debba riconoscere che essa trae sua norma e fondamento

dalla legge morale. Se la cultura deve essere informata a rettitudine, ciò non vuol dire che tutta l'opera educativa si debba esaurire nel formare la volontà retta o, come direbbe l'Herbart, il carattere morale; codesto, in fondo, sarebbe un modo troppo alto e troppo angusto insieme di intendere l'ideale dell'educazione e tutta l'opera educativa: troppo alto, perchè si avrebbe di mira quello che al massimo si può dire il culmine dell'edificio educativo, ma non tutto questo nelle sue forme eccelse, sebbene pure fulgenti; troppo angusto, perchè si impoverirebbe a vantaggio di una sola funzione, sia pure centrale e direttiva, tutta la ricca varietà e fecondità della vita interiore.

Infatti, la volontà, come dicevamo, è bensì la colonna vertebrale dello spirito, ma nella direzione del volere, o nel suo adergersi fiero e diritto non si esaurisce tutta quanta la vita spirituale: l'intendere, il sentire, l'operare, in tutte le loro forme e i loro gradi di manifestazione, costituiscono come l'organismo spirituale che cresce intorno e lungo la colonna della volontà, traggono da questa impulso e direzione, si compongono per essa nella unità della coscienza individuale, ma mantengono tuttavia sempre una propria distinta fisionomia e corrispondono a determinate e precise funzioni. L'intendere, che abbraccia il percepire e l'associare, l'ideare e il giudicare, il ragionare e l'esprimersi; il sentire, che va dalle emozioni più semplici e puramente passive dettate dagli stimoli esterni fino alle più complesse e attive suscitate dallo stesso fervore delle rappresentazioni, dall'intreccio degli interessi, dalla irradiazione sociale; e l'operare, che abbraccia i primi moti istintivi e le manifestazioni del giuoco e le forme molteplici del lavoro, in cui tutti i poteri della mente e gli affetti del cuore sono in azione, costituiscono nel loro assieme una corrente viva, or impetuosa, or lenta, or torbida, or luminosa, or estenuata e sottile, or gonfia e traboccante, che il volere non crea dal proprio seno, perchè trova coesistente e concrescente con sè.

Però è anche certo che il volere retto esercita su tutta la vita dello spirito una complessa funzione di guida e di eccitamento, in quanto riesce, non pure a inalvearne e dirigerne la corrente, ma anche, e per il fatto medesimo della consapevolezza direttiva, ad approfondirla e chiarificarla. L'uomo moralmente buono, cioè buono di una bontà non istintiva e naturale,

che è di spesso incoscienza e debolezza, ma di una bontà coscientemente voluta per omaggio a un principio ideale di giustizia, riesce veramente a imprimere a tutta la sua vita quella concentrazione di sforzi, quella serietà di intenti, quella padronanza sicura dei proprii atti e moti, per cui vengono alle sue energie spirituali e alle operazioni conseguenti tutta la vigoria e precisione di cui sono capaci. Una volontà retta in un organismo spirituale è come una forza interiore che seco travolge, eccitando e concentrando intorno a sè, tutte le energie, e fa esprimere da esse tutta la potenzialità loro; a differenza di quel che accade di una volontà moralmente fiacca o oscillante, la quale lascia nella dispersione e nell'oblio consumarsi e languire le potenze spirituali.

Da tutto questo, adunque, deriva che la cultura dello spirito, mentre si deve nettamente distinguere dalla rettitudine del volere, trova però in quella la sua possente forza direttiva e alimentatrice. L'ideale pedagogico si presenta così come subordinato per una parte all' ideale etico della volontà retta, ma per un'altra come ben distinto da esso: è in un certo senso di più ampia estensione e di più densa costituzione; esso è come la materia spirituale molteplice, su cui la volontà retta imprime la propria forma, così come a sua volta la cultura è la forma che domina su l'infinito e mutevole materiale dell'esperienza. Se l'ideale etico può essere definito come LA VOLONTÀ RETTA, l'ideale pedagogico potrà presentarsi come LO SPIRITO CULTO: volendosi nell'un caso restringere la considerazione al criterio o principio normativo e direttivo, secondo cui la volontà, come potere centrale dello spirito, si costituisce; nel secondo caso allargare la considerazione a tutto il complesso di poteri spirituali, in quanto essi nell'esercizio e nell'applicazione si svolgono e perfezionano.

Per una tale distinzione, a mio giudizio assolutamente necessaria e perfettamente giustificata, si spiega come, mentre l'ideale etico importa seco il carattere della assoluta obbligatorietà, questo non aderisca del pari all'ideale pedagogico. Si capisce infatti come possa essere per ogni spirito, per la sua natura di volontà auto-cosciente epperò ragionevole, imperativa in modo assoluto la norma morale della rettitudine, come per esso il dovere di rispettare in sè e in altri la personalità umana

sia categorico; ma non si capisce del pari come possa essere per tutti ugualmente imperativa la cultura dello spirito, cioè come ci possa essere un dovere categorico di esercitare e perfezionare i poteri spirituali. Doverosa è sempre, per tutti, assolutamente, cioè senza restrizioni e riferimenti a fini concreti, la rettitudine del volere; doverosa è del pari la rettitudine nella cultura dello spirito; ma questa presa come *materia* della volontà, come contenuto o oggetto di essa, non può per se stessa essere categoricamente imposta. Che se tuttavia di un dovere della cultura spirituale si può parlare, ciò accade soltanto perchè essa, come dicevamo, dipende dalla stessa potenza dominatrice della volontà retta, che, seco trascinando, sostiene, eccita e concentra in una vigorosa unità d'azione tutte quante le potenze dello spirito. *Noi siamo obbligati alla cultura spirituale*, epperò all'opera educativa, *in quanto, obbligati nel volere ad accogliere le massime della giustizia, ne deriviamo*, ipso facto, *un impulso motore e alimentatore a tutte le energie spirituali.* Non potranno, naturalmente, gli uomini, per le diverse loro condizioni di fatto, conseguire il medesimo grado obbiettivo di coltura spirituale; ma essi in fondo si agguagliano nello sforzo educativo in quanto si agguaglino nello sforzo morale. Così, se il dovere di attuare la Personalità umana, cioè di rispettarla in sè e in altri, è perentorio e assoluto, il dovere di attuare nella cultura dello spirito una ricca, fervida, operosa Individualità è categorico solo in quanto si concepisca come una necessaria conseguenza di quello, come il risultato che, pure in grado diverso, consegue la volontà consapevolmente e saldamente retta.

Il programma economico-politico della “ Mitteleuropa „ negli scrittori italiani prima del 1848.

Nota II del Socio GIUSEPPE PRATO.

Dell'opera del patrizio torinese parla con mal celato risentimento Carlo Cattaneo (1). Indiscutibile è però che, mentre a quest'ultimo non ripugnava la conciliazione austro-lombarda sulla base del comune tornaconto, il primo avvertiva tosto, quasi per istinto, la fatalità dell'insanabile dissidio, e l'ostacolo insormontabile creato ad una lega fra le regioni italiane dall'estranea signoria insediata entro due delle medesime (2). Non pago poi della conclusione negativa, il dotto conte procedeva alla formulazione d'un programma proprio.

Del che gli porgeva occasione il vasto studio da lui intrapreso del problema ferroviario, che agitava in quegli anni l'opinione italiana, ben altrimenti che “ come pretesto di elemosine “ al popolino „ (3).

“ Sarebbe certamente utilissima idea, premette l'autore,

(1) Cfr. *Opere edite ed inedite*, vol. V, p. 245 e sg. Non sapeva perdonare il Cattaneo al Petitti l'aver questi rilevato, con parole di franca deplorazione, il deplorevole spettacolo dato da molti scrittori lombardi nella questione della linea ferroviaria Milano-Venezia, quando il contrasto fra discordi interessi campanilistici minacciò di far naufragare il progetto e così secondare il sognato desiderio del governo austriaco. Cfr. *Delle strade ferrate italiane e del miglior ordinamento di esse*, Capolago, 1845, p. 148 e sgg. *n.* Ancor più apertamente del resto aveva detto il fatto loro ai pubblicisti e capitalisti lombardi Camillo Cavour, *Des chemins de fer en Italie*, in “ Revue nouvelle „, t. VIII, 1846, 1° maggio.

(2) Cfr. *Delle associazioni doganali fra vari Stati italiani*, in “ Atti dei Georgofili „, vol. XX, 1842, p. 131 e sgg.

(3) Così giudica il fenomeno, che ebbe tanta parte nelle discussioni preparatorie del moto nazionale, Guglielmo Ferrero, *La vecchia Italia*, in “ La vita italiana nel Risorgimento „, ser. 2ª, Firenze, 1899, p. 41 e sgg.

“ quella di aggregare l'intiero Impero austriaco con le sue “ provincie italiane e tutti gli altri Stati della penisola all'u- “ nione doganale germanica, con le norme più liberali da questa “ prima adottate..., collegandosi così insieme tutta la media “ Europa, creando un moderatore fra l'Occidente e l'Oriente “ contra pesanti, onde sarebbero ben promossi i grandi e veri “ interessi commerciali, molto consimili, dell'Europa media, dal “ Baltico al Mediterraneo. Ma questa bellissima idea, che to- “ glierebbe ogni linea doganale da Reggio Calabria e da Trieste “ insino a Danzica... non è, per ora almeno, praticabile „. Qualsiasi maggior ingerenza dell'Austria nelle cose italiane, anche sotto forma di contratto bilaterale, è a considerarsi pericolosissima, dati i suoi intenti, palesi e segreti (1).

Senza sentirsi tuttavia animati verso essa da alcuna animosità inconciliabile, riesce possibile fare, fino a un certo punto, astrazione dalla sua esistenza, lasciandola risolvere per conto proprio il problema delle sue comunicazioni con l'Adriatico e con l'Italia, e tracciando da parte nostra una rete organica, che unisca Torino e Genova all'estremo lembo della penisola e si connetta, attraverso i valichi settentrionali, al grande sistema economico nord-europeo (2).

---

(1) Su questo punto ebbe a spiegarsi più esplicitamente il Petitti nel corso delle polemiche a cui diede luogo il suo libro. Rettificando alcuni asserti errati del *Portefeuille diplomatique* di Parigi, egli scriveva, il 20 giugno 1846: “ Il est faux que j'ai proposé une *union douanière* à l'instar “ du Zollverein allemand... Déjà j'avais publié à Florence un mémoire “ tendant à prouver qu'une telle union était impossible, ou, au moins, peu “ convenable aux États italiens. Cette union, en effet, concertée *sans l'Au-* “ *triche*, union que je ne serais pas loin d'approuver, serait impraticable: “ car cette puissance, profitant de l'influence illimitée qu'elle a sur plu- “ sieurs princes italiens, saurait certainement l'empêcher. L'union convenue “ avec l'Autriche, à son tour, augmenterait certainement cette influence, “ au point de nuire à l'indépendance de chaque État, et, quant au nôtre, “ de ruiner entièrement notre commerce si important et si utile avec la “ France. Or, je suis trop bon sujet de mon roi et trop dévoué à mon pays “ pour être jamais d'avis qu'il s'expose à un tel danger; car ce serait le “ plus grand malheur qu'il pût nous arriver que d'être conduits à de sem- “ blables conséquences „. Cfr. *Raccolta di atti officiali e di diversi scritti... intorno alle presenti vertenze fra l'Austria e il Piemonte*, Appendice, p. XIII.

(2) Cfr. *Delle strade ferrate italiane e del migliore ordinamento di esse*, p. 422 e sgg. e discorsi 3°, 4° e 5°.

Così, sotto le apparenze di studio rigorosamente economico, bandivasi un piano politico, sul significato del quale non certo si illudevano i contemporanei (1). Onde s'iniziava, dai due lati dell'Alpi, una delle polemiche che meglio caratterizzano lo stato degli animi di quell'agitato periodo.

La simpatia che gli ambienti nazionalisti tedeschi dovettero provare per un programma che così opportunamente veniva a favorire le loro aspirazioni lontane traspare dall'accenno che il massimo apologista della corrente anti-austriaca lasciò dell'episodio. " Il libro del Petitti, scrive Enrico di Treitschke, fu pre- " zioso ", perchè mostrò il modo di " far correre le ferrovie " attraverso le Alpi e gli Appennini, conducendo il commercio " a Genova, e sostituendo quel porto a Trieste, il beniamino " della corte di Vienna. *Il n'y a plus d'Alpes* " (2). Ma fu in Piemonte che l'idea della proposta coordinazione economica acquistò maggior favore.

Le lettere di Carlo Alberto attestano quale interesse personale egli prendesse al successo dello sbocco in Isvizzera per il valico del Luckmanier, porta di comunicazione fra le due aggregazioni commerciali da congiungersi (3). Nè il sovrano patrocinio fu certo estraneo al rapido popolarizzarsi del progetto.

Se invero non mancarono, anche qui, scettici ostinati (4), la grande maggioranza dei pubblicisti, che incominciavan allora a godere di più larga libertà di parola, si schierò subito in sua decisa difesa. Fra i molti articoli comparsi in questa occasione, alcuni sono particolarmente notevoli per noi, perchè pongono nettamente la questione della reciproca convenienza per l'Italia non austriaca e lo Zollverein di intrecciare stabili rapporti commerciali, da cui le rispettive attitudini produttive traggano integrazione, e dai quali venga dischiusa ed assicurata una gran via di transito fra i popoli settentrionali e l'oriente.

---

(1) Cfr. Gualterio, *Gli ultimi rivolgimenti italiani*, vol. III, p. 125 e sgg.

(2) Cfr. *Il Conte di Cavour* (trad. it.), Firenze, 1873, p. 50.

(3) Cfr. Gualterio, *Gli ultimi rivolgimenti italiani*, vol. III, pp. 298, 310 e sgg.

(4) Così il generale Quaglia, in un articolo comparso sullo " Spettatore subalpino ". Cfr. Passamonti, *Il giornalismo giobertiano in Torino nel 1847-1848*, p. 41 e sg. *n.*

L'Italia, aveva predicato anni prima il " Giornale agrario toscano ", deve farsi naturale veicolo fra il centro d'Europa ed il Levante (1). E l'idea viene dai nostri ripresa ed ampliata, facendo fortuna particolarmente in Genova, non inconsapevole dei vantaggi che potrebbe ricavare dalla ripresa funzione di scalo centrale di intermediazione e di transito asiatico-central-europeo.

Tipici offronsi al riguardo gli articoli che sull' " Eco dei giornali " vien inserendo Michele Erede; perocchè in essi, meglio che in qualsiasi altro scritto dell'epoca, si palesa il concetto dello stabile accordo con la lega germanica, per la comune difesa e la reciproca convenienza. Ragioni geografiche ed armonie economiche integratrici concorrono a confondere gli interessi dello Zollverein con quelli della Svizzera e del Piemonte nel procurare in Liguria il gran sbocco della rinascente Germania. La quale però non deve rinchiudersi nell'esclusivismo che le vien predicando Federico List, ma è d'uopo apra i confini meridionali a un regime di larga reciprocanza, secondo i concetti a cui dimostrasi propenso " l'illuminato governo prussiano "; anzi sopprima sulla nuova via qualsiasi restrizione, onde le merci possan liberamente percorrerla, in entrambe le direzioni, " senza " l'incontro d'alcuna linea doganale " (2).

La violenta levata di scudi degli scrittori austriaci, incitati dai capitalisti triestini e viennesi, contro la corrente di idee che in Germania, non meno che in Isvizzera e nel regno sardo, si viene accentuando, ne aumenta il favore fra il nostro pubblico, facendo assorgere il problema commerciale a questione di dignità e d'indipendenza nazionale (3). In tal senso ne scrive Carlo Alberto al fido Des Ambrois (4).

---

(1) Cfr. vol. XV, 1841, nn. 60, 61, *Considerazioni istorico-politico-economiche sulla lega doganale germanica.*

(2) Cfr. *Raccolta di atti officiali e di diversi scritti... intorno alle presenti vertenze fra l'Austria e il Piemonte*, p. 129 e sgg.

(3) Cfr. Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana " del 1847-'48*, p. 518 e sgg.

(4) " Je désire ardemment que les divers États allemands puissent " s'entendre avec nous et que l'on puisse terminer les accords avec les trois " Cantons, car nous devons redouter les intrigues de l'Autriche ". Cfr. V. Cian, *Carlo Alberto all'opera*, in " Nuova antologia ", 1° giugno 1912.

E l'organo torinese dei giobertiani, entusiasticamente accogliendo il piano del Petitti, sviluppa con particolare studio il concetto degli intimi rapporti economici che posson stabilirsi fra le zone meridionali e medie della Germania e la penisola italiana, specie per le sostanze alimentari e le materie prime, non appena il valico del Luckmanier e gli accordi che devon agevolarne il traffico siano un fatto compiuto (1).

La Germania, bramosa di emanciparsi dall'Inghilterra e dalla Francia per gli scambi oltre oceanici, potrà pure valersi di noi a tal uopo, aiutandoci a restaurare la nostra marina mercantile (2). Perocchè, insiste Michele Erede, la identità di interessi fra Genova, la Svizzera e lo Zollverein è tale da escludere plausibili previsioni di futuro turbamento (3).

Se anche — aggiunge a sua volta il conte Sauli di Igliano — la situazione geografica di Trieste le assicura innegabili vantaggi su Genova per le linee d'oriente e per molte merci, più attivo potrà divenire qui il movimento delle persone. Ma, ciò che assai più monta, l'apertura di una strada collegante il Piemonte con la Svizzera, il Baden, il Würtemberg, la Baviera, la Prussia ed il Baltico fornirebbe " l'occasione di stringere una lega di reciproca malleveria, di cui già da gran tempo " si sarebbe dovuto concepire l'idea. Di cosa nasce cosa e il " tempo le governa. La neutralità della Svizzera è già stata " dichiarata e guarentita. Perchè non lo sarebbe ugualmente " quella degli altri Stati sovraccennati? La Prussia è la sola, " che, a prima giunta, potrebbe avere qualche difficoltà ad entrare in un sistema di neutralità, essa che dall'Alfieri era considerata quasi come un quartiere di truppe. Ma anche colà i " tempi hanno cangiato di aspetto e di tendenze. La spada di " Rosbak è diventata una tenta doganale; il regno del gran " Federico è capo del Zollverein, e come tale ha sommo imperio " alla conservazione della pace. Del resto, se accadesse mai, " locchè Dio non voglia, che le altre potenze venissero a rottura, converrebbe pure stare all'erta e colla mano sull'elsa in

(1) Cfr. " Mondo illustrato ", 17, 24 aprile 1847, 262, 2.

(2) Cfr. " Mondo illustrato ", 26 giugno 1847, 410, 3.

(3) Cfr. *Raccolta di atti officiali e di diversi scritti... intorno alle presenti vertenze fra l'Austria e il Piemonte*, p. 140.

" difesa della neutralità, che talvolta si consente, ma non è poi
" sempre rispettata come una vergine. Ma una via neutrale da
" Genova sino ad Anversa o ad Ostenda, nel tempo in cui gli
" altri paesi fossero in guerra, sarebbe pur la santa e profitte-
" volissima cosa „ (1).

Il fondo di ingenuità quasi infantile con cui uomini tanto diversi per origine, coltura e tendenze auspicavan l'avvento di una fratellanza idilliaca fra i popoli redenti dalle secolari tirannidi doveva di necessità spingere oltre i limiti d'una consigliabile prudenza questo crescente feticismo per l'intima associazione con nuovi stranieri.

Ed è forse contro tale pericolo che vollero reagire taluni altri, cui l'aspirazione dominante verso l'integrale emancipazione nazionale rendeva diffidenti di compromessi e di impegni ambigui, non escludenti, in qualche caso, sospetti di particolari tornaconti.

Il movimento per una politica prettamente italiana, accentuatosi ben presto per non equivoci segni nell'opinione pubblica (2), assume, per merito di costoro, piena coscienza di sè. Vi partecipa autorevolmente il Serristori, abbandonando, nel 1845, il disegno proposto due anni prima, per preconizzare una lega doganale perfettamente autonoma, dalla quale sia bandita qualsiasi partecipazione straniera e tanto meno austriaca (3); ma con larghezza e profondità di vedute ben maggiore ne tracciano il programma le due più alte menti politiche dell'epoca: Camillo Cavour e Cesare Balbo.

---

(1) Cfr. *Lettera seconda all'abate Baruffi*, pubblicata nell' " Antologia italiana „, e riprodotta in F. Predari, *I primi vagiti della libertà italiana in Piemonte*, Milano, 1861, p. 314 e sgg.

(2) A Genova, il 10 dicembre 1847, nella solennità anniversaria della cacciata degli austriaci, 30.000 persone inneggiarono alla lega doganale come preludio alla politica. I giornali e periodici di quei mesi son pieni di apologie dell'idea. Cfr., per molte citazioni, Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, p. 11 e sgg. e passim.

(3) Cfr. *Dell'attuale condizione delle industrie in Italia*, in " Annali universali di statistica „, luglio 1845. Cfr. nello stesso senso l'anonimo opuscolo *Sull'avvenire d'Italia*, cit. in Ciasca, *L'origine del " programma per l'opinione nazionale italiana „ del 1847-'48*, p. 537.

Tutti i biografi del primo ricordano il potere suggestivo esercitato dal meraviglioso articolo in cui, presentando al pubblico francese il volume del Petitti, egli perorava la causa dell'avvenire italiano, additandone, nel campo economico come nel politico, le essenziali direttive (1). Ma non ne fu generalmente rilevata la singolare ecletticità di criteri, che gli fa considerare ugual benefizio per l'Italia tutti gli allacciamenti transalpini, sia che mettan capo alla Svizzera, che a Vienna, per Trieste.

In realtà, se il gran conte ravvisava nell'Austria l'irreconciliabile nemica e, fin dal 1832, ne vagheggiava lo sfratto dalla penisola con l'aiuto della Francia e la cooperazione della risorta Germania (2), non egli nutriva sul conto di quest'ultima tutte le rosee illusioni di molti suoi contemporanei. Già dalla lettera al Salmour, così felicemente esumata dal Ruffini, la coscienza della possibilità che alla egemonia austriaca si sostituisca oltre l'Alpi un non meno opprimente predominio prussiano traspare manifesta. Ma la diffidenza si accentua, con gli anni e l'osservazione, e si precisa. Quando, nell'autunno del 1848, i Buffa, i Valerio, i Sineo, sopratutto quel retore vanesio e di mala fede che fu il Brofferio, inneggiano alla forte Vienna, alla nobile nazione dei Magiari, alla liberale, dotta Germania, sorella del popolo italiano, nello spirito realistico di Cavour già erasi saldamente radicata la convinzione che dal blocco teutonico dell'Europa centrale nulla di buono avrebbe mai potuto attendersi l'Italia (3). “ Egli era, scrive il Ruffini, sotto l'impressione profonda, e non “ più cancellabile, delle aspirazioni veementi alla predominanza “ germanica nel mondo che eran venute fuori dalla Dieta na- “ zionale di Francoforte, dal così detto Parlamento dei profes- “ sori, raccoltosi già nel maggio. Di lì balzò in piena luce, in- “ nanzi agli occhi attoniti dell'Europa, quel partito della *grande* “ *Germania*, il quale, dice bene il Savelli, attingeva ispirazione “ non tanto al principio di nazionalità, quanto anche alle remi- “ niscenze del predominio germanico nell'evo di mezzo, e ai di-

---

(1) Cfr. *Des chemins de fer en Italie.*

(2) Cfr. F. Ruffini, *La giovinezza del Conte di Cavour*, Torino, 1912, vol. I, p. 143 e sgg.

(3) Cfr. Ruffini, *L'insegnamento di Cavour*, Milano, 1916, p. 26 e sgg.

" ritti spettanti all'Impero, e, pieno dell'idea della preminenza
" della civiltà tedesca, proclamava terre polacche, boeme, slo-
" vene e italiane suolo tedesco, sostenendo tradimento verso
" la patria qualunque rinuncia, anche soltanto a parte di tali
" pretese „ (1).

Leggendo però attentamente l'articolo sull'opera del Petitti, uscito più di due anni prima, si ha l'impressione che, almeno nel campo economico, questi convincimenti preesistessero, nella mente del conte, ai moniti emersi dalle non equivoche manifestazioni della Dieta del 1848 e dalla ostile partecipazione dei nazionalisti germanici alla guerra italiana.

Non a caso invero — s'io non m'inganno — l'autore della memoranda recensione si colloca di fronte al problema da un punto di vista schiettamente originale, mostrando di neppur conoscere il piano di isolamento austriaco, implicito nelle proposte del collegamento italo-elvetico, e caldeggiando invece da un lato il valico alpino d'occidente, destinato a far del Piemonte e di Torino " le point d'union du nord et du midi; le lieu ou " les peuples de race germanique et ceux de race latine vien- " dront faire un échange de produits et de lumières „, dall'altro la linea Trieste-Vienna e le sue diramazioni veneto-lombarde e romagnolo-toscane, dischiudenti ai due mercati italiano e tedesco prospettive di scambi grandiosi. Ben lungi dal desiderare orientato il programma ferroviario verso accordi esclusivistici con lo Zollverein, egli vagheggia un sistema che solchi in ogni senso, senza soluzione di continuità, la valle del Po, facendo capo, ai due estremi, alle porte dischiuse nella superata chiostra alpina, e protendendosi, a mezzogiorno, per due vie di razionale pene-

---

(1) Cfr. *L'insegnamento di Cavour*, p. 32. " La nuova potenza germanica " — diceva il conte in uno dei suoi primi discorsi parlamentari — si è " costituita a Francoforte con mire di estrema ambizione. Il germanismo " appena è nato e già minaccia di turbare l'equilibrio europeo, già mani- " festa pensieri di predominio e di usurpazione. La Dieta di Francoforte " non nasconde il divisamento di estendere il suo dominio fino sulle spiagge " del mare del Nord, d'invadere, con trattati o colla forza, l'Olanda, onde " diventare potenza marittima e contestare sui mari l'impero che esercita " l'Inghilterra „. Cfr. F. Artom e A. Blanc, *Il Conte di Cavour in parlamento*, Firenze, 1868, p. 6. L'assemblea, plaudendo alle scempiaggini di Brofferio, coprì di ululati queste parole di meravigliosa veggenza.

trazione, lungo l'intiera penisola. Il vasto disegno è compatibile con l'autonomia morale che lo scrittore vuole gelosamente serbata, affinchè abbia a svolgersene, per forza di eventi, una coscienza sempre più robusta di nazionalità, destinata a prender corpo concreto nella irresistibile maturanza del progresso storico europeo (1). Nè così si apre l'adito a nuovi interventi stranieri, prendenti appiglio da compromessi o vincoli accettati dall'ingenuità nostra. Interpretazione quest'ultima che — quantunque non esplicitamente accennata dal conte — non sembrerà fantastica a chi pensi quale causa di preoccupazione fossero, anche parecchi anni dopo, per Cavour le pretese del germanismo federalistico a talune terre di qua delle Alpi, e come egli ritenesse necessario eliminare i titoli, sia pure esclusivamente formali e storici, che sulle medesime accampava il morituro sacro impero (2).

Non inferiore al suo grande concittadino ed amico nella percezione realistica del problema italo-tedesco, e, sebbene soltanto per considerazioni pratiche, concorde con lui nel giudizio sull'opportunità presente d'una politica autonoma e intransigente-

(1) Tra i biografi di Cavour rilevò questo aspetto dell'opinione da lui espressa in quell'occasione — senza tuttavia indagarne l'intimo significato — il solo W. R. Thayer, *The life and times of Cavour*, Londra, 1912, vol. I, p. 67. Non vi accenna uno dei più autorizzati interpreti del pensiero del conte, che rileva invece il carattere eclettico ed ottimistico dell'articolo. Cfr. W. de la Rive, *Il Conte di Cavour* (trad. it.), Torino, 1911, p. 181 e sgg.

(2) Una chiara percezione del pericolo ebbe il conte nel 1860, quando alcune imprudenti parole del regio commissario nelle Marche, Lorenzo Valerio, suscitarono in tutta la confederazione germanica le recriminazioni più acerbe e la unanime riaffermazione del carattere di " città tedesca „ di Trieste. Cfr. Ruffini, *L'insegnamento di Cavour*, p. 97 e sgg. Fu probabilmente allora che, pur riconoscendo la necessità di lasciar dormire per il momento il grosso problema, Cavour pensò bene di farlo studiare in teoria ed in fatto, sotto ogni suo aspetto storico, giuridico, economico, etnico, politico. Assunse l'impresa il prof. Sigismondo Bonfiglio; il libro, pubblicato a Torino nel 1865, in sole 250 copie (ed. Paravia) (*Italia e Confederazione germanica. Studi documentati di diritto diplomatico, storico e nazionale intorno alle pretensioni germaniche sul versante meridionale dell'Alpi*), rimane, dopo tante recenti opere, di vario valore, sul grande problema, lo studio più esauriente e completo delle contrastanti ragioni e la confutazione più definitiva delle rapaci pretese della secolare invadenza teutonica

mente nazionale, risulta Cesare Balbo. Vive invero rimangono nell'insigne uomo (come già nel Petitti) le illusioni sulla feconda prospettiva di una fraterna intesa italo-germanica, alla quale partecipasse l'intiero impero: " La lega germanico-italica — " scrive — sarebbe magnifica idea, magnifica combinazione. Tutta " la media Europa collegata insieme. Un moderatore tra l'Oriente " e l'Occidente contrappesanti. Inghilterra, Francia e Spagna " tendono ad unirsi, con o senza una gran lega occidentale, " non prossima per certo, ma non impossibile forse un dì o l'altro. " Ma, anche senza tener conto di siffatta eventualità, anche " senza uscir dal presente, non è dubbio che i grandi e veri in- " teressi commerciali dell'Europa media, dal Baltico al Medi- " terraneo, sono molto simili; e che sarebbero quindi ben pro- " mossi da quest'unione economica di tutte le popolazioni " comprese fra i due mari. Queste unioni economiche sono talora " più profittevoli che le stesse comunicazioni materiali: le pro- " ducono o vi suppliscono. A coloro poi che sieno entrati nelle " idee del nostro libro, questa riunione di tutta Italia con tutta " Germania parrà anche più importante; la questione, o anzi " tutte le questioni orientali si scioglierebbero molto più facil- " mente, se queste due nazioni si potessero intendere come due " uomini. Ei s'è usato ed abusato di quell'espressione del *sol- " levarsi le nazioni come un uomo*. Non si potrebb'ella mettere " in uso quest'altra, d'*intendersi come due uomini*? In ciò non " sarebbe da temere, non possibile niun abuso. E quanto all'Italia " in particolare, non è mestieri dire che la lega germanico- " italica sarebbe desiderabile. La preponderanza austriaca vi " sarebbe compensata dalla prussiana; l'interesse italiano del- " l'inorientar l'Austria, sarebbe rinforzato dall'interesse germa- " nico dell'inorientar Austria e Prussia; la spinta italiana dalla " spinta germanica, la molle operosità nostra da quella fortis- " sima; le lontane speranze italiane da tutte le più prossime " germaniche „.

All'attuazione del bel sogno ostano però troppi interessi particolari, in apparenza discordi. Onde è d'uopo rimetterlo a tempi più maturi, concentrando gli sforzi al pratico scopo immediato di una lega schiettamente italiana, formata degli stati indipendenti, con esclusione del Lombardo-Veneto. Se invero questo potesse entrarvi da solo, la cosa sarebbe accettabilis-

sima (1); ma è assurdo illudersi che la potenza dominante voglia consentirlo. Essa desidera invece e promuove una unione dell'intiero suo territorio con gli stati italiani, tale da ribadirne a suo pro il vassallaggio. Nè simile soluzione, propugnata dagli scrittori nati in terra austriaca, può essere da noi accolta, senza colpa, anche se promettesse i maggiori vantaggi economici. " Gli stati, le persone morali non hanno doveri dissimili dalle " individuali: e se ad ogni uomo è dovere (ed all'ultimo utile) " il rigettar qualunque vantaggio di fortuna acquistato con una " viltà, tal è pure agli stati, alle nazioni ". In una lega austro-italiana Vienna non tarderebbe a prendere il posto preponderante che nello Zollverein occupa Berlino. Il che, anche da un punto di vista puramente economico, finirebbe d'altronde per esserci pernicioso, rimanendoci preclusa dagli impegnativi accordi con una potenza proibizionistica la via alle intime relazioni commerciali con Francia ed Inghilterra, " le due nazioni più " passanti e ripassanti per le acque d'Italia " per trafficare con l'oriente (2). Una unione dei principati nazionali, totalmente emancipata da tutele straniere, potrà invece intendersi con queste ultime nazioni per una collaborazione fraterna nel commercio col Levante, dove i nostri naviganti ritroverebbero le non spente tradizioni dei migliori secoli della storia italiana (3).

S'io non m'inganno, pochi scritti dell'epoca rivelano, come queste pagine del Balbo, una chiara anticipata percezione dei precipui problemi, il cui decorso logico formerà la trama della

---

(1) Un vivo movimento in tal senso si era prodotto nelle provincie austriache-italiane, a cui avevan partecipato Daniele Manin, le Congregazioni provinciale e centrale di Milano e molti cospicui cittadini. Cfr. M. D'Azeglio, *Scritti politici e letterari*, Firenze, 1872, vol. I, p. 496 e sgg., doc. 3°; e " Annali universali di statistica ", maggio, giugno, luglio, settembre, novembre, dicembre 1847.

(2) Anche la federazione italiana proposta da Gioberti poggiava sul concetto dell'esclusione dell'Austria; ma la cosa non era detta esplicitamente, ad evitare di provocarne i sospetti sull'indole del movimento. Dell'Austria si taceva il nome " quasi non esistesse e non signoreggiasse " virtualmente di fatto tutta l'Italia ". Cfr. T. Mamiani, *Lettere dall'esilio*, Roma, 1899, vol. I, p. 161. Il Balbo pone invece il problema senza sottintesi, con rude franchezza.

(3) Cfr. *Delle speranze d'Italia*, ed. Napoli, 1848, p. 234 e sgg.

politica europea durante l'intiero secolo. Limpida, fra l'altro, è in lui la visione della fatale spinta del germanismo austriaco verso l'oriente balcanico, come compenso all'irreparabile perdita del dominio italiano (1). Notevolissimo l'accenno profetico al danno gravissimo che da una politica commerciale resa mancipia delle potenze centrali ed ostile all'Inghilterra ed alla Francia deriverebbe particolarmente al mezzogiorno ed alla Sardegna. Soltanto l'apprezzamento delle disposizioni del nazionalismo germanico verso la risorgente Italia si ispira a illusioni di soverchio ottimismo (2). Ed è in ciò sopratutto che la veggenza di Cavour incontestabilmente sovrasta le previsioni del suo concittadino.

S'incarica di fornirne ben presto la prova il parlamento di Francoforte, dove il partito dei " Gross Deutsche ", e in esso particolarmente il gruppo dei " Freisinnige Deutsche ", formato dai delegati austriaci, bandisce un programma di stretta unione, per non dir di fusione, central-europea, esteso a tutti i possedimenti e feudi austriaci in suolo non tedesco (3). Fallitole il piano, la diplomazia di Vienna non abbandona l'idea di rinsaldare intorno a sè l'unità germanica, in difesa della minacciata sua egemonia sui popoli meridionali (4). Schwarzenberg e Schmerling la coltivano, per varia via, con eguale tenacia; e, perfino dopo Sadowa, ne rinnova, con maggior abilità, il tentativo il

---

(1) Questo concetto era stato propugnato poco prima in un'opera che troviamo spesso citata negli scritti degli autori italiani relativi alle leghe doganali: A. de La Nourais et E. Bères, *L'association des douanes allemandes, son passé, son avenir*, Parigi, 1841, p. 145 e sgg. Con incredibile cecità deride la previsione realistica del Balbo, G. Ferrari, *Opuscoli politici e letterari*, Capolago, 1852, p. 342 e sgg.

(2) Anche d'altronde dopo le manifestazioni austrofile dei pangermanisti nella crisi del 1848-49, non mancarono fra gli italiani scrittori propensi a considerare possibile una lega commerciale italo-tedesca. Così N. Vineis, *Dell'associazione doganale alemanna, ossia Zollverein*, in " Rivista italiana ", I (1849), pp. 90 e sg., 223 e sgg.

(3) Cfr. G. Weil, *Le pangermanisme en Autriche*, Parigi, 1904, p. 34 e sgg.

(4) Al rompere della guerra del 1859 il manifesto dell'imperatore d'Austria fece appello a tutti i popoli della Germania, invocandone la attiva partecipazione a difesa d'un suolo che, bagnato dal sangue tedesco, era divenuto retaggio comune. Cfr. L. Chiala, *Lettere edite ed inedite di Cavour*, vol. 3°, Torino, 1884, p. cl *n*.

barone di Beust (1). Ma il 1870 sposta definitivamente a Berlino il centro di gravità delle correnti pangermaniste, a cui le vittorie prussiane imprimono nuovissime energie espansive e combattive.

Un recente scrittore ha voluto porre in contrasto i concetti di Bismarck con quelli di Guglielmo II relativamente alla espansione germanistica, mostrando come l'ambizione del primo si limitasse alla egemonia della Prussia sull'impero, dal quale aveva separato, con taglio violento, l'eteroclito amalgama austriaco (2). A chi ben guardi però l'opposizione appare più esterna che reale, poichè è innegabile che l'ultima fase politica del gran cancelliere, dopo che le vittorie ebbero assisa su basi granitiche la supremazia prussiana, mirò a restaurare, con la triplice alleanza, un nucleo centrale ed organico di interessi, a cui i trattati commerciali Marschall-Caprivi dovevan dare, dal 1891 in poi, un contenuto anche più solido e più fattivo (3).

Dall'alleanza politico-commerciale sotto l'egida armata della Germania imperiale, alla trasformazione insensibile del vincolo solidale in rapporti di vassallaggio (economico, diplomatico e, all'occasione, militare) non è che un passo, nella mentalità teutonica. Mentre invero l'idea di uno stabile e definitivo Zollverein austro-tedesco trova fra i cattedratici dei due paesi degli eloquenti sostenitori (4), per altri la sognata unione deve dila-

(1) Cfr. Weil, *Le pangermanisme en Autriche*, p. 45 e sgg.

(2) Cfr. V. Bérard, *L'éternelle Allemagne, d'après le livre du prince de Bülow*, in "Revue des deux mondes", 1° e 15 febbraio, 1° luglio 1915.

(3) Cfr., sull'unità economica creata con quei trattati: J. Grunzel, *Economic protectionism*, Oxford, 1916, p. 33 e sgg.

(4) Cfr. A. Bertrand, *La conquête de l'Autriche-Hongrie par l'Allemagne. Une nouvelle forme du Pangermanisme. Le "Zollverein"*, Parigi, 1916, 3ª ed., p. 17 e sg. È sintomatica l'evoluzione in tal senso degli stessi scrittori che più ardentemente propugnarono la fase anti-austriaca della politica nazionale di Bismarck, seguendo l'indirizzo di cui fu esponente massimo, nel campo delle idee, H. von Treitschke. Per questi scrittori, ciò che al tempo del *Deutscher Bundestag* aveva messo in serio pericolo l'indipendenza germanica, si è trasformato poi in elemento necessario della sua conservazione. Fra gli altri, cfr. B. Harms, *Das soziale Gewissen*, Berlino, 1915, p. 28. Vero è che, scomparse le diffidenze in Germania, esse accennano a rinascere in Austria, dove si delineano forti correnti contro l'invadenza tedesca. Cfr. R. Michels, *Sull'idea dell'unione doganale tra gl'Imperi centrali*, in "Riforma sociale", 1916, nn. 5-6-7.

tarsi a ben più estesi confini. Fin dal 1884 Paolo Dehn parla della necessità per la Germania, l'Austria e l'Italia di rimanere in unione stretta contro le esterne concorrenze, per riconquistare la parte loro dovuta negli scambi con l'oriente. “ Esse “ formano un grande dominio di interessi economici comuni nel “ mezzo d'Europa, che sarebbe felicemente arrotondato con l'ag- “ giungervi la Svizzera, il Belgio, l'Olanda, la Polonia e la Li- “ tuania..... Per la sua situazione nel cuore dell'Europa, e a “ cagione dell'importanza economica di tale situazione, la Ger- “ mania è chiamata ad assumere l'ufficio dirigente nel centro “ di questo dominio d'interessi „ (1). Pochi anni più tardi Fritz Bley, uno dei fondatori dell'*Alldeutscher Verband*, insegnava: “ Esaminiamo la nostra storia e l'economia mondiale contem- “ poranea. Risulta da tale esame esser necessità urgente che la “ Germania, l'Austria, l'Italia, gli stati balcanici, i due paesi “ neerlandesi e la Svizzera, infine, se è possibile, gli stati scan- “ dinavi si congiungano, e con essi le loro colonie, in un'unione “ doganale comune, fortemente protetta al di fuori „ (2). E Naumann sottolineava esplicitamente: “ Non si tratta più del- “ l'alleanza del 1879, diretta alla sola difesa militare. Si tratta “ di un'assimilazione di interessi politici ed economici, destinata “ ad assicurare nel mondo il predominio definitivo dell'impero “ tedesco „ (3). Al quale scopo è indispensabile che il popolo dominante tenga in pugno saldamente le chiavi e gli sbocchi più vitali dell'intiero sistema; affacciandosi direttamente al conteso Mediterraneo. “ L'avvenire — scrive uno dei maggiori in- “ terpreti della dilagante tendenza — è una Germania estesa “ da Memel a Trieste, dal Baltico all'Adriatico. Soltanto una “ tale Germania potrà adempiere la missione che le è trac- “ ciata dalla Provvidenza. La questione di Trieste è vitale per “ noi. Giammai dovrà quella città essere ceduta agli italiani. “ È la porta sull'Oriente e sul canale di Suez. Trieste deve

---

(1) Cfr. *Deutschland und der Orient*, cit. in C. Andler, *Il pangermanismo* (ed. it.), Parigi, 1915, p. 11 e sgg.

(2) Cfr. *Die Weltstellung des Deutschtums*, 1897, pp. 18, 40.

(3) Cfr. Bertrand, *La conquête de l'Autriche-Hongrie par l'Allemagne*, p. 24.

" essere uno scalo tedesco „ (1). La Turchia, lo proclamò fin dal 1883 Guglielmo Roscher, è predestinata eredità della Germania (2). All'Italia, come alla Bulgaria e alla Grecia, deve bastare la missione di vigile scolta del trionfante sistema sulle sponde del mare meridionale. Nella contegnosa bonarietà con cui il principe di Bülow parla dell'avvenire nostro è implicito questo concetto di protezione verso il docile strumento dei disegni economico-politici della patria sua (3).

Sarebbe molto interessante studiare analiticamente fino a qual punto un simile programma di graduale asservimento, manifestatosi in chiara luce e tradotto in pratica brutale in Austria, in Oriente, in Polonia e nelle Fiandre durante la guerra che si sta combattendo, abbia trovata consenziente fra noi l'opinione pubblica. L'indagine fu tentata nel campo delle idee e della scienza (4); ma non da tutti con la obbiettività spassionata che, nella grave ora che volge, tanto più è doverosa quanto più riesce difficile. Anche rispetto alla penetrazione economica ed ai metodi con cui venne subdolamente condotta, più d'una esagerazione fu detta, fra moltissime osservazioni vere e rivelazioni impressionanti. Comunque è certo che, da quando, nel 1870, Mommsen non sdegnò di giustificare la politica di rapina applicata all'Alsazia-Lorena con tre lettere al popolo italiano, di cui oggi esclusivamente ricordasi la nobile risposta che lor diede

---

(1) Cfr. G. Blondel, *La doctrine pangermaniste*, 2ª ed., Parigi, 1915, p. 40.

(2) Cfr. W. Roscher und R. Jannasch, *Kolonien, Kolonialpolitik und Auswanderung*, Lipsia, 1885, p. 342. Contrario all'espansionismo austro-tedesco in Turchia si era rivelato invece H. von Treitschke, *La Turchia e le grandi potenze* (tr. it.), Torino, 1876, p. 62 e sgg.

(3) Risposero, in fondo, allo stesso programma gli sforzi fatti dalla Germania per correggere il trattato della Triplice, in modo da acquistare titoli a una diretta ingerenza nelle cose del Mediterraneo. Cfr. W. Morton Fullerton, *Les grands problèmes de la politique mondiale* (trad. fr.), Parigi, 1915, p. 360 e sgg.

(4) Notevoli fra gli altri, per la serietà della obbiettiva ricerca, l'articolo di G. Diena, *Per un irredentismo in fatto di scienze sociali*, in " Riforma sociale „, gennaio 1916, e il volume di C. Caristia, *Il diritto costituzionale italiano nella dottrina recentissima*, Torino, 1915. Agli indipendenti, acuti giudizi di quest'ultimo l'esser stati pensati e scritti parecchi mesi prima della guerra attuale conferisce valore e serietà specialissimi.

Fustel de Coulanges (1), ogni blandizia ed ogni seduzione fu posta in opera per fare che i putridi residui di cui secoli di servaggio rendevano pur troppo assai ricco il suolo nostro si svolgessero prontamente in germi fecondi di snazionalizzazione intellettuale e morale. I frutti del diuturno, sistematico, insidioso lavoro si poterono constatare nella torbida ora che precedette la nostra guerra; il cui significato essenziale rimarrà nella storia quello di una grande riscossa emancipatrice.

Ma l'indole ed il valore della crisi psicologica che abbiamo attraversato verranno forse meglio apprezzati ove si risalga, oltre le irritanti contese e le meschine personalità del presente, a quelle sue origini men note e lontane.

A due conclusioni essenzialmente fa capo il sommario sguardo che abbiam rivolto a quei remoti precedenti.

Risulta da un lato che il programma della subordinazione politico-economica dell'Italia ai piani del sistema imperiale central-europeo fu comune, sebbene in varia forma, all'Austria non meno che alla Germania appena sorgente; la quale ultima finì per esprimerlo in una politica di alleanze, preludio a fusioni sempre più intime.

Ma appare d'altronde che, anche nel periodo in cui più fervida si agitava fra noi l'aspirazione indistinta al riscatto nazionale, la gran maggioranza degli scrittori italiani accolse fiduciosamente, sebbene in varia forma e con diverse riserve, l'idea di una cooperazione solidale con la Germania unificata, a integrazione delle due economie e contrappeso delle estranee concorrenze.

La quale diffusa opinione, se per un verso spiega il substrato favorevole trovato, in più maturi tempi, dalla politica triplicistica, non può a meno dall'altro che indurci a riflettere quanta colpevole leggerezza sia quella di chi oggi vorrebbe artificialmente precludere, a guerra finita, la ripresa di relazioni economiche normali coi nostri vicini del settentrione (2).

---

(1) Cfr. *Questions contemporaines*, Parigi, 1916, p. 89 e sgg.

(2) La rispondenza innegabile del programma central-europeo con parecchie fra le condizioni essenziali dell'economia italiana può scorgersi anche in ciò: che, perfino durante la guerra attuale, suscitatrice di tanti

Se la storia psicologica dell'idea pangermanistica ci rende sempre meglio persuasi del dovere di premunirci a qualunque costo da quanto essa contiene di soverchiante invadenza (e così conferma la fatalità indeprecabile della nostra ribellione armata al crescente asservimento), è impossibile negare tuttavia che il consenso che essa incontrò, anche in epoche di esaltato nazionalismo, di qua dall'Alpi, indica l'esistenza nella medesima di un nocciolo di verità profonde, che non son altro fuorchè l'espressione di una concordanza di interessi economici, la cui libera intesa può essere feconda ad entrambi di beni non agevolmente sostituibili.

Spiegare gli orientamenti durevoli dei popoli con l'azione di fattori occasionali o personali è ingannevole espediente di facile semplicismo. Nel permanere delle correnti, nei ritorni, spesso in veste diversa, delle idee, nel riprodursi inconscio degli atteggiamenti e dei fenomeni si rivelano invece le ragioni intime degli avvenimenti, i fili conduttori della vita secolare delle nazioni, i pronostici più sicuri circa le logiche sorti del loro avvenire.

Marzo 1917.

---

elementi perturbatori della obbiettiva visione delle cose, le due correnti in contrasto alla vigilia del 1848, la austro-italica e la germano-italica, risorgono in manifestazioni varie: rivelandosi la prima particolarmente nelle proposte di taluni scrittori francesi ed inglesi, tendenti a restaurare un impero non troppo dissimile da quello del 1815 e suscettibile di stabili intese coi vicini dell'occidente e del sud; ed espressa la seconda nella tesi di più d'un italiano, concordi con G. A. Borgese nel voler risparmiare fino a un certo segno la Germania, in vista della creazione futura d'una Media Europa latino-alemannica, a contrappeso interposto fra slavi e inglesi. Cfr. G. Belloncі, *La lega latina,* in " Minerva ,, 16 marzo 1917.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Aprile 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente, accennando alla grave disgrazia che colpì il Socio Senatore Carle, colla morte del figlio Avv. Emanuele, dice di essersi fatto interprete dei sentimenti di tutti i colleghi presentando alla famiglia le più vive condoglianze, che ora rinnova.

Presenta, e pone a disposizione dei Soci, una lettera del Sottosegretario di Stato Dallolio sulla " costituzione dell'Ufficio Invenzioni „ e relativi allegati con istruzioni.

Il Socio Guareschi fa omaggio di tre sue pubblicazioni (*Osservazioni sulla chimica dell'alimentazione; Sui nuovi metodi di coltivazione del frumento in Francia; Petrolii ed emanazioni terrestri e loro origine*) e ne discorre, specialmente di quella sui petrolii, ponendo in evidenza i meriti che in ordine agli studi e alle ricerche relative si devono riconoscere allo Stoppani, al Silvestri, al Fontana, fra gli italiani.

Il Socio Mattirolo offre in omaggio a nome dell'autore Vespasiano Talucchi una Nota preventiva dal titolo *Brevi cenni sulla vita e sulle opere dell'Architetto Gius. M. Talucchi*, riassumendone i risultati.

Il Presidente ringrazia i donatari anche per le interessanti comunicazioni.

Si presentano per la stampa negli *Atti*:

Dal Socio Segre: *Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazi ad* n *dimensioni*; Nota di Eugenio G. Togliatti.

Dal Socio Mattirolo: *Ricerche chimiche sull' " Elaphomyces hirtus "*; Nota del Dott. Giovanni Issoglio, con prefazione del Socio Mattirolo.

Dal Socio Panetti: *Una soluzione del problema della stabilità dei proietti*; Nota dell'Ing. Filippo Burzio.

Dal Socio Parona: *Note litologiche e mineralogiche sui dintorni di Avigliana*, dell'Ing. Dott. Gabriele Lincio.

LETTURE

Un apparecchio per lo studio sperimentale delle trasmissioni con cinghie.

Nota del Socio MODESTO PANETTI (*).

1. — Il problema meccanico delle trasmissioni con cinghie non si può dire ancora risolto con certezza in tutte le sue parti.

I punti che attendono chiarimenti sono essenzialmente due:

Il primo riguarda l'influenza della velocità della cinghia sulla sua aderenza. In vero, mentre l'azione della forza centrifuga, conseguenza della velocità, dovrebbe alleggerire la pressione fra cinghia e puleggia, e facilitare quindi lo slittamento, si ammette che, facendo correre più veloce la cinghia, essa possa trasmettere in buone condizioni un'azione utile maggiore.

Il secondo punto consiste nella determinazione dello slittamento, che nell'esercizio si verifica per gradi crescenti col crescere del carico, in misura assai maggiore di quanto risulta dalla teoria, la quale spiega il fenomeno soltanto come conseguenza della elasticità del cingolo.

Appare quindi la opportunità di dotare i laboratori di mezzi sperimentali atti a queste ricerche, al quale scopo basta sistemare una trasmissione in cui sia possibile far variare fra i limiti più larghi la velocità del cingolo, la inclinazione del tiro ed il momento resistente sull'albero condotto. Mezzi acconci devono poi essere disposti per far variare la grandezza delle tensioni nei rami dell'organo flessibile, e misurarle, mentre, simultaneamente, viene rilevato lo slittamento.

2. — Un apparecchio di questo genere è stato costruito per il Laboratorio di Meccanica applicata alle macchine del R. Politecnico di Torino, e vi funziona da qualche tempo con successo,

(*) Presentata nell'adunanza del 25 marzo 1917.

per ora a scopo semplicemente didattico, poichè, per renderlo capace di ricerche scientifiche, occorre dotarlo di mezzi ausiliari non ancora ultimati.

L'apparecchio, rappresentato nella fig. 1 con uno schema in proiezione assonometrica, consiste in un *banco* B scorrevole su *guide* orizzontali $A_1 A_2 A_3$ e portante l'albero condotto a della

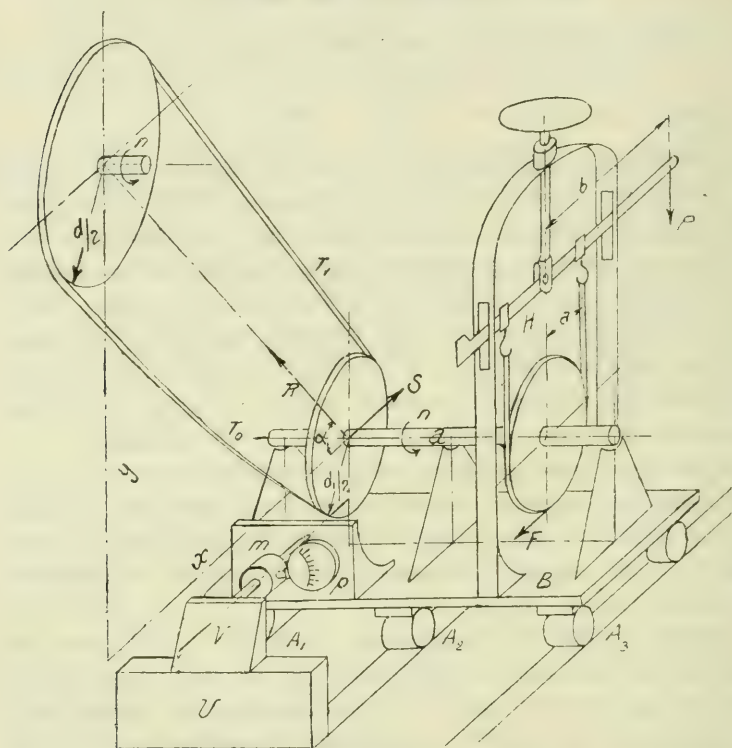



Fig. 1.

trasmissione, sul quale è sistemato un freno dinamometrico a nastro H, che genera e misura il momento resistente. Un robusto *spalleggiamento* U, fissabile alle guide stesse del banco e registrabile per mezzo di una *vite di traslazione* che ne sposta la parte superiore V, serve a spingere il banco scorrevole quanto occorre per tendere la cinghia e misurare al tempo stesso la *componente orizzontale* del *tiro* col sussidio di un *indicatore* mp

collocato fra spalleggiamento e banco nel piano verticale medio della cinghia.

L'inclinazione α dell'asse del tiro varia con la distanza x dell'albero condotto dal piano verticale contenente l'albero motore. Con un regolo graduato posto sul pavimento nella direzione x, avente il capo in una origine fissa, si leggono direttamente i valori di $1/\cos\alpha$ in presenza di un indice portato dal banco.

Moltiplicando per essi la spinta orizzontale del banco si deduce la somma R delle tensioni T_1 e T_0 che operano nei rami conduttore e condotto del cingolo.

La loro differenza è data dal freno dinamometrico, se si ritengono trascurabili le resistenze al moto dell'albero condotto (attrito nei perni e resistenza dell'aria).

Anzi, usando, come la fig. 1 indica, una puleggia di freno uguale alla puleggia condotta, l'azione frenante

$$F = P \frac{b}{a}$$

è senz'altro la differenza $T_1 - T_0$ nelle ipotesi premesse.

Così dalla loro somma e differenza si deducono le tensioni attive nei due rami.

Questo è il concetto direttivo fondamentale dell'apparecchio, il quale attualmente può operare con 3 velocità diverse della cinghia di m. 10,8, m. 13,0 e m. 19,8 al secondo, corrispondenti a 345, 417 e 630 giri dell'albero condotto nelle condizioni ideali di esercizio, in cui lo slittamento sia nullo.

I particolari costruttivi furono suggeriti dall'intento di conferire all'apparecchio alcuni caratteri importanti che ci proponiamo di porre in evidenza.

3. — La *scorrevolezza del banco*, condizione assoluta della esattezza delle misure, fu realizzata ricorrendo a 3 coppie di rulli cilindrici di 150 mm. di diametro, come mezzi di appoggio. Ciascuna coppia costituisce un carrello indipendente, scorrevole su una delle tre guide metalliche, grazie ad un leggero telaio di collegamento poggiante sui perni dei rulli accoppiati, con la interposizione di anelli a sfere. Si è così ridotta la resistenza

alla traslazione a poco più dell'1 $^0/_{00}$, come risulta da misure direttamente eseguite sul banco in riposo, essendosi constatato che la forza di trazione necessaria a spostarlo è circa 1300 grammi, mentre il peso del banco è prossimo a 1000 kg.

Quando la trasmissione funziona le vibrazioni a cui l'apparecchio è soggetto debbono diminuire ulteriormente tale resistenza. Ad ogni modo, anche a riposo, le segnalazioni dell'indicatore delle spinte, che ha sensibilità prossima ad 1 kg., non accusano con passo morto la presenza di resistenze alla traslazione.

4. — L'*indicatore delle spinte* attualmente adoperato, è una *capsula idraulica* inserita fra la parte mobile V dello spalleggiamento e il banco scorrevole, la cui spinta provoca la pressione del liquido, che un manometro misura.

È noto il principio sul quale si fonda questo misuratore di sforzi d'uso già antico negli apparecchi che operano per azioni semplicemente statiche, come le macchine per provare la resistenza dei materiali: Un diaframma sottile e flessibilissimo (un foglio di para per esempio) costituisce una delle pareti della capsula, contro la quale preme uno stantuffo di diametro un po' minore. Il corpo cilindrico che guida lo stantuffo non ha ufficio di tenuta, perchè ogni fuga di liquido è impedita dal diaframma. Sono quindi inutili le guarnizioni, che con le resistenze di attrito danneggierebbero la sensibilità dell'apparecchio.

D'altra parte, finchè gli spostamenti dello stantuffo sono piccoli assai, la superficie premuta è costantemente uguale alla sua sezione retta, vi ha quindi proporzionalità fra spinte e pressioni e per conseguenza fra spinte e indicazioni del manometro.

Il modello costruito ha uno stantuffo di 20 cm^2 di sezione retta ed un manometro graduato in atmosfere decimali, fino ad 8, capace perciò di misurare una spinta massima di 160 kg. Ogni atmosfera è suddivisa in decimi. La più piccola divisione corrisponde quindi a 2 kg. di spinta, e la metà di essa, che si può facilmente apprezzare, stabilisce l'approssimazione dell'apparecchio ad 1 kg. circa, come è stato detto.

La corsa dello stantuffo, corrispondente a tutta la escursione del manometro, è appena di $^2/_3$ di mm. grazie sopra tutto alla brevità del condotto di comunicazione fra capsula e manometro.

L'apparecchio equivale quindi ad una molla di costante uguale a 240 $^{kg}/_{mm}$.

Ma, forse appunto per questa grande sua rigidezza, la capsula idraulica si dimostrò inadatta a registrare la spinta durante il movimento della cinghia, per le violente oscillazioni dell'ago del manometro. Possiamo in fatti comprendere che le vibrazioni indotte nel banco dalle oscillazioni della cinghia e dalla imperfetta simmetria delle masse rotanti, debbono, per quanto piccole, provocare escursioni amplissime dell'indicatore.

L'importanza della presente constatazione eccede i limiti dell'interesse che può offrire questo mezzo sperimentale, rappresentando un contributo per accertare quando la capsula idraulica si possa adottare come registratrice di forze trasmesse da organi in movimento. Tanto più che nello stesso Laboratorio è stata sperimentata con successo la applicazione della capsula ad un banco scorrevole di analoga struttura, combinato recentemente con la piattaforma dinamometrica dei motori a scoppio, per misurare, insieme col momento motore, la spinta dell'elica freno. Di fatto le oscillazioni dell'ago del manometro sono, in questo caso, di piccola ampiezza e tali da permetterne la lettura media in modo facile e sicuro.

Ora il diverso comportamento della capsula nei due casi sembra si possa spiegare nel modo seguente: Il moto del banco scorrevole è un moto oscillatorio retto dalla forza elastica, che risulta come differenza fra la spinta e la reazione della capsula, e smorzato dalle resistenze di attrito e del mezzo. Per intrattenere tale movimento occorre una forza, funzione periodica del tempo, che somministri l'energia dissipata dalle resistenze. Le oscillazioni della cinghia e le forze centrifughe non equilibrate dell'albero rotante, possono in un caso costituire questo fattore, che manca, ovvero ha minima importanza, nell'altro caso (banco misuratore della spinta dell'elica freno). Perciò nel banco tenditore della cinghia si hanno vibrazioni segnalate da gravi sbattimenti dell'indice del manometro, che si potrebbero forse ridurre con un accurato equilibramento della massa rotante.

5. — La determinazione della spinta si fa quindi, per ora, con la trasmissione a riposo, prima e dopo l'esperimento. Durante la prova si scarica la capsula idraulica, facendo avanzare ai suoi

lati due viti, mordenti nella parte mobile dello spalleggiamento, finchè tocchino con le loro punte il banco scorrevole. Se prima dell'esperimento si è fatto funzionare qualche tempo la cinghia con tensione almeno uguale a quella della prova, le spinte registrate dall'apparecchio prima e dopo essa sono quasi identiche, ed è giustificato accettarne la media come valore approssimato della spinta durante la trasmissione.

Intanto è in preparazione un altro apparecchio generatore e misuratore della spinta (fig. 2), costituito da una leva a squadra,

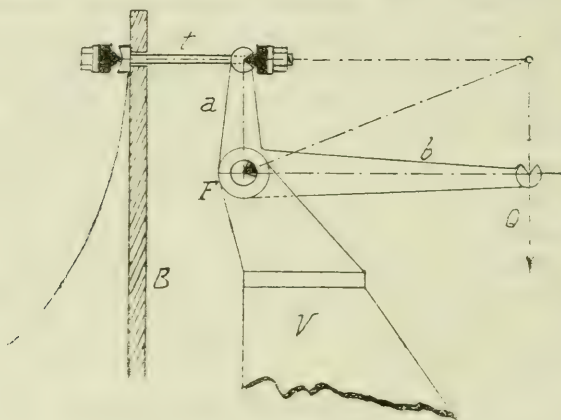



Fig. 2.

col fulcro F portato dalla parte mobile V dello spalleggiamento, il braccio corto verticale a legato da un tirante orizzontale t al banco B, il braccio lungo orizzontale b reggente un peso Q. Esso dovrà permettere la misura del tiro durante il moto della cinghia, e potrà essere munito di smorzatore di oscillazioni se l'esperienza ne dimostrerà il bisogno.

6. — La *misura dello slittamento* è oggi eseguita in modo elementare, rilevando con un tachimetro la velocità dell'albero condotto durante la trasmissione sotto carico, e confrontandola sia con la velocità simultanea dell'albero conduttore, tenuto conto del rapporto ideale di trasmissione, sia, più semplicemente, con la velocità dell'albero condotto quando è nullo il carico sviluppato dal freno. Ora, il primo modo di dedurre lo slittamento, oltre alla difficoltà di eseguire letture perfettamente simultanee,

non dà molta garanzia di precisione, quando si tratti di rilevare piccole differenze nel numero di giri misurati con due tachimetri diversi, quantunque preliminarmente corretti.

Col secondo metodo si comprende nella perdita di velocità dell'albero condotto non soltanto quella dovuta al tiro della cinghia che è oggetto dell'esperimento, ma anche le perdite delle trasmissioni che la precedono e quelle del motore elettrico, la cui velocità è influenzata dalla tensione momentanea della linea e dal carico.

Per queste ragioni si sta preparando un complemento all'impianto. Si collocherà accanto alla trasmissione descritta un'altra identica per diametro di puleggie, delle quali una fissata sullo stesso albero conduttore, l'altra su di un albero condotto mantenuto in posizione coassiale con l'albero del banco scorrevole, ma senza resistenze primarie al moto, di modo che lo slittamento di questa seconda trasmissione si possa ritenere nullo. Misurando direttamente la differenza dei numeri di giri dei due alberi condotti coassiali si avrà la perdita di velocità per slittamento sull'albero caricato.

Come mezzo di misura si adotterà un apparecchio del tipo dei *torsiometri*, costruito sul principio del pandinamometro di Hirn, ma utilizzante un altro roteggio epicicloidale che rende possibile un maggiore ingrandimento della differenza delle velocità dei due alberi, e permette quindi di misurarla facilmente con un ordinario tachimetro.

La fig. 3 dimostra i caratteri del roteggio. Due ruote $R_1 R_2$ fissate alle estremità degli alberi coassiali affacciati trasmettono il moto a due rocchetti $r_1 r_2$ pure coassiali.

Uno di essi, r_1, è solidale ad una ruota principale E (a dentatura interna), l'altro r_2 al portatreno del roteggio epicicloidale. La seconda ruota principale I di esso è quella sulla quale si misura ingrandita la differenza delle velocità degli alberi. Perciò il suo asse oo deve attraversare il gruppo, da una parte almeno, per ricevere la punta di un tachimetro.

La dimostrazione è assai semplice: dette ω_1 ed ω_2 le velocità angolari dei due alberi affacciati, e indicando i raggi primitivi con le stesse lettere che rappresentano le ruote, si possono esprimere le velocità angolari dei rocchetti con le formole seguenti:

$$\omega' = -\omega_1 R_1/r_1 \qquad \omega'' = -\omega_2 R_2/r_2 .$$

Ma il roteggio epicicloidale a cui tali rocchetti sono collegati ammette come rapporto ordinario di trasmissione dalla ruota E alla I

$$\tau = -R_e/R_i .$$

Quindi la velocità ω'' del suo portatreno è legata alla ω' della ruota principale E ed alla ω della I dalla relazione

$$\omega - \omega'' = \tau(\omega' - \omega'') .$$

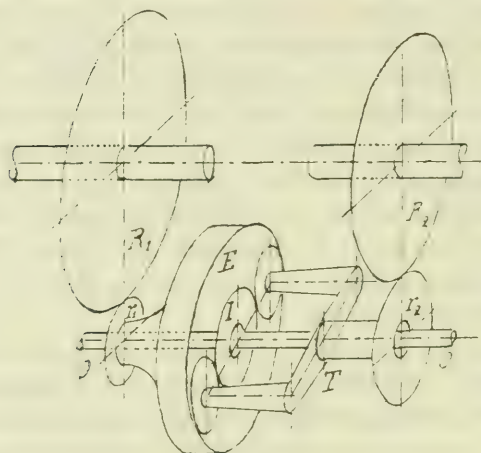



Fig. 3.

Scegliendo i raggi delle ruote in modo che sia

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}\left(1 + \frac{R_i}{R_e}\right)$$

risulta dalle precedenti uguaglianze insieme combinate

$$\omega = \frac{R_e}{R_i} \frac{R_1}{r_1}\left(\omega_1 - \omega_2\right),$$

ossia la velocità angolare dell'asse o della ruota I è proporzionale alla differenza fra le velocità angolari dei due alberi coassiali, e il rapporto di moltiplicazione può essere assai grande. Fatto ad esempio

$$R_1/r_1 = 10 \qquad R_e/R_i = 4 \qquad \text{e quindi } R_2/r_2 = 8$$

il rapporto di moltiplicazione risulta uguale a 40; e quindi, per differenze anche molto piccole nel numero di giri delle due ruote, si raggiungeranno velocità dell'alberetto *oo* comodamente misurabili con un tachimetro.

7. — Come si disse in principio, i risultati sperimentali deducibili per ora dall'apparecchio descritto non si possono considerare senz'altro come elementi atti a ricerche scientifiche, finchè le modificazioni in corso non saranno eseguite.

Tuttavia, a titolo dimostrativo dei due punti considerati nelle Premesse, citiamo alcune misure eseguite, riassumendone i dati nel seguente quadro:

Velocità ideale		Grandezza del tiro	Resistenza periferica del freno	Tensioni nei due rami della cinghia		Giri dell'albero condotto	Slittamento
				conduttore	condotto		
		kg.	kg.	kg.	kg.		%
10,80 m/s	345 giri	1ª prova 55,6	20	37,8	17,8	338	2,03
			28	41,8	13,8	330	4,35
			32	43,8	11,8	318	7,83
della cinghia	dell'albero condotto	2ª prova 85,6	20	52,8	32,8	340	1,45
			40	62,8	22,8	337	2,32
			48	66,8	18,8	326	5,51
			56	70,8	14,8	305	11,60
		3ª prova 60,0	20	40	20	410	1,70
			28	44	16	394	5,52
			32	46	14	350	16,05
m/s 13,00	giri 417	4ª prova 94,0	20	57	37	410	1,70
			28	61	33	406	2,64
			36	65	29	402	3,60
			40	67	27	398	4,60
			48	71	23	382	8,40
			54	74	20	360	13,70

Risulta che lo slittamento cresce assai più rapidamente del carico quando il rapporto fra la tensione nel ramo condotto e nel ramo conduttore va aumentando. Appare in vece contradetto il vantaggio della velocità nel senso di migliorare l'aderenza.

In vero, confrontando fra loro la 1ª e la 3ª prova, nonchè la 2ª e la 4ª, eseguite a un di presso col medesimo tiro, si osservano per uguali valori del carico slittamenti più grandi nelle prove eseguite con maggiore velocità.

In questa Nota però non si vuol dare a queste constatazioni alcun peso. Esse formeranno oggetto di altro studio quando il mezzo sperimentale che ce le deve fornire sia stato perfezionato.

Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazî ad n dimensioni [1].

Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI, a Torino.

Preliminari. — **1.** Una reciprocità tra due spazî S_n, S'_n si può rappresentare analiticamente con un'equazione bilineare tra coordinate [2] di punti reciproci:

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, ..., n); \tag{1}$$

---

[1] Nella Nota presente si estendono alle reciprocità tra due S_n le proprietà esposte dal prof. Segre nelle sue: *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque*, " Atti R. Acc. Torino ", 19 (1883-84), pp. 878-896. Sullo stesso argomento si veda pure: Bertini, *Sui fasci di quadriche in uno spazio ad* n *dimensioni*, " Rend. Lincei ", (4) 2_2 (1886), pp. 208-211; *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, Pisa, 1907, cap. 7°, nⁱ 17-21. Ed inoltre, riguardo a sistemi lineari di coni in S_3: Pieri, *Sui sistemi lineari di coni*, " Rivista di Matem. ", 1893, pp. 44-47.

Fasci di polarità nulle degeneri si trovano poi in: Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, " Atti Ist. Ven. ", (7) 2 (1891), pp. 855-901, nⁱ 5-6; S. Kantor, *Die Linearen Systeme linearer Strahlenkomplexe im R_r*, " Wien Sitzungsberichte ", 112 (1903) II A, pp. 815-877; v. inoltre: Weitzenböck, *Komplex-Symbolik*, Leipzig, 1908, p. 108.

I teoremi dei nⁱ 4, 5, 6, 7 e i primi esempî relativi ($n = 1, 2, 3$) si trovano già nella dissertazione presentata per la laurea in matematica alla Facoltà di Scienze di Torino, l'11 luglio 1908, dalla prof.ª Teresa Oneglio, delle R. Scuole Normali, la quale gentilmente mi comunicò il suo manoscritto.

A questa Nota seguiranno altre dedicate a sistemi lineari, di dimensione qualunque, di reciprocità degeneri tra due S_n.

[2] Useremo coordinate proiettive omogenee di punti e di iperpiani, chiamando A_i, A'_i i punti fondamentali di S_n, S'_n rispettivamente.

a un punto $P(x_i)$ di S_n corrisponde allora in S'_n l'iperpiano π' di coordinate:

$$\rho\, v_k = \sum_{i=0}^{n} a_{ik}\, x_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

e ad un punto $P'(y_k)$ di S'_n corrisponde in S_n l'iperpiano di coordinate:

$$\sigma\, u_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, y_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Se il determinante $A = |a_{ik}|$ è nullo, la reciprocità è *singolare* o *degenere*; e precisamente, se son nulli in A i minori d'ordine $n - h + 1$, ma non tutti quelli d'ordine $n - h$ $(0 \leq h \leq n - 1)$, esistono, in S_n ed S'_n rispettivamente, due *spazî fondamentali* o *singolari* S_h, S'_h, tali che ad ogni punto di S_h (di S'_h), *punto singolare*, corrispondono tutti gli iperpiani di S'_n (di S_n), mentre ad un punto P di S_n esterno ad S_h corrisponde un iperpiano π' passante per S'_h, che è lo stesso per tutti i punti dell'S_{h+1} che unisce P ad S_h (ed analogamente scambiati S_n, S'_n); la corrispondenza tra π' e l'S_{h+1} essendo una proiettività non singolare. La reciprocità si dice degenere di *specie* $h + 1$; la chiameremo una S_h-reciprocità [3].

Le coordinate dei punti di S_h (di S'_h) annullano i secondi membri delle (2) (delle (3)); perciò, assumendo S_h, S'_h come spazî fondamentali $A_0 A_1 \ldots A_h$, $A'_0 A'_1 \ldots A'_h$ delle coordinate, e scegliendo opportunamente gli altri punti di riferimento, la equazione (1) diviene:

$$x_{h+1}\, y_{h+1} + x_{h+2}\, y_{h+2} + \ldots + x_n\, y_n = 0.$$

In una S_h-reciprocità, un S_k che seghi l'S_h singolare in un S_l ha per corrispondente un S'_{n-k+l}; in particolare, un S_k passante per S_h ha per corrispondente un S'_{n-k+h}. E viceversa, se la dimensione massima dello spazio corrispondente, in una reciprocità tra S_n, S'_n, ad un S_k variabile in S_n è $n - k + h$, la reciprocità è degenere di specie $h + 1$. Una S_h-reciprocità subordina tra un S_k ed un S'_k generici una reciprocità, che di-

---

[3] Una reciprocità non singolare corrisponderebbe ad $h = -1$.

remo *sezione* della data con S_k ed S'_k, mentre la data se ne dirà una *proiezione* da S_h ed S'_h, e che è sempre degenere (di specie $k+h-n+1$) se $k \geq n-h$; in generale, se S_k ed S_h hanno in comune un S_l, S'_k ed S'_h un $S'_{l'}$, allora S_l ed $S'_{l'}$ sono luoghi di punti singolari per la reciprocità sezione, che risulta perciò di specie $\geq$ al maggiore dei due numeri $l+1$, $l'+1$.

2. La reciprocità (1) si può anche rappresentare analiticamente con un'equazione tra coordinate di iperpiani reciproci:

$$\Sigma A_{ik} u_i v_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, ..., n);$$

per cui si hanno reciprocità (duali delle precedenti) per le quali è nullo il determinante $|A_{ik}|$ con caratteristica $n-h$; le diremo Σ_h-reciprocità, o reciprocità *degeneri di specie* $h+1$, ma come *connessi di iperpiani*, mentre le precedenti sono degeneri come *connessi di punti*. Una S_0-reciprocità, come connesso di iperpiani, è di specie (massima) $n+1$, mentre una S_h-reciprocità, con $h>0$, non si può pensare come degenere nel modo duale. E dualmente ([4]).

3. Combinando linearmente la (1) con *un'altra* equazione dello stesso tipo:

$$\Sigma b_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, ..., n),$$

si ottiene l'equazione:

$$\Sigma (\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}) x_i y_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, ..., n),$$

la quale, al variare di λ_1, λ_2, rappresenta un *fascio* di reciprocità.

Ci proponiamo di studiare i fasci di S_h-reciprocità ([5]); per

---

([4]) Per le proprietà finora richiamate si veda: SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, " Mem. Lincei „, (3) 19 (1884), pp. 127-148, n[i] 3-4; BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, cap. 3°.

([5]) Applicando, in ciò che diremo, la legge di dualità in S_n ed S'_n si ottengono proprietà dei fasci di Σ_h-reciprocità; applicando la dualità ad es. solo in S_n si avrebbero proprietà dei fasci di *omografie* degeneri.

i quali il determinante $|\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 b_{ik}|$ ha la caratteristica $n - h$, per valori generici di λ_1 e λ_2. Varie proprietà dei fasci di reciprocità non degeneri valgono anche per quelli di reciprocità degeneri; così: Gli iperpiani omologhi di un punto generico di S_n (o di S'_n) nelle ∞^1 reciprocità di un fascio F, formano un fascio proiettivo ad F; se per un punto di S_n (o di S'_n) coincidono gli iperpiani omologhi in due (e quindi in tutte le) reciprocità di F, quel punto è singolare per una reciprocità di F, e viceversa; un S_h di S_n singolare per una reciprocità di F ha in S'_n lo stesso spazio corrispondente in tutte le reciprocità di F; il fascio F sega sopra un S_k ed un S'_k generici un fascio di reciprocità, che sono tutte degeneri (e di specie $k + h - n + 1$) se $k \geq n - h$.

Luoghi degli spazî singolari in un fascio di specie $h + 1$. — 4. Sia F un fascio di S_h-reciprocità tra S_n, S'_n. Se un punto è singolare per due reciprocità di F esso lo è per tutte. Perciò, dette α, β due reciprocità di F, se esistono un S_l ed un $S'_{l'}$ comuni ai loro spazî singolari rispettivamente in S_n ed in S'_n, ed è ad es. $0 \leq l \leq l' \leq h$, tutte le reciprocità di F hanno due spazî singolari contenenti rispettivamente S_l ed $S'_{l'}$, per cui il fascio F si può costruire proiettando, da S_l e da un S'_l contenuto in $S'_{l'}$, un fascio di S_{h-l-1}-reciprocità tra due spazî ad $n - l - 1$ dimensioni.

Escluso questo caso (che si presenta certo quando $2h \geq n$ [6]), supponiamo che, in uno almeno dei due spazî, ad es. S'_n, gli spazî singolari di due reciprocità qualunque di F non abbiano punti comuni. Allora, se le reciprocità di F hanno in S_n lo stesso S_h singolare, la stella degli S_{n-1} passanti per un tale S_h è mutata proiettivamente da α, β nelle stelle di S'_{h+1} passanti per due S'_h sghembi di S'_n, le quali risulteranno fra loro proiettive, e genereranno quindi, come luogo dei punti comuni a due S'_{h+1} omologhi ed incidenti, una V^{n-h}_{h+1} [7], non cono, che sarà

---

[6] Se dunque un fascio di S_h-reciprocità non è proiezione di un altro tra spazî di dimensione $< n$, dev'essere $h \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$ (escludendo l'uguaglianza se n è pari); troveremo però per h, in tal caso, un confine più piccolo.

[7] VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens,*

luogo degli S'_h singolari delle reciprocità di F. Infatti, un punto di V^{n+h}_{h+1}, congiunto ai due S'_h, dà due S'_{h+1} omologhi nella proiettività anzidetta, perciò ha lo stesso S_{n-1} corrispondente in α e β; e viceversa.

Supponiamo ora che anche in S_n le reciprocità di F abbiano un S_h singolare variabile, il cui luogo sarà una U_{h+1}, senza escludere che tutti quegli S_h abbiano in comune un S_l (supponendo $-1 \leq l < h$ si comprendono i varî casi). Diciamo ancora V_{h+1} la varietà (non cono) luogo degli S'_h singolari; siano poi S_m, $S'_{m'}$ gli spazî d'immersione di U_{h+1}, V_{h+1} rispettivamente. Un S_h di U_{h+1} ha, in tutte le reciprocità di F, uno stesso S'_{n-h+l} corrispondente, che passa per tutti gli S'_h di V_{h+1}, e quindi per $S'_{m'}$ (poichè su V_{h+1} si possono trovare $m'+1$ punti linearmente indipendenti); e che passa anche per l' S'_{n-m+h} che corrisponde ad S_m in una qualsiasi reciprocità α di F. Questo S'_{n-m+h} (che conterrà $S'_{m'}$, o coinciderà forse con $S'_{m'}$) non può variare con α, perchè gli S'_{n-h+l} anzidetti (supposti infiniti) non variano con α ed *appartengono* ad una stella di iperpiani ∞^{m-h-1}, quindi non possono passare tutti per diversi S'_{n-m+h}. Se invece gli S_h di U_{h+1} hanno tutti lo stesso S'_{n-h+l} corrispondente, essi stanno in un medesimo S_{2h-l} avente per corrispondente quell' S'_{n-h+l} in ogni reciprocità del fascio; ed essendo ora $S_m \equiv S_{2h-l}$, si vede che vale ancora il risultato di prima. Ripetendo tutto ciò scambiati S_n, S'_n (e ponendo $l=-1$), si trova che lo spazio $S'_{m'}$ ha, in tutte le reciprocità di F, uno stesso $S_{n-m'+h}$ corrispondente, il quale passa per S_m. Viceversa, date tra S_n, S'_n due S_h-reciprocità α, β, se esiste, in S_n ad es., un S_m, contenente gli S_h singolari di α, β, che abbia lo stesso S'_{n-m+h} corrispondente in α, β, tutte le reciprocità del fascio $\alpha\beta$ dovranno all' S_m far corrispondere l' S'_{n-m+h}, perciò saranno tutte di specie $h+1$ (eccettuate al più alcune di esse); ed esisterà in S'_n un $S'_{m'}$, contenuto in S'_{n-m+h} e contenente tutti gli S'_h singolari, il quale avrà in α, β lo stesso $S_{n-m'+h}$ corrispondente passante per S_m.

Dunque: *Per un fascio di* S_h*-reciprocità tra* S_n *ed* S'_n, *esi-*

„ Math. Ann. „, 19 (1882), pp. 161-234, Abschnitt V; BERTINI, loc. cit. nella nota ([4]), cap. 7°, n. 12 e cap. 13°, n. 21.

stono in S_n *ed* S'_n *due spazî* S_m, $S'_{m'}$ *tali che* S_m ($S'_{m'}$) *contiene tutti gli* S_h (S'_h) *singolari, ed ha in tutte le reciprocità del fascio lo stesso* S'_{n-m+h} ($S_{n-m'+h}$) *corrispondente passante per* $S'_{m'}$ (*per* S_m).

Condizione necessaria e sufficiente perchè due S_h*-reciprocità, aventi spazî singolari distinti sì in* S_n *che in* S'_n, *diano un fascio di* S_h*-reciprocità è che esista in* S_n, *ad es., un* S_m *passante per i due* S_h *singolari che abbia lo stesso* S'_{n-m+h} *corrispondente in entrambe* [8].

Rileviamo che in questi enunciati si possono far rientrare i fasci di S_h-reciprocità proiezioni di fasci esistenti tra spazî di dimensione $< n$; e nel primo enunciato rientrano pure (per $m = h$) i fasci di S_h-reciprocità aventi tutte in S_n lo stesso S_h singolare.

5. Dette α, β due reciprocità di F, la stella degli S'_{n-1} di S'_n (supposti infiniti) passanti per l'S'_{n-m+h} omologo di S_m è mutata proiettivamente da α, β in due stelle di S_{h+1}, aventi per sostegni due S_h di U_{h+1}, e che risulteranno fra loro proiettive. Ogni punto comune a due S_{h+1} omologhi avrà in α, β uno stesso S'_{n-1} corrispondente (passante per S'_{n-m+h}), e viceversa; perciò U_{h+1} è la varietà di ordine $m-h$ [9] generata da quelle due stelle proiettive come luogo dei punti comuni a due S_{h+1} omologhi ed incidenti. Se invece S'_{n-m+h} è un iperpiano, cioè $m = h+1$, gli S_h singolari formano, entro S_m, un fascio, ossia hanno in comune un S_{h-1}. Perciò:

In un fascio di S_h*-reciprocità, i luoghi degli* S_h *singolari* (*supposti variabili sia in* S_n *che in* S'_n) *sono rispettivamente una* U^{m-h}_{h-1} *ed una* $V^{m'-h}_{h+1}$ *appartenenti rispettivamente agli* S_m *ed* $S'_{m'}$ [10].

6. Essendo $S'_{m'}$ contenuto in S'_{n-m+h}, risulta: $m' \leq n - m + h$, cioè:

$$m + m' \leq n + h. \tag{4}$$

---

[8] Per $n = 2$, $h = 0$ vedi: SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazî*, " Rend. Palermo ", 30 (1910_2), pp. 87-121, n° 33.

[9] V. nota [7].

[10] Per $h = 0$ questo teorema segue da uno di: TERRACINI, *Sulle varietà di spazî con carattere di sviluppabili*, " Atti R. Acc. Torino ", 48 (1912-13), pp. 411-433, n° 3.

Ne segue:

$$(m-h)+(m'-h)\leq n-h;$$

ossia: *La somma degli ordini delle varietà* U, V *non può superare* n — h.

Se due S_h di U_{h+1} e due S'_h di V_{h+1} non hanno punti comuni, dev'essere: $2h<m$, $2h<m'$; da cui segue: $4h<m+m'$; e quindi, per la (4):

$$(5) \qquad 3h<n.$$

Per un fascio di S_h*-reciprocità, le cui varietà di spazî singolari non siano coni, il numero* h *non può superare quello dei numeri* $\frac{n}{3}$, $\frac{n-1}{3}$, $\frac{n-2}{3}$ *che è intero.*

Se invece due S_h di U_{h+1} non debbono avere in comune altro che un S_l e due S'_h di V_{h+1} un $S'_{l'}$, dev'essere: $2h-l\leq m$; $2h-l'\leq m'$; da cui segue: $4h\leq m+m'+l+l'\leq n+h+l+l'$; e quindi:

$$(6) \qquad 3h\leq n+l+l'.$$

Reciprocità di specie superiore in un fascio di specie $h+1$. — **7.** È facile trovare il numero delle reciprocità di F specializzate più di $h+1$ volte. Perciò osserviamo che, segando F con un S_{n-h-1} ed un S'_{n-h-1} generici, si ottiene tra questi un fascio di reciprocità generalmente non singolari, che contiene $n-h$ S_0-reciprocità. Di queste, $m-h$ provengono dalle intersezioni di S_{n-h-1} con U_{h+1}, altre $m'-h$ dalle intersezioni di S'_{n-h-1} con V_{h+1}, le rimanenti: $n-h-(m-h)-(m'-h)=n+h-m-m'$ da altrettante S_{h+1}-reciprocità contenute in F.

Un fascio di S_h*-reciprocità contiene in generale* $n+h-m-m'$ S_{h+1}*-reciprocità; i loro* S_{h+1} (S'_{h+1}) *singolari passano per altrettanti* S_h (S'_h) *generatori di* U_{h+1} (*di* V_{h+1}) *senza stare in* S_m ($S'_{m'}$).

Queste possono però non essere tutte distinte, possono due o più di esse venir sostituite da una reciprocità di specie superiore ad $h+2$, ecc. Si noti poi che la loro presenza in F è una particolarità che dipende dall'abbassarsi della dimensione m' dello spazio d'immersione di V_{h+1} rispetto alla dimensione $n-m+h$ dello spazio omologo di S_m in tutte le reciprocità del fascio.

Allo stesso risultato si giunge anche segando il fascio F con gli $S_{n-m'+h}$, S'_{n-m+h} omologhi di $S'_{m'}$ ed S_m; si ottiene così un fascio di reciprocità tra spazî di diverse dimensioni ([11]), le quali hanno tutte S_m ed $S'_{m'}$ come luoghi di punti singolari, fatta eccezione per le reciprocità di specie superiore contenute in F, le quali dànno per sezioni altrettante reciprocità aventi come spazî singolari un S_{m+1} ed un $S'_{m'+1}$ passanti rispettivamente per S_m, $S'_{m'}$. Segando il fascio così ottenuto con un $S_{n-m-m'+h-1}$ ed un $S'_{n-m-m'+h-1}$ generici, si ottiene un fascio G di reciprocità generalmente non degeneri, le cui $n+h-m-m'$ S_0-reciprocità, provengono, per ciò che s'è detto sopra, dalle S_{h+1}-reciprocità di F. Si vede anche che lo studio delle particolarità proiettive di F (ad es. la classificazione delle forme proiettivamente distinte di F) si riduce allo studio analogo sul fascio G.

Rappresentazioni analitiche. — 8. Scegliendo opportunamente i sistemi di coordinate in S_n ed S'_n, l'equazione di un fascio di S_0-reciprocità si può mettere sotto la forma ([12]):

$$(7)\quad \begin{aligned} &\lambda_1 \left[(x_1 y_{m-1} + x_2 y_{m-2} + \dots + x_m y_0) + \right.\\ &\qquad \left. + (x_{m+1} y_{m+m'} + x_{m+2} y_{m+m'-1} + \dots + x_{m+m'} y_{m+1})\right] + \\ &+ \lambda_2 \left[(x_0 y_{m-1} + x_1 y_{m-2} + \dots + x_{m-1} y_0) + \right.\\ &\qquad \left. + (x_{m+1} y_{m+m'-1} + x_{m+2} y_{m+m'-2} + \dots + x_{m+m'} y_m)\right] + \\ &\qquad + \lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi = 0; \end{aligned}$$

ove m, m' sono numeri interi variabili da un fascio all'altro, e Φ, Ψ sono forme bilineari non contenenti $x_0, x_1, \dots, x_{m+m'}$; $y_0, y_1, \dots, y_{m+m'}$, e tali che il determinante del loro fascio non sia nullo identicamente rispetto a λ_1, λ_2. Le coordinate di un

---

([11]) Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, " Rend. Lincei ", (5) 9_2 (1900), pp. 253-260, nota ([3]) a p. 256.

([12]) Kronecker, *Algebraische Reduktion der Schaaren bilinearer Formen*, " Berliner Berichte ", 1890, pp. 1225-1237; Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, 1899, § 8; W. F. Meyer-J. Drach, *Théorie des formes et des invariants*, " Encyclop. des Sc. Math. ", I-11, p. 412 e segg.

punto di S_n singolare per una reciprocità del fascio soddisfano alle equazioni:

$$(8) \quad \lambda_1 x_m + \lambda_2 x_{m-1} = 0; \ldots; \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 = 0; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_0 = 0;$$

$$(9) \quad \lambda_2 x_{m+m'} = 0; \lambda_1 x_{m+m'} + \lambda_2 x_{m+m'-1} = 0; \ldots; \lambda_1 x_{m+2} + \lambda_2 x_{m+1} = 0; \lambda_1 x_{m+1} = 0;$$

$$(10) \quad \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = m + m' + 1, \ldots, n).$$

Dalle (9) si ricava: $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{m+m'} = 0$. Le (10), per valori generici di λ_1, λ_2, sono verificate solo se: $x_{m+m'+1} = x_{m+m'+2} = \ldots = x_n = 0$; perciò, eliminando λ_1, λ_2 dalle (8), si hanno le equazioni della curva luogo dei punti singolari:

$$(11) \quad \left\| \begin{matrix} x_0 \, x_1 \ldots x_{m-1} \\ x_1 \, x_2 \ldots x_m \end{matrix} \right\| = x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Si ha quindi una C^m nell'S_m: $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$; il quale ha per corrispondente, in tutte le reciprocità del fascio, l'$S'_{n-m}: y_0 = y_1 = \ldots = y_{m-1} = 0$.

Analogamente, il luogo dei punti singolari in S'_n è la $C^{m'}$:

$$(12) \quad \left\| \begin{matrix} y_m & y_{m+1} \cdots y_{m+m'-1} \\ y_{m+1} & y_{m+2} \cdots y_{m+m'} \end{matrix} \right\| = y_0 = \ldots = y_{m-1} = y_{m+m'+1} = \ldots = y_n = 0;$$

contenuta nell'$S'_{m'}: y_0 = \ldots = y_{m-1} = y_{m+m'+1} = \ldots = y_n = 0$, il quale ha per corrispondente, in tutte le reciprocità del fascio, l'$S_{n-m'}: x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{m+m'} = 0$.

Se uno dei numeri m, m', ad es. m, è nullo, le reciprocità del fascio hanno tutte in S_n lo stesso punto singolare (A_0); se $m' = 0$, un fatto analogo accade in S'_n (ed è A'_0 il punto singolare delle reciprocità generiche del fascio). Le reciprocità di specie superiore contenute nel fascio si hanno per i valori di $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ che annullano il determinante di $\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi$, che è di ordine $n - m - m'$; esse perciò sono, in generale, in numero di $n - m - m'$. Il fascio $\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi = 0$ è la sezione del fascio dato con l'$S_{n-m-m'-1}: x_0 = x_1 = \ldots = x_{m+m'} = 0$ e con l'$S'_{n-m-m'-1}: y_0 = y_1 = \ldots = y_{m+m'} = 0$, che appartengono rispettivamente agli $S_{n-m'}$ ed S'_{n-m} omologhi di $S'_{m'}$ e di S_m, e sono indipendenti rispettivamente da S_m, $S'_{m'}$; si tratta dunque del fascio G incontrato al n. 7.

9. Per passare ai fasci di reciprocità di 2ª specie bisogna dare a $\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi$ una forma analoga alla (7); e così via. In generale, l'equazione canonica di un fascio di S_h-reciprocità è la seguente:

$$
\begin{aligned}
(13) \quad & \lambda_1 (x_1 y_{m-1} + \ldots + x_m y_0 + x_{m+1} y_{m+m'} + \ldots + x_{m+m'} y_{m+1} + \\
& + x_{m+m'+2} y_{m_1+m'-1} + \ldots + x_{m_1+m'} y_{m+m'+1} + \\
& + x_{m_1+m'+1} y_{m_1+m'_1-1} + \ldots + x_{m_1+m'_1-1} y_{m_1+m'+1} + \\
& + x_{m_1+m'_1+1} y_{m_2+m'_1-2} + \ldots + x_{m_2+m'_1-1} y_{m_1+m'_1} + \\
& + x_{m_2+m'_1} y_{m_2+m'_2-2} + \ldots + x_{m_2+m'_2-2} y_{m_2+m'_1} + \ldots \\
\ldots & + x_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+3} y_{m_h+m'_{h-1}-h} + \ldots + x_{m_h+m'_{h-1}-h+1} y_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} + \\
& + x_{m_h+m'_{h-1}-h+2} y_{m_h+m'_h-h} + \ldots + x_{m_h+m'_h-h} y_{m_h+m'_{h-1}-h+2}) + \\
& + \lambda_2 (x_0 y_{m-1} + \ldots + x_{m-1} y_0 + x_{m+1} y_{m+m'-1} + \ldots + x_{m+m'} y_m + \\
& + x_{m+m'+1} y_{m_1+m'-1} + \ldots + x_{m_1+m'-1} y_{m+m'+1} + \\
& + x_{m_1+m'+1} y_{m_1+m'_1-2} + \ldots + x_{m_1+m'_1-1} y_{m_1+m'} + \\
& + x_{m_1+m'_1} y_{m_2+m'_1-2} + \ldots + x_{m_2+m'_1-2} y_{m_1+m'_1} + \\
& + x_{m_2+m'_1} y_{m_2+m'_2-3} + \ldots + x_{m_2+m'_2-2} y_{m_2+m'_1-1} + \ldots \\
\ldots & + x_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} y_{m_h+m'_{h-1}-h} + \ldots + x_{m_h+m'_{h-1}-h} y_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} + \\
& + x_{m_h+m'_{h-1}-h+2} y_{m_h+m'_h-h-1} + \ldots + x_{m_h+m'_h-h} y_{m_h+m'_{h-1}-h+1}) + \\
& \qquad + \lambda_1 \Phi_h + \lambda_2 \Psi_h = 0 ;
\end{aligned}
$$

dove Φ_h, Ψ_h sono forme bilineari di $x_{m_h+m'_h-h+1}, \ldots, x_n$; $y_{m_h+m'_h-h+1}, \ldots, y_n$; ed il determinante di $\lambda_1 \Phi_h + \lambda_2 \Psi_h$ non è nullo identicamente rispetto a λ_1, λ_2. Le equazioni delle varietà degli S_h singolari sono rispettivamente in S_n ed S'_n:

$$
(14) \left\{
\begin{aligned}
& \left\| \begin{matrix}
x_0 \,.\, x_{m-1} \; x_{m+m'+1} \,.\, x_{m_1+m'-1} \; x_{m_1+m'_1} \,.\, x_{m_2+m'_1-2} \ldots \\
\ldots x_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} \,.\, x_{m_h+m'_{h-1}-h} \\
x_1 \,.\, x_m \; x_{m+m'+2} \,.\, x_{m_1+m'} \; x_{m_1+m'_1+1} \,.\, x_{m_2+m'_1-1} \ldots \\
\ldots x_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+3} \,.\, x_{m_h+m'_{h-1}-h+1}
\end{matrix} \right\| = 0, \\
& x_{m+1} = \ldots = x_{m+m'} = x_{m_1+m'+1} = \ldots = x_{m_1+m'_1-1} = \ldots \\
& \qquad \ldots = x_{m_h+m'_{h-1}-h+2} = \ldots = x_n = 0 ;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(15) \left\{
\begin{aligned}
& \left\| \begin{matrix}
y_m \,.\, y_{m+m'-1} \; y_{m_1+m'} \,.\, y_{m_1+m'_1-2} \; y_{m_2+m'_1-1} \,.\, y_{m_2+m'_2-3} \ldots \\
\ldots y_{m_h+m'_{h-1}-h+1} \,.\, y_{m_h+m'_h-h-1} \\
y_{m+1} \,.\, y_{m+m'} \; y_{m_1+m'+1} \,.\, y_{m_1+m'_1-1} \; y_{m_2+m'_1} \,.\, y_{m_2+m'_2-2} \ldots \\
\ldots y_{m_h+m'_{h-1}-h+2} \,.\, y_{m_h+m'_h-h}
\end{matrix} \right\| = 0, \\
& y_0 = \ldots = y_{m-1} = y_{m+m'+1} = \ldots = y_{m_1+m'-1} = \ldots \\
& \qquad \ldots = y_{m_h+m'_h-h+1} = \ldots = y_n = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

La prima è una $U_{h+1}^{m_h-h}$ con curve direttrici di ordini m, $m_1 - m - 1$, $m_2 - m_1 - 1$, ..., $m_h - m_{h-1} - 1$, appartenente ad un S_{m_h}; la seconda una $V_{h+1}^{m'_h-h}$ con curve direttrici di ordini m', $m'_1 - m' - 1$, $m'_2 - m'_1 - 1$, ..., $m'_h - m'_{h-1} - 1$, appartenente ad un $S'_{m'_h}$ ([13]); esse divengono coni se si annullano gli ordini di una o più delle curve direttrici anzidette; se in particolare $m = m_1 - m - 1 = \cdots = m_h - m_{h-1} - 1 = 0$ (cioè se $m = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, ..., $m_h = h$), le reciprocità del fascio hanno tutte in S_n lo stesso S_h singolare. Le S_{h+1}-reciprocità del fascio si hanno per gli $n + h - m_h - m'_h$ valori di $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ che annullano il determinante di $\lambda_1 \Phi_h + \lambda_2 \Psi_h$; ed il fascio G del n. 7 ha per equazione: $\lambda_1 \Phi_h + \lambda_2 \Psi_h = 0$. Troviamo così, anche per via analitica, che: *In un fascio di* S_h*-reciprocità vi sono da considerare le seguenti particolarità proiettive: 1° le varietà razionali* U, V, *luoghi degli spazî singolari, i cui ordini possono variare da un fascio all'altro; 2° il fascio di reciprocità segato dal fascio dato sopra gli spazî omologhi degli spazî d'immersione delle varietà* U, V.

Sui complessi caratteristici di un fascio di specie $h + 1$. — **10.** Quando $n \geq 2$, esiste un S_{n-2} comune agli S_{n-1} omologhi di un punto generico di uno qualunque dei due spazî S_n, S'_n. Per $n = 2$ esso si riduce ad un punto; perciò un fascio di reciprocità tra due piani produce tra questi una corrispondenza (intersezione delle ∞^1 reciprocità), nella quale ad ogni punto di un piano corrisponde nell'altro un punto che gli sia reciproco in tutte le reciprocità del fascio. Risulta dal n. 4 che per un fascio di 1ª specie, coi punti singolari variabili in entrambi i piani, questa corrispondenza è un'omografia ([14]).

Se $n > 2$ si hanno invece in S_n ed S'_n due complessi C, C' di S_{n-2}, che diremo *complessi caratteristici* del fascio di S_h-reci-

---

([13]) Segre, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, " Atti R. Acc. Torino ", 19 (1883-84), pp. 355-372; *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, " id. ", 21 (1885-86), pp. 95-115; Bellatalla, *Sulle varietà razionali normali composte di* ∞^1 *spazî lineari*, " id. ", 36 (1900-01), pp. 803-833; Bertini, loc. cit. nella nota ([4]), cap. 13°.

([14]) V. nota ([8]).

procità ([15]). Gli S_{n-2} generici di C (di C') segano ogni S_h (S'_h) singolare, se $h > 0$, in un S_{h-1} (S'_{h-1}).

Per determinare la dimensione del complesso C, osserviamo che se a due punti P', Q' di S'_n (non singolari per nessuna reciprocità del fascio) corrisponde lo stesso S_{n-2} di C, i fasci degli S_{n-1} omologhi di P' e Q' nelle ∞^1 reciprocità del fascio risultano (proiettivi e) sovrapposti. Se questa proiettività non è identica, esistono nel fascio due reciprocità α, β in ciascuna delle quali P' e Q' hanno lo stesso S_{n-1} corrispondente. Ne segue che la retta $P'Q'$ è incidente agli S'_h singolari di α e β, perciò è una corda (eventualmente una tangente) di V_{h+1}. Se ora si suppone P' generico in S'_n, deve anzitutto lo spazio $S'_{m'}$ d'immersione di V_{h+1} coincidere con S'_n, cioè le reciprocità del fascio devono avere tutte in S_n lo stesso S_h singolare. Viceversa, tutti i punti di una corda di V_{h+1} hanno per corrispondente uno stesso S_{n-2} di C; perciò se V_{h+1} ([16]) appartiene ad S'_n, la dimensione di C sarà n solo se le corde di V_{h+1} non riempiono S'_n, il che accadrà certamente per valori di n abbastanza grandi rispetto ad h.

Se invece la proiettività anzidetta è identica, la retta $P'Q'$, che non sta su V_{h+1}, dovrà passare per un punto comune a tutti gli S'_h singolari. Viceversa, se gli S_h singolari hanno tutti in comune un S_l e gli S'_h singolari un $S'_{l'}$ ($h > l \geq 0, h > l' \geq 0$), tutti i punti di S'_n (di S_n) appartenenti ad uno stesso $S'_{l'+1}$ per $S'_{l'}$ (ad un S_{l+1} per S_l) hanno per corrispondente lo stesso S_{n-2} di C (di C'), per cui le dimensioni di C e di C' risultano rispettivamente $n - l' - 1$, $n - l - 1$.

Se U_{h+1}, V_{h+1} non sono coni, i complessi C, C' sono entrambi ∞^n.

11. Se le reciprocità del fascio hanno in S_n un S_h singolare variabile, sarà $m > h$, perciò $n - m + h < n$; un punto

---

([15]) Enriques, *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazî lineari ad* n *dimensioni*, " Rend. Lincei ", (4) 6_2 (1890), pp. 63-70, n° 3.

([16]) Qui si può supporre che V_{h+1} non sia un cono, se no il fascio considerato sarebbe proiezione di un altro fra spazî di dimensione $< n$. Il ragionamento qui fatto vale anche se vi sono nel fascio reciprocità di specie superiore, purchè in tal caso si pensino come parte di V_{h+1} i loro S'_{h+1} singolari.

generico P' di S'_n determina quindi con l'S'_{n-m+h}, omologo di S_m in tutte le reciprocità del fascio, un $S'_{n-m+h+1}$. Se questo non coincide con S'_n, cioè se $m > h+1$, gli corrispondono, in due reciprocità α, β del fascio, due S_{m-1} omologhi in quella proiettività con cui al n. 5 abbiamo generato (nel caso di $m > h+1$) la varietà U_{h+1}, i quali si segano pertanto in un S_{m-2} *segante* [17] di U_{h+1}, che chiameremo φ. Ne segue che P' (e con esso tutti i punti di $S'_{n-m+h+1}$) ha per corrispondenti in α e β due S_{n-1} passanti rispettivamente per i due S_{m-1} anzidetti, e quindi ha per corrispondente in C un S_{n-2} passante per φ, e che diremo pure S_{n-2} *segante* di U_{h+1}.

Per vedere cosa formano gli S_{n-2} di C omologhi dei punti di $S'_{n-m+h+1}$, seghiamo il fascio dato con un $S_{n-m+h+1}$ generico e con l'$S'_{n-m+h+1}$ considerato. Otterremo un fascio F_1 di S_h-reciprocità, per il quale il luogo degli S'_h singolari è ancora V_{h+1}, mentre gli S_h singolari sono le intersezioni di $S_{n-m+h+1}$ con gli ∞^1 S_{m-1} omologhi di $S'_{n-m+h+1}$. Poichè questi ultimi formano, in S_m, un fascio (di asse φ), così quegli S_h formeranno un fascio nell'S_{h+1} intersezione di S_m con $S_{n-m+h+1}$; e gli S_{n-2} che vogliamo studiare si ottengono proiettando da φ gli $S_{n-m+h-1}$ del primo complesso caratteristico del fascio F_1. Ora questo rientra precisamente nel tipo finora escluso (in cui $m = h+1$), per cui basterà approfondire lo studio di questo caso per conoscere in ogni caso la natura del complesso C.

Perciò procederemo analiticamente servendoci delle (13), e limitandoci a fasci di specie $h+1$ non contenenti reciprocità di specie superiore. Affinchè U_{h+1} sia un fascio di S_h appartenente ad un S_{h+1}, bisogna che sian nulli gli ordini delle curve direttrici di U_{h+1} considerate al n. 9, eccettuato il primo da porsi $=1$; dev'essere cioè: $m=1$, $m_1=2$, $m_2=3$, ..., $m_h = h+1$. Dev'essere inoltre: $m'_h = n-1$. Preso allora in S'_n un punto generico P' (y_i), le coordinate r_{ik} dell'S_{n-2} di C corrispondente saranno i minori di 2° ordine della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & y_0 & y_{m'+1} & \cdot & y_2 & 0 & y_{m'_1+1} & \cdot & y_{m'+3} & 0 & y_{m'_2+1} & \cdot & y_{m'_1+3} & \dots & 0 & y_n & \cdot & y_{m'_{h-1}+3} \\ y_0 & 0 & y_{m'} & \cdot & y_1 & 0 & y_{m'_1} & \cdot & y_{m'+2} & 0 & y_{m'_2} & \cdot & y_{m'_1+2} & \dots & 0 & y_{n-1} & \cdot & y_{m'_{h-1}+2} \end{matrix} \right\|.$$

---

[17] Diamo questo nome agli S_{m-2} ottenuti con la generazione proiettiva coniugata di quella del n° 5; v. ad es.: BERTINI, loc. cit. nella nota [7].

Ne seguono per C le seguenti $n-2$ equazioni lineari, le quali provano che C è ora un complesso lineare ∞^n [18] (le colonne della matrice son state numerate da 0 ad n):

$$(16)\quad \begin{aligned} & r_{0,m'+2} = r_{0,m'_1+2} = \ldots = r_{0,m'_{h-1}+2} = 0\,; \\ & r_{1,m'+2} = r_{1,m'_1+2} = \ldots = r_{1,m'_{h-1}+2} = 0\,; \\ & r_{03} + r_{12} = r_{04} + r_{13} = \ldots = r_{0,m'+1} + r_{1m'} = 0\,; \\ & r_{0,m'+4} + r_{1,m'+3} = r_{0,m'+5} + r_{1,m'+4} = \ldots = r_{0,m'_1+1} + r_{1,m'_1} = 0\,; \\ & r_{0,m'_1+4} + r_{1,m'_1+3} = r_{0,m'_1+5} + r_{1,m'_1+4} = \ldots = r_{0,m'_2+1} + r_{1,m'_2} = 0\,; \ldots \\ & \ldots; r_{0,m'_{h-1}+4} + r_{1,m'_{h-1}+3} = \ldots = r_{0n} + r_{1,n-1} = 0. \end{aligned}$$

Il complesso C è intimamente collegato alla varietà V_{h+1}. Infatti, osserviamo che le prime $2h$ equazioni (16) provengono dal fatto che gli S_{n-2} di C passano per l'S_{h-1} comune a tutti gli S_h singolari; le altre [19] dicono che C fa parte della varietà base di un sistema lineare ∞^{n-2h-3} di complessi lineari ∞^{2n-3} di S_{n-2}; scrivendo il determinante (emisimmetrico) del sistema lineare delle relative polarità nulle, si riconosce che le due prime orizzontali sono le seguenti (indicando con λ_i i parametri del sistema lineare):

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & . & \lambda_{m'-2} & \lambda_{m'-1} & 0 & 0 & . & \lambda_{m'_1-3} & 0 & 0 & . & \lambda_{m'_2-5} & \ldots \\ & & & & & & & & & & & \ldots & 0 & 0 & . & \lambda_{n-2h-2} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & . & \lambda_{m'-1} & 0 & 0 & \lambda_{m'} & . & 0 & 0 & \lambda_{m'_1-2} & . & 0 & \ldots \\ & & & & & & & & & & & \ldots & 0 & \lambda_{m'_{h-1}-2h+2} & . & 0 \end{matrix}$$

mentre gli elementi di indici ≥ 2 sono tutti nulli. Ne segue che la polarità nulla generica del sistema lineare è degenere (come connesso di iperpiani) di specie $n-3$. Gli S_3 sostegni delle stelle di S_{n-1} singolari formano (nell'S_{n-h} fondamentale opposto all'S_{h-1}: $A_{m'+2}\,A_{m'_1+2}\ldots A_{m'_{h-1}+2}$) la varietà di equazioni:

$$(17)\quad u_0 = u_1 = \left\| \begin{matrix} u_2 & . & u_{m'} & u_{m'+3} & . & u_{m'_1} & \ldots & u_{m'_{h-1}+3} & . & u_{n-1} \\ u_3 & . & u_{m'+1} & u_{m'+4} & . & u_{m'_1+1} & \ldots & u_{m'_{h-1}+4} & . & u_n \end{matrix} \right\| = 0.$$

---

[18] Per le prime proprietà dei complessi di S_k in S_n si veda: S. Kantor, *Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von* r *Dimensionen*, " Crelle ", 118 (1897), pp. 74-122.

[19] Queste altre equazioni mancano se $m' = 1$, $m'_1 = 3$, $m'_2 = 5$, ..., $m'_h = 2h+1$, nel qual caso C si compone di tutti gli S_{n-2} passanti per S_{h-1} v. più avanti il n° 12.

D'altra parte, le (15), applicate al caso attuale, mostrano che un punto generico di V_{h+1} ha coordinate del tipo: $y_0 = 0$; $y_1 = \mu\lambda^{m'}, \ldots, y_{m'+1} = \mu$; $y_{m'+2} = \mu_1 \lambda^{m'_1 - m' - 1}, \ldots, y_{m'_1+1} = \mu_1$; ...; $y_{m'_{h-1}+2} = \mu_h \lambda^{(n-1)-m'_{h-1}-1}, \ldots, y_n = \mu_h$; e quindi ha per corrispondente in tutte le reciprocità del fascio l'S_{n-1} di coordinate: $u_0 = u_1 = 0$; $u_2 = \mu, \ldots, u_{m'+1} = \mu\lambda^{m'-1}$; $u_{m'+2} = 0$; $u_{m'+3} = \mu_1, \ldots, u_{m'_1+1} = \mu_1 \lambda^{m'_1 - m' - 2}$; ...; $u_{m'_{h-1}+2} = 0$; $u_{m'_{h-1}+3} = \mu_h, \ldots, u_n = \mu_h \lambda^{(n-1)-m'_{h-1}-2}$; il quale, variando $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_h$, descrive l'intersezione della (17) con la stella degli S_{n-1} passanti per l'S_{h-1} [20].

---

[20] Col procedimento qui seguìto si possono avere in ogni caso le equazioni del complesso C; se ad es. il fascio non contiene reciprocità di specie superiore, sarà $m_h + m'_h - h = n$, perciò a un punto generico $P'(y_i)$ di S'_n corrisponde l'S_{n-2} le cui coordinate r_{ik} sono i minori di 2° ordine della matrice:

$$\left\| \begin{array}{l} 0 \quad y_{m-1} \cdot y_0 \; y_{m+m'} \cdot y_{m+1} \quad 0 \cdot y_{m+m'+1} \; y_{m_1+m'_1-1} \cdot y_{m_1+m'+1} \cdots \\ \qquad \cdots \quad 0 \quad \cdot y_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} \; y_n \cdot y_{m_h+m'_{h-1}-h+2} \\ y_{m-1} \; y_{m-2} \cdot 0 \; y_{m+m'-1} \cdot y_m \quad y_{m_1+m'-1} \cdot \quad 0 \quad y_{m_1+m'_1-2} \cdot y_{m_1+m'} \cdots \\ \qquad \cdots y_{m_h+m'_{h-1}-h} \cdot \quad 0 \quad y_{n-1} \cdot y_{m_h+m'_{h-1}-h+1} \end{array} \right\|.$$

Si trovano allora anzitutto le seguenti $2h$ equazioni lineari:

$$r_{0,m+m'+1} = \ldots = r_{0,m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2} = 0;$$
$$r_{m,m_1+m'} = \ldots = r_{m,m_h+m'_{h-1}-h+1} = 0;$$

le quali esprimono che l'S_{n-2} considerato sega secondo degli S_{h-1} gli spazî fondamentali $A_0 \, A_{m+m'+1} \cdots A_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2}$, $A_m \, A_{m_1+m'} \cdots A_{m_h+m'_{h-1}-h+1}$, che sono gli S_h singolari delle due reciprocità con cui è costruito il fascio (13). Si hanno poi le seguenti $n - 3h - 2$ equazioni di 2° grado:

$$\frac{r_{01}}{r_{m0}} = \ldots = \frac{r_{0m}}{r_{m,m-1}} = \frac{r_{0,m+2}}{r_{m,m+1}} = \ldots = \frac{r_{0,m+m'}}{r_{m,m+m'-1}} \left(= - \frac{y_{m-1}}{y_0} \right);$$

$$\frac{r_{m+m'+1,\, m+m'+2}}{r_{m_1+m',\, m+m'+1}} = \ldots = \frac{r_{m+m'+1,\, m_1+m'}}{r_{m_1+m',\, m_1+m'-1}} = \frac{r_{m+m'+1,\, m_1+m'+2}}{r_{m_1+m',\, m_1+m'+1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{r_{m+m'+1,\, m_1+m'_1-1}}{r_{m_1+m',\, m_1+m'_1-2}} \left(= - \frac{y_{m_1+m'-1}}{y_{m+m'+1}} \right);$$

. . . .

12. Da ciò che precede si può concludere: *Per un fascio di* S_h*-reciprocità, non contenente reciprocità di specie superiore, e per il quale le varietà* U_{h+1}, V_{h+1} *non sono coni, il complesso caratteristico* C (C′) *è costituito da* ∞^n S_{n-2} (S'_{n-2}) seganti *di* U_{h+1} (V_{h+1}); *gli* S_{n-2} *di* C (S'_{n-2} *di* C′) *che passano per lo stesso* S_{m-2} ($S'_{m'-2}$) segante *di* U_{h+1} (*di* V_{h+1}) *formano un complesso lineare* $\infty^{n-m+h+1}$ ($\infty^{n-m'+h+1}$).

Ne segue che C si compone di tutti gli S_{n-2} seganti di U_{h+1} solo se: $n-m+h+1=2(n-m+1)-2$, ossia: $n-m+h=2h+1$, e quindi (essendo, per le ipotesi introdotte, $n-m+h=m'\geq 2h+1$):

$$m'=2h+1\,.$$

Se anche il complesso C' è composto di tutti gli S'_{n-2} seganti di V_{h+1}, dev'essere anche: $n-m'+h=m=2h+1$, e perciò:

$$n=3h+2:$$

Per un fascio generico di S_h*-reciprocità tra spazî a* $3h+2$ *dimensioni, i complessi caratteristici sono costituiti da tutti gli* S_{3h} *ed* S'_{3h} seganti *di* U_{h+1} *e* V_{h+1} *rispettivamente.*

Osserviamo infine che se il fascio considerato di specie $h+1$ acquista una reciprocità di specie $h+l+1$ $(n-h>l>0)$, ogni S_{n-2} di C sega in un S_{h+l-1} il rispettivo S_{h+l} singolare.

Torino, 12 aprile 1917.

$$\frac{r_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2,\,m_{h-1}+m'_{h-1}-h+3}}{r_{m_h+m'_{h-1}-h+1,\,m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2}}=\ldots=\frac{r_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2,\,m_h+m'_{h-1}-h+1}}{r_{m_h+m'_{h-1}-h+1,\,m_h+m'_{h-1}-h}}=$$

$$=\frac{r_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2,\,m_h+m'_{h-1}-h+3}}{r_{m_h+m'_{h-1}-h+1,\,m_h+m'_{h-1}-h+2}}=\ldots=\frac{r_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2,\,n}}{r_{m_h+m'_{h-1}-h+1,\,n-1}}$$

$$\left(=-\frac{y_{m_h+m'_{h-1}-h}}{y_{m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2}}\right).$$

Infine, tenendo conto dei valori (scritti fra parentesi) di tutti questi rapporti, valori che chiameremo $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_h$, si ottengono ancora, ad es., le seguenti h equazioni, di 3° grado nelle r_{ik}:

$$\frac{r_{m,m+m'+1}}{r_{0,m_1+m'}}=-\frac{\sigma_1}{\sigma_0},\quad\frac{r_{m,m_1+m'_1}}{r_{0,m_2+m'_1-1}}=-\frac{\sigma_2}{\sigma_0},\ldots,\frac{r_{m,m_{h-1}+m'_{h-1}-h+2}}{r_{0,m_h+m'_{h-1}-h+1}}=-\frac{\sigma_h}{\sigma_0}.$$

Ricerche chimiche sull' " Elaphomyces hirtus „.

Nota del Dott. GIOVANNI ISSOGLIO

con Prefazione del Prof. O. MATTIROLO.

PREFAZIONE

La chimica dei funghi ipogei (*Tuberaceae-Hymenogastreae*, ecc.) è oggi ancora in condizioni da non permettere serie deduzioni scientifiche.

Infatti, mentre le analisi di Bonnet, Böhmer, Bouillon-Lagrange, Chatin, Dahlem, Ferry de la Bellone, König, Kohlrausch, Lefort, Mörner, Payen, Pizzi, Strohmer, Siegel, ecc. ci rivelano la presenza e le percentuali dei principali elementi costitutivi della *glèba* di questi funghi; esse non ci illuminano egualmente sul modo con cui tali elementi sono raggruppati per costituire i vari albuminoidi, i glucosii, le cellulose, i grassi, gli olii eterei, ecc. ecc. in essi contenuti.

Soltanto la conoscenza esatta della quantità di queste sostanze ci permetterà di ragionare in modo positivo intorno alla biologia, al bilancio organico e al valore alimentare dei funghi ipogei, i quali vanno soggetti a variazioni importantissime dal punto di vista chimico, secondo il grado di loro maturazione.

Si sa, ad esempio, che i tartufi giovani, ancora inodori, abbondano di glicogeno; mentre quelli maturi, odorosi, sono ricchi di grassi e privi invece di glicogeno (1); e che di pari

(1) Sopra questo fatto io ho anzi proposto un metodo facile per giudicare, coll'uso dell'acqua iodata, dello stato di maturazione dei tartufi. V. O. Mattirolo, *Sul valore sistematico del " Choiromyces meandriformis „*, ecc., " Malpighia „, 1892, pagg. 19 e 22.

passo con queste trasformazioni, altre variazioni di non minore importanza hanno pure luogo nei principii azotati, le quali si accompagnano collo sviluppo di speciali sostanze odorose solforate.

Le poche ricerche *serie*, già fatte in questo campo dal chimico francese Bourquelot, relativamente al modo di comportarsi delle varie sostanze nei differenti periodi di sviluppo dei funghi, valgono a dimostrare con quale benefizio di inventario si debbano accettare le analisi che noi possediamo, anche per ciò che in nessuna di esse è tenuto conto dello stato di sviluppo degli individui esaminati.

Nell'intento di giovare al progresso di questi studii, vado raccogliendo quantità di materiali, preparandoli allo stato di essiccazione, onde concederli in esame a chimici provetti e volenterosi.

Un primo saggio di questi materiali ho dato in esame al Dr. Giovanni Issoglio, libero-docente di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, e le sue conclusioni formano l'oggetto della Nota che io mi onoro di presentare ai chimici e ai botanici.

Il Dr. Issoglio, dietro mio consiglio, ha studiato la composizione chimica di un fungo ipogeo comune nelle Pinete, dove vive come simbionte, specialmente delle radici del *Pinus sylvestris* Linn.

L'*Elaphomices hirtus* Tul., descritto la prima volta nell'anno 1831 sotto il nome di *E. variegatus* dal micologo milanese Carlo Vittadini, offre un campo di ricerche chimiche ancora si può dire ignorato; perocchè le poche notizie che la scienza possiede sulla costituzione di questo ipogeo e delle specie congeneri, sono ancora rudimentali.

L'analisi che ci hato lo Spegazzini nell'anno 1881 (1) e i pochi dati che trovansi riferiti nel volume dello Zelner (2) sono da ritenersi di scarsissimo valore.

---

(1) C. Spegazzini, *Notas y apuntes sobre los Elaphomicetes especialmente referentes al " Elaphomyces variegatus "* Vitt., " Ann. Soc. Cient. Argentina ", Buenos Aires, XI, 1881, pagg. 61, 72.

(2) Zelner, *Chemie der höheren Pilze*, Leipzig, 1907. Sono ivi ricordate le ricerche di Bourquelot, Biltz, Bissingen, Busse, Harz, Ludwig, Mattirolo, Rochleder, ecc.

A questo primo saggio, che devo alla gentilezza e alla perizia del Dr. Issoglio, nutro fiducia altri ne potranno seguire fra breve.

Sebbene sia cosa oltremodo faticosa e anche difficile la raccolta dei materiali, io continuerò a ricercarli, persuaso di poter riuscire a radunare elementi di studio interessanti, per mezzo dei quali i chimici potranno svelare non pochi dei tanti misteri che ancora avvolgono la conoscenza di esseri così importanti per le relazioni che essi contraggono colle radici degli alberi delle nostre foreste.

La luce che attendiamo da queste ricerche, speriamo non abbia a giovare ai chimici soltanto, ma anche ai silvicultori, ai quali, nel momento presente, il problema della ricostituzione delle nostre foreste (verso il quale si elevano i nostri più ardenti desiderii) incombe come dovere altissimamente patriottico.

Torino, marzo 1917.

O. Mattirolo.

L'*Elaphomyces hirtus* (Tulasne) è una specie di Elafomiceti o tartufi cervini, che presenta il corpo fruttifero costituito dal *peridio* od *ascoma* duro, coriaceo, di colore avana chiaro, racchiudente la *gleba*, formata da residui miceliari assai fini e tenui e dalla massa delle spore di 24 μ di diametro, di colore bruno. La gleba però non è sempre omogenea e non giunge ad ugual grado di maturità per tutti gli individui, cosicchè, mentre alcuni presentano i caratteri sovraccennati col contenuto del peridio finamente polverulento e nero, altri (i più giovani) invece mostrano ancora un ammasso di ife feltrate biancastre od anche grigiastre o grigio-brune.

Prima di sottoporre all'analisi gli elafomiceti che avevo a disposizione e che erano stati conservati per parecchio tempo in laboratorio allo stato secco, ho creduto opportuno mediante uno spazzolino di crine pulire ogni individuo dalle piccole quantità di terra ancora aderenti al corpo fruttifero; con un coltellino aprii il corpo fruttifero separando il peridio dalla gleba, avendo cura di raschiare collo stesso coltello le parti che non volessero staccarsi con facilità.

La gleba costituisce dal 35 al 40 % di peso del corpo fruttifero.

Fatta questa separazione, eseguii l'analisi chimica per conoscere la composizione mediata delle sostanze che dovevo studiare:

Peridio.		Sulla sostanza secca all'aria	Sulla sostanza secca a 100°-110°
Acqua	%	11,83	—
Ceneri	„	2,73	3,09
Sostanza organica	„	85,44	96,91
		100,00	100,00

La sostanza organica del *peridio* è così costituita:

Sostanze estrattive	%	67,83	76,93
Azoto totale	„	1,48	1,67
Sostanze albuminoidi calcolate come segue: N × 6,25 . .	„	9,25	10,49
Cellulosa dei funghi	„	7,34	8,34
Estratto etereo	„	1,02	1,15.

Da questa analisi risulta nel peridio una relativa povertà in grassi ed in sostanze azotate albuminoidi ed una ricchezza in carboidrati. Le ceneri sono in special modo ricche in potassio ed anidride fosforica con piccolissima quantità di magnesio e calcio e relativamente piccole quantità di silicio ed acido solforico. Per tali ceneri non ho creduto opportuno far seguire all'analisi qualitativa quella quantitativa, perchè questa esulava dai miei scopi.

La *gleba*, costituita come dissi, venne analizzata a parte. La polvere leggera non viene bagnata in alcun modo dall'acqua, ma galleggia sopra di essa; per favorirne l'immersione, occorre aggiungere una piccola quantità di alcool etilico, tanto da inumidire le spore.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

Gleba.		Sulla sostanza secca all'aria	Sulla sostanza secca a 100°-110°
Acqua	%	12,71	—
Ceneri	„	1,70	1,84
Sostanza organica	„	85,69	98,16
		100,00	100,00

La sostanza organica della *gleba* ha la seguente composizione:

		Sulla sostanza secca all'aria	Sulla sostanza secca a 100°-110°
Azoto totale	%	3,50	4,00
Sostanza albuminoide calcolata come segue: N × 6,25 . .	„	21,78	25,07
Sostanza estrattiva	„	55,14	63,15
Cellulosa dei funghi	„	7,43	8,50
Estratto etereo	„	1,25	1,43.

L'analisi chimica qualitativa delle ceneri dimostra presente in prevalenza il fosfato di potassio sovra gli altri costituenti. Parte del calcio si trova sotto forma di solfato, confermando in ciò le esperienze di Rochleder (1), il quale avrebbe riscontrato nell'*Elaphomyces granulatus* il calcio allo stato di gesso.

Siccome io ho sperimentato sovra campioni essiccati all'aria e già da tempo conservati in laboratorio, così non ho potuto riscontrare nei funghi analizzati che minima quantità di ammoniaca combinata ad acidi organici, mentre ci è noto che lo stesso autore citato avrebbe nel fungo predetto riscontrata una certa quantità di sali ammoniacali.

Questa ammoniaca è essenzialmente presente nei funghi freschi in piena attività vegetativa.

Estratto etereo. — Esaminando la composizione chimica immediata dell'*Elaphomyces hirtus* fui colpito dalla esistenza in esso di una esigua quantità di sostanza grassa, mentre è noto che le spore dei funghi e specialmente quelle degli ascomiceti contengono una certa quantità di sostanza grassa, come materiale di riserva; sostanze grasse che sono ben visibili nelle spore degli individui freschi e ben conservati e che si presentano sotto forma di goccioline trasparenti, assai rifrangenti, che ricordano molto bene le goccioline di grasso del latte od anche le goccioline di grasso liquido contenute nei tessuti delle piante e degli animali.

---

(1) *Chemie der höheren Pilze*, J. Zellner.

Queste goccioline molte volte assurgono ad importanza per l'esame delle spore dei funghi, tanto che il loro numero e la loro posizione servono come carattere diagnostico per distinguere le spore di una specie da quelle dell'altra.

Queste goccioline oleose, mentre si osservano molto bene al microscopio, operando, come dissi, con spore fresche e recenti, non si osservano invece nelle spore dei funghi essiccati e conservati per molto tempo allo stato secco. Lo stesso dicasi delle spore contenute negli aschi di alcune *pezize* essiccate, che erano prive delle goccioline oleose. Ad ogni modo la piccola quantità di grassi riscontrati mi fece nascere il dubbio, che l'etere col quale si faceva l'estrazione del grasso, non potesse entrare nella spora organicamente costituita, e non estraesse quindi tutta la sostanza grassa. A noi sono infatti note le esperienze del Bouchner, il quale, soltanto con mezzi meccanici potentissimi, ha potuto estrarre dalle cellule dei saccaromiceti la zimasi alcoolica, che per lo dianzi era perfettamente sconosciuta ai chimici.

Ho quindi pensato dapprima di ricorrere agli stessi mezzi meccanici per tentare di estrarre i grassi delle spore degli elafomiceti, ma poi, essendomi occorso alla mente che le sostanze grasse sono assai resistenti ai reattivi chimici, ho tentato di risolvere il problema molto interessante per la biologia vegetale con un metodo puramente chimico, non avendo a mia disposizione nè macine nè presse idrauliche della potenzialità necessaria.

Con un setaccio, le cui maglie misuravano 0,25 millimetri di diametro, ho separato le spore dalle ife fungine e dette spore ho sottoposto ad un'estrazione eterea in un apparecchio Soxhlet.

Prolungata l'estrazione per 6 ore, determinai quantitativamente il grasso asportato uguale ad 1,12 $^0/_0$.

Le spore da cui ho estratto il grasso essiccai e trattai in un palloncino con acido solforico al 60 $^0/_0$, scaldando a b. m. a ricadere per 12 ore. Dopo questo tempo diluii con acqua e raccolsi sovra un filtrino tarato lavando con acqua calda sino a che il filtrato non dava più intorbidamento col cloruro di bario. Feci essiccare in stufa a 100° e pesai. L'acido solforico aveva asportato il 75 $^0/_0$ della sostanza. Il residuo bruno e secco rimasto sul filtro rimisi nell'apparecchio Soxhlet ed estrassi nuovamente con etere. L'etere estrasse una piccola quantità di sostanza

grassa di colore leggermente giallo, che venne essiccata a 100°
e pesata, rapportando col calcólo a 100 parti di sostanza primitiva.

Il grasso trovato in questa seconda estrazione era costituito, sovra 100 parti di spore, da grammi 0,50 di grasso neutro e da grammi 1 di acidi grassi liberi.

Tanto i grassi neutri, come gli acidi grassi trovati in questa seconda estrazione, potevano non preesistere nelle spore analizzate, ma essersi formate in seguito ad idrolizzazione delle sostanze albumoidi. Ad ogni modo, pur ammettendo che tutti questi derivati grassi fossero preesistenti, e trasformando gli acidi grassi in grassi neutri addizionandovi un decimo del peso, dovuto alla glicerina, si ottiene un totale di grasso uguale ad 1,60, che, addizionato a quello proveniente dalla prima estrazione (1,12), porta ad una quantità di grassi uguale a 2,72.

In riassunto, la quantità di grasso trovata nell'*Elaphomyces hirtus* è molto piccola, nè so a qual causa attribuire questa povertà di estratto etereo. Sarà essa dipendente dalla prolungata essiccazione del fungo, oppure dalle difficoltà di estrazione, o dalla natura intrinseca delle spore?

Non mi fu possibile, allo stato attuale delle ricerche, la risposta a queste domande, che mi sono rivolto.

Ciò che rimane indisciolto nell'etere dalla seconda estrazione venne trattato con soluzione diluitissima e calda di ammoniaca, la quale estrae una sostanza colorante bruna. Questa sostanza colorante, di cui si dirà in seguito, venne evaporata a secco e pesata (gr. 4,28 per 100 p. di spore). Rimane ancora indisciolta una polvere bruna, che, vista al microscopio, dimostra di essere costituita dall'episporio sotto forma di piccole borsette vuote, che resistono bene alla soda caustica al 5 $^0/_0$, ma sono disciolte assai facilmente da poche goccie di acqua di Javelle.

Il peridio dell'*E. hirtus* triturato in un mortaio posi in un estrattore Soxhlet, estraendo con etere ordinario. Distillato l'etere, liberai il residuo dalle ultime traccie di solvente scaldando a b. m. e facendovi passare una corrente di anidride carbonica.

Il grasso ottenuto è di colore giallo-pallido, e ripreso con etere lascia separare una sostanza bianca cristallina, poco solubile in questo solvente.

Il grasso ricavato dal peridio e specialmente poi quello ricavato dalla gleba, conteneva una piccola quantità di fosforo organo-metallico, ciò che dimostra nel corpo esaminato la presenza di piccole quantità di lecitine.

Micosterina. — L'estratto etereo del peridio contiene, come ho detto, una sostanza bianca poco solubile in etere, la quale raccolsi sopra un filtro e lavai con poco etere.

Questo residuo rimasto insolubile sul filtro scaldai a ricadere con potassa caustica alcoolica al 3 %.

Dopo raffreddamento diluii con acqua e lasciai in riposo; la sostanza insolubile raccoltasi in fondo al recipiente separai raccogliendola sopra un filtro.

Sciolsi in alcool concentrato e feci cristallizzare dall'alcool a caldo: si separarono finissimi aghi a rosetta, che vennero essiccati tra carta, poi a 100°. Il prodotto ottenuto dopo varie cristallizzazioni dall'alcool è in aghetti finissimi, leggeri, setacei, bianchi, fusibili a 265°.

Triturato leggermente in mortaio di agata e toccato con una spatola di platino, si elettrizza.

Nessuno dei composti estratti dai funghi ed appartenenti al gruppo delle colesterine ha un punto di fusione così elevato.

Bamberger e Landfield (1) hanno estratto due sostanze di questo gruppo dallo *Scleroderma aurantium*: l'una cristallizza in lamelle trasparenti regolamentari e fonde a 176°-178°, l'altra dall'etere si ha in aghetti sottili fusibili a 196°-197°; tuttavia havvi ancora molta differenza dal punto di fusione segnato per la sostanza da me estratta dall'*E. hirtus*.

Questa sostanza a punto di fusione alto si avvicina ad alcune fitosterine che in questi ultimi tempi furono ricavate dalle piante e che presentano per lo più un peso molecolare piuttosto elevato, come, ad esempio, l'*Arnidiol* ricavato da Klobb dall'*Arnica montana* (2), il *Faradiol* (3), che lo stesso autore ricavò dalla *Tussilago farfara*.

---

(1) M. 1906, pag. 963.
(2) " Bull. Soc. pharmac. „, 160 (1910), pag. 228.
(3) " Id. „, id.

Sostanze della stessa natura furono ricavate recentemente da Scurti (1) nelle oleacee e distinte coi nomi di *oleanolo, ligustrolo* e *fillirolo*, mentre pare siano esse della stessa natura di quella sostanza cristallina, estraibile con etere, e riscontrata da molti autori nel sughero sotto il nome di *cerina* e che venne ancora separata e studiata ultimamente dallo stesso Scurti.

Ho sottoposto all'analisi elementare il composto che ho descritto poc'anzi ed ho ottenuto i seguenti risultati:

Gr. 0,1076 di sostanza essiccata a 100° diedero gr. 0,3088 di CO^2 e gr. 0,1124 di H^2O.

	trovato
Carbonio °/₀	78,25
Idrogeno „	11,60.

Per un composto avente la formola $C^{20}H^{36}O^2$, oppure quella di $C^{30}H^{54}O^3$, si calcola:

	trovato
Carbonio °/₀	77,90
Idrogeno „	11,70.

Per conoscere a quale delle due formole sovrascritte appartiene la sostanza analizzata ho determinato il peso molecolare col metodo erioscopico (2) (apparecchio Beckmann) ed ho ottenuto i seguenti numeri:

Sostanza gr. 0,0974; acido acetico glaciale gr. 14,682; $\Delta = 0°,06$; $K = 39$.

	trovato	calcolato per $C^{30}H^{54}O^3$
Peso molecolare	431	462.

Do il nome di *micosterina* alla sostanza analizzata, appellativo che mi serve per indicare la sua origine dai funghi, il suo carattere chimico e la sua consistenza solida.

---

(1) " Annali della R. Stazione chimico-agraria di Roma „, vol. V (1911).

(2) L'analisi elementare ed il peso molecolare furono eseguiti nel laboratorio di chimica farmaceutica della Regia Università diretto dal Prof. I. Guareschi, che ringrazio sentitamente.

Le esigue quantità di sostanza avute a disposizione mi impedirono di studiare più intimamente la costituzione di questa micosterina, però le reazioni chimiche ottenute mi permettono di stabilire un parallelo fra questo prodotto e le colesterine estratte dai funghi.

1° *Azione dell'acido solforico concentrato.* — Si scioglie in acido solforico concentrato senza colorarsi notevolmente: si nota leggera colorazione gialla; per aggiunta di acqua si ha intorbidamento bianco.

Secondo Gérard le colesterine vegetali con acido solforico concentrato si colorano in rosso e dànno con acqua precipitato verde; la micosterina da me studiata si avvicinerebbe per questa reazione a quelle animali, che con acido solforico si colorano in giallo e con acqua dànno intorbidamento bianco.

2° *Reazione di Hesse-Salkowski.* — Nessuna colorazione.

3° *Reazione di Schiff-Mochs.* — Evaporando la micosterina col reattivo di Obermayer (acido cloridrico concentrato, in cui sono sciolti grammi 0,3 % di cloruro ferrico) si ottiene un residuo azzurro-cupo con riflessi di color grigio.

4° Con *acido nitrico* conc. a freddo non si ha alcuna colorazione. Evaporando sopra una piccola fiamma l'acido nitrico si ottiene un residuo giallo, che ha odore leggero di muschio, e che con ammoniaca prende colorazione rosso-ranciata.

Addizionando idrato sodico la colorazione non cambia.

5° *Reazione Liebermann-Burchard.* — Sciolta la sostanza in cloroformio, si addiziona ugual volume di anidride acetica e due gocce di acido solforico concentrato, ottenendo così una splendida colorazione violetta, che passa al rosso-bruno, poi al rosso-malva.

Da questi risultati analitici si deduce che la micosterina da me analizzata e purificata non dà le reazioni solite delle fitosterine. Dà soltanto queste reazioni quando è impura e sono necessarie due o tre cristallizzazioni dall'alcool concentrato per purificarla dalle colesterine estranee.

Notevole per la vivacità delle colorazioni è la reazione Liebermann-Burchard.

Alcaloidi. — Gli alcaloidi, fatte poche eccezioni, si trovano sempre in piccole quantità nei funghi in genere e negli elafomiceti in specie; questa è la ragione per la quale io non ho potuto estrarre dall'*E. hirtus* una quantità apprezzabile di alcaloidi.

Avendo infatti tentato da 100 gr. di gleba ricavare col metodo Stass-Otto gli alcaloidi in esso esistenti, ottenni, evaporando l'etere di estrazione, un residuo appena visibile ad odore fortemente viroso, che, trasformato in cloroplatinato, diede gr. 0,250 di sale cristallizzato in lamelline dorate.

Data però la piccola quantità di cloropatinato ottenuta, non ho potuto analizzare il prodotto, nè ho creduto opportuno ricavare una maggior quantità di alcaloidi per ulteriori ricerche.

Mannite. — È noto che fra gli alcooli ad alta valenza la mannite è quella maggiormente diffusa in tutti i funghi.

Bouillon, Lagrange, Vergnes, Parmentier, Payen, Lefort, Chatin la riscontrarono nei *tuber* eduli; Mattirolo la trovò in un numero grandissimo di tuberacee e Bourquelot la riscontrò nei funghi freschi del genere *Elaphomyces* nella quantità che oscilla fra 11-12 %.

Basta trattare il fungo con alcool e far evaporare il solvente perchè si osservi cristallizzare una sostanza bianca costituita da mannite.

Però questo costituente fu estratto dal peridio dell'*E. hirtus* operando nel modo seguente: gr. 200 di sostanza triturata grossolanamente in un mortaio vennero trattati all'ebullizione per due volte con quattrocento p. di acqua, portando la massa sopra un pannolino allo scopo di eliminare colla pressione l'acqua in eccesso. Il liquido acquoso raffreddato, di colore leggermente giallo, venne filtrato ed evaporato a debole vapore a b. m. Allorchè si raggiunsero circa 100 cm^3 di liquido si aggiunse uguale volume di alcool conc., il quale fece precipitare le sostanze albuminoidi ed i carboidrati complessi presenti.

Si filtrò ed il filtrato venne nuovamente evaporato per scacciare l'alcool. Il residuo fu addizionato di acetato basico di piombo e filtrato nuovamente, eliminando col gas solfidrico l'eccesso del piombo adoperato nella defecazione. Il filtrato separato dal solfuro di piombo si evaporò a debole calore sino ad otte-

nere pochi centimetri cubi di liquido, che si lasciò concentrare ancora nel vuoto sovra l'acido solforico concentrato.

Cristallizzò la mannite in lunghi aghi incolori e lucenti, che fu ricristallizzata in seguito dall'alcool.

Questi aghi di sapore leggermente zuccherino fondono a 166°; scaldati fortemente si gonfiano e si scompongono, svolgendo odore di zucchero bruciato; posti in alcool all'80 % saturo di mannite purissima, non si sciolgono affatto.

La loro soluzione acquosa non riduce, nè il liquore cupro-potassico, nè il nitrato d'argento ammoniacale.

I caratteri fisici e chimici ci dicono trattarsi realmente di mannite.

La quantità ricavata da cento parti di peridio è di gr. 10,62.

Anche la gleba contiene quantità notevoli di mannite.

Carboidrati complessi. — Errera (1), trattando delle riserve idrocarbonate dei funghi, ha dimostrato come il glicogeno sia molto diffuso in questi vegetali, come materiale di riserva per sostituire l'amido. La sua presenza fu da Mattirolo (2) dimostrata specialmente nel tessuto giovane delle *Tuberaceae* in genere, mentre va scomparendo allorquando si vanno formando le spore. Anzi su tale constatazione egli fondò il metodo da lui proposto per seguire gli stadî di sviluppo di questi funghi.

Le ricerche del glicogeno nei funghi si eseguisce in generale microscopicamente, osservando che i tessuti, che lo contengono, hanno la proprietà di colorarsi in rosso-bruno coll'acqua iodata, e perdono il colore quando vengono scaldati a 60-70°.

Microscopicamente il glicogeno si trova nei tessuti giovani e nella gleba avente le ife feltrate biancastre.

Ho potuto estrarre dalle ife fungine la *micoinulina*, che riscontrai anche abbondante nella gleba pervenuta a perfetta maturità.

Infatti, trattando con acqua a caldo le spore, filtrando e lasciando raffreddare, si deposita dopo poco tempo una sostanza

---

(1) *C. R.*, 1885, t. CI, pagg. 253 e 391.

(2) " Malpighia Ann. ", vol. VI (1892).

bianca, leggera, che raccolta sopra un filtro e sciolta nuovamente in acqua a caldo si precipita totalmente aggiungendo alcool concentrato. Si ottiene così una massa bianca, amorfa, inodora, insipida, solubile 1 p. in 240 p. di acqua fredda ed in 5 p. di acqua bollente, insolubile in alcool etilico.

La soluzione è neutra, non riduce il liquido di Fehling, ma lo riduce dopo che ha subìto una prolungata ebullizione con acido cloridrico diluito, ed allora esaminata al polarimetro presenta una soluzione, che devia a sinistra il piano della luce polarizzata.

Questa sostanza fu riconosciuta identica alla *micoinulina* riscontrata da Blitz (1) nell'*Elaphomyces granulatus* e devesi distinguere dal glicogeno, perchè, mentre questo si colora in rosso-bruno colla tintura di iodo, all'incontro la micoinulina non viene per nulla colorata dallo iodo.

Il peridio lavato a più riprese con acqua bollente per liberarlo dalle sostanze solubili e bollito a lungo con soluzioni diluite di acido solforico allo scopo di liberarlo dalle sostanze facilmente saccarificabili, viene fatto bollire con soda caustica al 2 %. Ad ebullizione protratta si filtra, ed il filtrato si tratta con acido cloridrico diluito. Precipita una sostanza gelatinosa insolubile in acqua di colore rosso-bruno, che viene raccolta sopra un filtro e lavata; se si aggiunge al liquido filtrato un poco di acqua di Javelle, prima di addizionarvi l'acido cloridrico si formano allora dei fiocchi quasi incolori.

Steso il precipitato gelatinoso sopra un vetro, si ottengono pellicole flessibili resistenti, il cui colore varia dal bruno-scuro al giallo-pallido a seconda del grado di depurazione del precipitato.

Questa sostanza gelatinosa non contiene azoto, come dimostra la sua fusione col sodio metallico, che non ha dato la benchè minima traccia di cianuro di sodio, e quindi colla miscela ferroso-ferrica e coll'acido cloridrico non si ottenne l'azzurro di Prussia.

Essa deve adunque riguardarsi come *paraiso-destrano*, separato dal Winterstein (2) dal *Polyporus betulinus*.

---

(1) " Trommsdorff. Journ. „, 1825, t. XI, pag. 3.

(2) " Bull. „, 1872, t. V, pag. 1057.

È insolubile nell'acqua e negli acidi diluiti, solubile negli acidi concentrati e negli alcali, dalle soluzioni alcaline è precipitata cogli acidi diluiti: il ioduro di potassio iodurato la colora in rosso-bruno.

Fatta bollire con acido cloridrico concentrato, svolge piccole quantità di furfurolo. Idrolizzata collo stesso acido dà una soluzione, che riduce il reattivo di Fehling e che trattata con una soluzione di acetato di fenilidrazina lascia separare ad 80-90° gradi degli aghi gialli raggruppati a ciuffo e visibili al microscopio, costituiti da fenilglucosazone fusibile a 208°. L'esame polarimetrico dimostra che si tratta di glucosio destrogiro, ossia di destrosio.

Per azione pirogenica questa sostanza dà un distillato, che contiene, oltre il furfurolo e la formaldeide, anche un derivato fenolico che si colora in violetto col percloruro di ferro. Detta sostanza col reattivo di Millon dà colorazione rossa e coll'acqua di bromo un precipitato bianco.

La presenza di siffatto derivato fenolico tra i prodotti della distillazione pirogenica mi ha fatto pensare che nel prodotto esaminato esistesse qualche gruppo fenolico contenente l'ossidrile OH. Però non mi fu possibile ricavare dai prodotti di idrolizzazione alcun composto suscettibile di colorarsi col percloruro di ferro e che presentasse carattere fenolico. Perciò venni alla conclusione che l'azione del calore sulla sostanza da me studiata aveva sinteticamente generato il derivato fenolico, che si trovò perciò fra i prodotti della distillazione.

Fungina. — Sotto questo nome il Braconot designava la cellulosa dei funghi, la quale, a differenza di quella contenuta nelle piante, contiene una piccola quantità di azoto.

L'azoto che si trova nella fungina ricavata dalle varie qualità di funghi è però variabile, e ciò in relazione coi metodi di estrazione della cellulosa, poichè è malagevole misurare l'attacco progressivo dei vari reattivi sulle numerose e complesse sostanze contenute nei vegetali.

Winterstein (1) avrebbe riscontrato nella cellulosa dei funghi

(1) " Ber. des deutsch. botan. Gesellschaft ", t. II, pag. 441 e " Ch. C. ", 1893, t. II, pag. 756.

estratta col metodo ordinario dal *Boletus Edulis*, dal *Poliporus officinalis*, dallo *Psalliota Campestris* una quantità di azoto che dal 2,60 % va sino al 4 %. Non è ancora bene accertato se si tratti di un miscuglio di cellulosa con una sostanza azotata incrostante, oppure se si tratti di un composto speciale complesso simile alla cellulosa e contenente nella sua molecola l'azoto.

Anche il Tanret (1) avrebbe separato dai funghi una cellulosa azotata, che egli ritenne come una combinazione di chitina con un idrato di carbonio della composizione $(C^6H^{10}O^5)^6$, che egli chiama *fungoso*.

Io ho separato dall'*E. hirtus* la cellulosa col metodo noto di Hoppeseyler ed ho ottenuto una sostanza polverulenta, stabile, sia all'azione degli acidi diluiti come a quella degli alcali diluiti, di colore avana, solubile appena in tracce nella soluzione ammoniacale di ossido di rame. Bollita con acido solforico al 30 %, produce glucosio, che riduce il liquore del Fehling; dopo averla essiccata a 100° vi ho determinato l'azoto col metodo di Kieldahl:

Gr. 0,3216 di sostanza diedero gr. 0,00735 di azoto;

	trovato
Azoto %	2,28.

Sostanze coloranti. — Nei tentativi che ho eseguito allo scopo di identificare la ricchezza in grasso delle spore ho accennato, che l'ammoniaca diluita esportava dalle spore medesime nella quantità del 4,28 % una sostanza colorata in bruno-seppia, che pare sia quella che rende colorate intensamente in nero le spore dell'*E. hirtus*.

Questo pigmento bruno è in tutto analogo a quello estratto dal Coxe dal *Coprinus Ovatus*.

Abbandonati all'aria, questi funghi cadono in deliquescenza, dando un liquido nero, onde ad essi venne dato il nome di *funghi calamai*. Si comprende dalle esperienze del Coxe che questo liquido bruno è formato da un pigmento complesso, reso solubile dalle sostanze basiche provenienti dalla alterazione dei

---

(1) " Bull. ", t. XVII, pag. 921.

funghi. Queste soluzioni hanno carattere colloidale, come ho potuto sperimentare direttamente sul liquido bruno ricavato dai funghi *Coprinus* e favoritomi gentilmente dal Prof. Mattirolo; esse infatti precipitano coll'acido cloridrico diluito e dànno parimenti fiocchi bruni per aggiunta di elettroliti (succinato di ammonio, ossalato di ammonio, nitrato di argento, cloruro di bario, ecc.). Secondo afferma il Coxe, questi liquidi possono dare un inchiostro bruno-seppia, resistente ai raggi diretti del sole, all'azione del cloro, dell'acido cloridrico e del gas ammoniacale e possono parimenti servire pel disegno e per l'acquerello.

Nel caso dell'*E. hirtus* trovandosi le spore allo stato secco e quindi in buone condizioni di conservazione, non cadono in putrefazione, onde il colore difficilmente viene asportato, anche quando si trattano queste all'ebullizione con acqua.

Detta colorazione ha anche grande resistenza agli acidi diluiti (cloridrico e solforico), persino con acido solforico al 60 $^0/_0$ ed a caldo non viene alterata, come ho detto quando ho studiato la quantità di estratto etereo suscettibile di essere ricavato dalle spore.

Il pigmento nero viene invece estratto con una soluzione diluitissima di ammoniaca. Questa soluzione, trattata con acido cloridrico, diede un precipitato amorfo bruno, insolubile in acqua, che venne raccolto e lavato accuratamente allo scopo di asportare l'acido cloridrico ed ogni traccia di ammoniaca.

La sostanza essiccata fra carta, poi sovra l'acido solforico concentrato, si presenta sotto forma di polvere granulata lucente, che ricorda all'aspetto la polvere da cannone.

Per azione pirogenica dà un distillato liquido che presenta odore viroso, alcaloideo e rammenta le basi organiche. Questo liquido dà reazione alcalina alla carta di tornasole e dà precipitati abbondanti coi reattivi degli alcaloidi. Così si comporta coll'acido cloroplatinico, col reattivo di Bouchardat, con quello di Marmé, ecc. Onde si deve concludere che nel pigmento nero, di cui si tratta, si trova dell'azoto.

I vapori che si sviluppano da questa sostanza quando è riscaldata da sola od anche con l'aggiunta di una piccola quantità di potassa, produce vapori che colorano intensamente in rosso una scheggia di abete bagnata coll'acido cloridrico.

Questa reazione ci dice che fra i prodotti della distillazione

pirogenica del pigmento nero dell'*E. hirtus* esistono anche composti pirrolici.

Benchè io non abbia potuto studiare la composizione chimica strutturale di questo colorante vegetale, data la piccola quantità di sostanza che avevo a disposizione, tuttavia volli determinare la quantità di azoto in essa contenuta, dopo averla essiccata a 100°-110°:

Gr. 0,2520 di sostanza diedero gr. 0,0126 di azoto;

	trovato
Azoto °/₀	5,00.

Questa sostanza azotata sciolta in acqua per addizione di ammoniaca così reagisce coi seguenti reattivi:

1° con acetato di piombo fiocchi bruni, il liquido sovrastante è perfettamente incoloro;

2° col nitrato d'argento fiocchi bruni e liquido incoloro;

3° con alcool nessun cambiamento;

4° col cloruro mercurico fiocchi bruni, che si depongono lentamente;

5° col tannino non precipita;

6° col cloruro stannoso precipitato bruno, non si ha decolorazione neppure a caldo.

Queste reazioni dimostrano l'analogia esistente fra il pigmento bruno ricavato dall'*E. hirtus* ed il liquido bruno ricavato dalla deliquescenza del *Coprinus*.

A quest'ultimo sono mescolate piccole quantità di impurezza provenienti dalla decomposizione dei funghi.

La sostanza azotata dell'*E. hirtus* sciolta in poca ammoniaca dà un liquido bruno, che eguaglia molte tinte seppia artificiali del catrame e può servire sia come inchiostro, sia come colore per acquerello.

Lo studio del pigmento nero estratto dai funghi assurge ad una certa importanza in questo frangente in cui Angeli (1) ha dimostrato la stretta analogia esistente fra il *nero pirrolo* ottenuto per azione dell'acqua ossigenata sul pirrolo in solu-

---

(1) " Gazzetta chimica ", t. XLVI (1916), pagg. 279-283.

zione acetica e le melanine che si riscontrano nell'organismo umano.

Il *nero pirrolo* di Angeli ha proprietà colloidali, è solubile negli alcali ed insolubile negli acidi, onde si avvicina per le sue proprietà di solubilità al nero dei funghi. Ne differisce nella composizione chimica, perchè mentre il nero pirrolo contiene 15,5 % di azoto, il prodotto derivato dall'*E. hirtus*, con tutta probabilità più complesso, contiene solo il 5 % di azoto.

Mi rincresce che l'esigua quantità di sostanza mi abbia impedito di estendere maggiormente queste interessanti ricerche; ad ogni modo mi ritengo per ora soddisfatto di richiamare l'attenzione degli studiosi sopra questi pigmenti neri dei funghi, i quali presentano molta analogia coi pigmenti bruni che si trovano nell'organismo animale.

I funghi hanno composti chimici analoghi a quelli degli animali; basterebbe menzionare, oltre ai pigmenti bruni sovraccennati, l'urea, il glicogeno, la cellulosa azotata, che può ravvicinarsi alla chitina di molti rettili, ecc. ecc.

I micomiceti per questa ragione si possono considerare come organismi di transizione fra il regno vegetale ed il regno animale.

Le sostanze albuminoidi propriamente dette contenute in questi tartufi cervini sono in piccola quantità; ancora poco si conosce intorno ai proteidi dei funghi, nè mi fu possibile approfondire questo argomento per ciò che riguarda l'*E. hirtus*, non avendo avuto a mia disposizione degli esemplari freschi.

Dalle ricerche eseguite sopra l'*Elaphomyces hirtus* si può osservare che la composizione chimica di questi tartufi cervini è uguale a quella che presentano i funghi in generale e come questi sono per lo più poveri in alcaloidi vegetali, così parimenti non mi fu possibile ricavare dall'*E. hirtus* quantità apprezzabili di basi organiche.

Nella medicina popolare gli elafomiceti godono di una certa reputazione quali emostatici, poichè si dice che la loro polvere, deposta in straterelli sottili sulle ferite, abbia la proprietà di far cessare la fuoruscita del sangue. L'analisi chimica non darebbe ragione di questa credenza popolare, poichè negli elafomiceti mancano delle sostanze caratteristiche della segale cornuta, che rendono tanto prezioso questo medicamento.

Le sostanze da me ricavate dall'*Elaphomyces hirtus* e studiate alquanto intimamente, si possono così riassumere:

1° una *micosterina* $C^{30}H^{54}O^{3}$ in aghi setacei bianchi, fusibili a 265°;

2° traccie di alcaloidi inqualificati;

3° *mannite*, p. f. 166°;

4° *micoinulina*, che non si colora collo iodo e non riduce il reattivo di Fehling;

5° il *paraiso-destrano*, estraibile cogli alcali diluiti, che si colora in rosso-bruno collo iodo;

6° la *fungina* col 2,28 % di azoto;

7° nelle spore un pigmento bruno che contiene il 5 % di azoto.

La composizione chimica dell'*Elaphomyces hirtus* dimostra l'analogia che passa fra questo fungo e l'*Elaphomyces granulatus* studiato da Blitz.

È mio dovere rivolgere un vivissimo ringraziamento al Prof. Oreste Mattirolo, che volle gentilmente mettere a mia disposizione numerosi esemplari di *Elaphomyces hirtus*, che furono oggetto delle mie ricerche.

Laboratorio chimico municipale. Torino, gennaio 1917.

Una soluzione del problema della stabilità dei proietti.

(Metodo per la determinazione razionale degli elementi del proietto e della rigatura)

Nota dell'Ing. FILIPPO BURZIO

(Con 1 Tavola).

Fra i varii *problemi secondarii* della Balistica esterna il più importante è, senza confronto, quello del *moto del proietto oblungo relativo al suo centro di gravità.* La sua importanza pratica gli è conferita dai problemi, che ne dipendono, della *stabilità* del proietto, della sua *derivazione*, e della *rigatura* della bocca da fuoco; l'importanza teorica gli viene dall'essere uno dei più complessi esempi pratici di moto di sistema rigido.

La soluzione di questo problema è stata, finora, assai più arretrata e imperfetta di quella del problema balistico principale: e bene si esprime il Bianchi a questo proposito affermando che " il problema... è uno dei più difficili della balistica esterna, " e si è ben lungi dall'averlo risolto "; e già il Siacci osservava: " il moto di traslazione non è tutto il moto dei proietti: e gli " studi sulla rotazione, iniziati dal S. Robert, dal Mayewski e " dal De Sparre, debbono essere proseguiti ".

Esporrò qui una soluzione ispirata alla Teoria generale del Poinsot sulla rotazione dei corpi [1].

***

Nell'istante in cui il proietto esce dalla bocca da fuoco, il suo asse di figura coincide, a meno di cause perturbatrici acci-

---

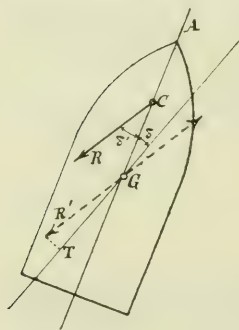
[1] Mi è grato esprimere i miei ringraziamenti al sig. Colonn. Canonica, il quale, nel corso degli studi per la trasformazione, da lui ideata, di un obice da 280, mi segnalò l'importanza della questione, e l'utilità pratica dell'eventuale sua soluzione.

dentali, con la tangente alla traiettoria del suo centro di gravità, determinando un piano verticale, detto *piano di tiro.* Nell'istante successivo, però, la traiettoria, in causa della gravità, è già curva, e perciò la tangente si è abbassata, mentre l'asse di figura, per effetto della rotazione impressagli dalla rigatura, tende a spostarsi parallelamente a se stesso e a fuoruscire dal piano di tiro, come si vedrà meglio in seguito. Tangente e asse di figura formano dunque subito un angolo $\mathfrak{d}$, determinando un piano diverso dal piano di tiro, detto *piano di resistenza*, sul quale giace la risultante delle forze provenienti dalla resistenza dell'aria: questa, tangenziale nel primo istante, e contenuta nel piano di tiro, diventa subito, per il divergere dell'asse di figura dalla tangente, *obliqua.*

Determinare la traiettoria del centro di gravità, al quale sono applicate le due forze: peso e resistenza dell'aria, ivi trasportata dal suo punto di applicazione, costituisce il problema fondamentale della balistica esterna. Nelle quattro ipotesi semplificative della resistenza tangenziale dell'aria, della terra piana ed immobile, della gravità costante in grandezza e in direzione, del mezzo in riposo e di densità uniforme, esso è chiamato *Problema balistico principale.*

Nei proietti oblunghi ordinari il punto di applicazione C della resistenza R dell'aria, detto *centro di resistenza*, è posto sull'asse di figura in avanti del centro di gravità G. La R, trasportata in G, dà luogo ad una forza $R' = R$, e ad una coppia $\mathfrak{M}$. La componente tangenziale GT della R' è la *forza ritardatrice*, considerata dal problema balistico principale. La $\mathfrak{M}$, che tende a far divergere vieppiù l'asse di figura dalla tangente, è la *coppia perturbatrice* agente nel moto del proietto relativo al centro di gravità.

Abbiamo

$$\mathfrak{M} = R \times GC \operatorname{sen} \mathfrak{d}_1 .$$

Poniamo $GC = l$, e $\mathfrak{d}_1 = \varphi(\mathfrak{d})$. Lo sviluppo in serie della φ dà, per $\mathfrak{d}$ molto piccolo (che, come vedremo, è la condizione essenziale cui deve soddisfare il proietto): $\mathfrak{d}_1 = k\mathfrak{d}$; donde

$\operatorname{sen} \delta_1 = \delta_1 = k\delta$. Inoltre, sempre nell'ipotesi di δ assai piccolo, si può sostituire alla R la sua componente tangenziale GT, la quale, se $cF(v)$ è l'accelerazione ad essa relativa, e m la massa del proietto, è data da $GT = mcF(v)$. Si ha pertanto

$$\mathfrak{M} = mcF(v)\, lk\delta.$$

In questa formola le quantità k e l sono determinate dalla Teoria della resistenza obliqua dell'aria, la quale è fatta nell'ipotesi di δ abbastanza piccolo; le altre, ad eccezione di δ, sono, o grandezze sperimentali, o funzioni degli elementi del proietto.

Perchè il proietto *cada di punta*, e perchè il suo moto non sia *perturbato* (perchè, cioè, possano valere le Tavole di Tiro) è essenziale che l'angolo δ *sia sempre molto piccolo.* Ciò costituisce la stabilità del proietto lungo la traiettoria: e il problema relativo può dunque enunciarsi così: *Determinare gli elementi della rigatura e del proietto per modo che la divergenza* δ *dell'asse di figura dalla tangente non superi, durante l'intero percorso, un valore assegnato assai piccolo.*

La risoluzione di questo problema dipende dunque dalla determinazione del moto del proietto relativo al centro di gravità.

*
* *

Nello studiare questo moto relativo al centro di gravità, riferiremo il proietto a 3 assi cartesiani ortogonali baricentrici, comunque orientati, e mobili con orientazione costante, e a 3 altri assi, rigidamente collegati al sistema, che sono i soliti assi principali centrali d'inerzia, di cui due giacciono, comunque orientati, essendo il proietto solido di rivoluzione, nel piano baricentrico perpendicolare all'asse di figura, e il 3° è lo stesso asse di figura.

L'azione della coppia perturbatrice sul proietto, dotato di forte velocità di rotazione propria, suscita la reazione giroscopica, la quale fa fuoruscire l'asse di figura dal piano di tiro, normalmente a quest'ultimo.

Il moto relativo al centro di gravità sarà noto quando si conosca il moto dell'asse di figura.

Le ipotesi semplificative che si possono fare con sufficiente approssimazione sono le due seguenti:

1° Supporre che la traiettoria del centro di gravità sia contenuta nel piano iniziale di tiro. È questa una delle quattro ipotesi semplificative su cui si fonda la risoluzione del problema balistico principale, ed equivale a trascurare la *derivazione*.

2° Supporre l'asse di figura coincidente con l'asse di rotazione istantanea, e quindi col momento della quantità di moto (in considerazione della piccolezza di ogni moto secondario rispetto alla rotazione propria del proietto impressagli dalla rigatura): e ciò equivale a trascurare, rispetto al moto di *precessione* (moto del momento della quantità di moto), il moto di *nutazione*, costituito dalle oscillazioni rapide, e di piccolissima ampiezza, dell'asse di figura intorno al momento della quantità di moto (usiamo qui i termini di precessione e nutazione col significato consueto che si dà loro nei trattati di balistica).

In tali ipotesi il moto dell'asse di figura GA viene ad essere quello del momento GM della quantità di moto. Ora, discende dal Principio del momento della quantità di moto che il moto di GM è retto dal seguente teorema: " *L'estremo* M *dell'asse* GM *si muove con velocità uguale al momento della coppia acceleratrice* ". Infatti, detta velocità è la derivata, rispetto al tempo, del momento della quantità di moto. D'altra parte, con lo stesso grado di grande approssimazione dato dalla 2ª ipotesi semplificativa sopraenunciata, possiamo affermare che: " *Il punto* M *si muove sopra una sfera di raggio* GM *costante, e uguale al momento iniziale* Cr *della quantità di moto* ". Infatti, il quadrato del momento della quantità di moto è dato, essendo il solido di rivoluzione, da: $GM^2 = B^2(p^2 + q^2) + C^2r^2$. Ora, dalla 3ª equazione di Eulero: $C\frac{dr}{dt} = N$, essendo qui $N = 0$, perchè la coppia acceleratrice è compiana al 3° asse del sistema legato al proietto, si ha: $Cr =$ costante. D'altronde, supporre, come si è fatto nella 2ª ipotesi, che i tre assi di figura, di rotazione istantanea e del momento della quantità di moto coincidano, equivale a considerare i moti acquisiti di velocità p e q trascurabili di fronte al moto di velocità r, impresso dalla rigatura. Si può dunque scrivere: $GM = Cr$.

Riassumendo, il punto M si muove sulla sfera di raggio

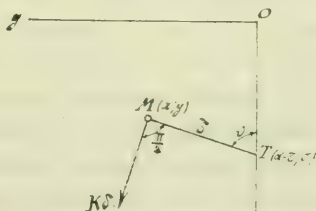
$GM = Cr$ con velocità angolare, comune a tutti i punti del sistema GM, ad ogni istante data da

$$\frac{\mathfrak{M}}{Cr} = \frac{mlkc\delta F(r)}{Cr} = K\delta .$$

Consideriamo ora la sfera di centro G e raggio 1, per la quale le velocità angolari coincidono numericamente con le lineari. Su questa sfera la tangente GT nel suo moto di abbassamento descrive un cerchio massimo, e l'asse di figura GM una curva che deve (se il proietto è stabile) mantenersi sempre a una distanza da quel cerchio massimo minore di una grandezza fissata e piccola. Il moto di M e T sulla sfera è dunque, per T con esattezza, per M con grande approssimazione, quello delle loro proiezioni da G sul cilindro tangente alla sfera lungo quel cerchio massimo: sviluppando il cilindro, il moto di M e T appare un moto piano.

Ci proponiamo il problema di *determinare la traiettoria di* M *sul piano sviluppo del cilindro suddetto*: con che, insieme col problema del moto relativo, verrà risolto quello della stabilità.

Assumiamo l'origine degli assi coordinati nel punto O di coincidenza iniziale di M con T, e come asse delle x assumiamo la traiettoria rettilinea di T. Le proprietà di M sopraenunciate dànno origine al seguente sistema di equazioni, nelle 4 incognite x, y, δ, ν:

$$\left\{ \begin{aligned} K\delta &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ \delta &= \sqrt{[x - (\alpha - \tau)]^2 + y^2} \\ y &= \delta \operatorname{sen} \nu \\ x' &= K\delta \operatorname{sen} \nu . \end{aligned} \right.$$

delle altre quantità, α è l'angolo di proiezione, cioè l'inclinazione, sull'orizzonte, della tangente all'origine della traiettoria, la quale è un dato del tiro; τ l'inclinazione della tangente alla traiettoria nel punto considerato, data ad ogni istante dal problema balistico principale; e K una quantità pure nota ad ogni istante, come già si disse.

Dalla 3ª e 4ª equazione abbiamo: $x' = Ky$, donde: $x'' = Ky' + K'y$; e per intervalli abbastanza piccoli, per i quali si possa considerare la quantità nota K costante nel suo valor medio: $x'' = Ky'$.

Dalla 2ª equazione: $\delta^2 = [(\alpha - \tau) - x]^2 + y^2$; donde: $K^2 \delta^2 = K^2 [\alpha - \tau) - x]^2 + x'^2$. Sostituendo nella 1ª equazione: $x'' = K^2 (\alpha - \tau) - K^2 x$. Questa è un'equazione differenziale del 2° ordine, della forma $f(x, x'') = 0$, la quale si risolve osservando che: $x'' = x' \frac{dx'}{dx}$. Si avrà:

$$\frac{x'^2}{2} = \int K^2 [(\alpha - \tau) - x]\, dx = K^2 \left[(\alpha - \tau)\, x - \frac{x^2}{2}\right] + C$$

(dove $C = 0$, perchè per $x = 0$ è $x' = Ky = 0$), ossia:

$$dt = \frac{dx}{K\sqrt{2(\alpha - \tau)\, x - x^2}}. \tag{1}$$

Integrando una seconda volta:

$$t = \frac{1}{K} \operatorname{arc\,sen} \frac{x - (\alpha - \tau)}{\alpha - \tau} + C$$

(dove $C = 0$, perchè per $t = 0$ è $x = 0$, $\alpha = \tau$), ossia:

$$x = (\alpha - \tau)\,(1 + \operatorname{sen} Kt). \tag{2}$$

Risolto così il problema che ci eravamo proposto, dallo svolgimento della soluzione si deduce anche il seguente

Teorema. — *Lo scostamento dell'asse di figura dalla tangente raggiunge un massimo quando il piano di resistenza diventa normale al piano di tiro.*

Ciò risulta dalla 1ª equazione del sistema, scritta sotto la forma: $K[(\alpha - \tau) - x] = y'$, la quale mostra che la derivata di y si annulla per $x = \alpha - \tau$.

Osservazione. — Nelle applicazioni numeriche converrà servirsi dell'equazione (1) anzichè della (2): anzitutto perchè occorre considerare intervalli abbastanza piccoli, nei quali K e τ possano considerarsi costanti nei loro valori medi; in secondo luogo perchè è comodo assumere come parametro indipendente,

anzichè il tempo t, l'inclinazione τ della tangente, legata a t dalla 2ª equazione fondamentale della balistica esterna:

$$dt = - v/g \frac{d\tau}{\cos\tau} .$$

Nel calcolo numerico si farà dunque uso:

Per la x dell'equazione (1) scritta sotto la forma:

$$\Delta x = K\sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2}\,\Delta t = -K\sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2}\,\frac{v}{g\cos\tau}\,\Delta\tau .$$

Per la y dell'equazione:

$$\Delta y = K[(\alpha - \tau) - x]\,\Delta t = -K[(\alpha - \tau) - x]\,\frac{v}{g\cos\tau}\,\Delta\tau .$$

Per la δ dell'equazione:

$$\delta = \sqrt{[x - (\alpha - \tau)]^2 + y^2} .$$

CONCLUSIONE

L'utilità pratica di questa soluzione sembra evidente. Essa permette, infatti, di determinare *a priori* il comportamento del proietto in ogni punto della traiettoria. Basterà, per ogni bocca da fuoco in progetto, o in verifica, tracciare la curva luogo di M nelle condizioni più sfavorevoli alla stabilità (tiro della massima elevazione, ecc.), e verificare se δ si mantiene inferiore al limite stabilito (p. es. 7°, come propone il Vallier, e, ritengo, anche più). Sarebbe così possibile determinare l'inclinazione finale delle righe, non più in modo *empirico*, mediante confronto con bocche da fuoco esistenti, ma rigoroso. In tutti i casi, poi, in cui il metodo empirico di confronto è inapplicabile, vale a dire nello studio di tipi nuovi di proietti e di bocche da fuoco, il procedimento per tentativi comporta un lungo e dispendioso periodo di allestimento di materiali di prova, con relativi esperimenti di tiro, che questo metodo permetterebbe di evitare, o quanto meno ridurre al minimo. Così pure, esso potrebbe utilmente applicarsi nelle questioni in cui, da un cambiamento di

lunghezza, o forma, di proietti esistenti, si teme possa risultare compromessa la stabilità, e in ogni altro caso di comportamento anòmalo di proietti esistenti per particolari condizioni di tiro.

Applicazione.

Facciamo l'applicazione del metodo suesposto alla verifica delle condizioni di stabilità del proietto del nostro *mortaio da 210*, nella condizione del *tiro della massima elevazione.*

La rigatura del mortaio è progressiva, con 36 righe, con passo iniziale di 56 calibri, finale di 20; il proietto considerato è la granata di acciaio a bocchino anteriore, del peso di kg. 101. La massima elevazione α consentita dall'affusto è di 60°: noi consideriamo questa elevazione, e una velocità iniziale $v_1 = 263$ m/sec.

Esprimeremo le varie grandezze in chilogrammi, metri, secondi.

I. — Calcolo delle x.

Applichiamo l'equazione:

$$\Delta x = - K \sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2}\,\frac{v}{g\cos\tau}\,\Delta\tau =$$

$$= \frac{mlkcF(v)}{Cr}\sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2}\,\frac{v}{g\cos\tau}\,(-\Delta\tau) =$$

$$= A\,\frac{vF(v)\sqrt{2(\alpha - \tau)x - x^2}}{\cos\tau}\,(-\Delta\tau),$$

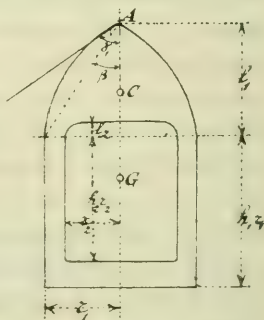
dove il segno — sta ad indicare che le variazioni $\Delta\tau$ sono negative, e le corrispondenti Δx positive.

Calcolo della costante $A = \dfrac{mlkc}{gCr}$. — Si ha:

m (massa del proietto) $= 10,3$;

$$l = GA - AC = GA - \frac{l_1}{2\cos^2\frac{1}{2}(\beta + \gamma_1)} =$$

$$= 0,2334;$$

$k = \dfrac{\delta_1}{\delta} = \dfrac{n}{2}\cot^2\dfrac{1}{2}(\beta + \gamma_1)$, dove n è l'esponente della v nella espressione della resistenza dell'aria scritta sotto la forma

$F(v) = B_n v^n$. Valendo per la velocità considerata (e in genere per quelle realizzate nei mortai) la legge newtoniana, si ha $n = 2$: donde $K = 2{,}0909$;

c: *coefficiente balistico del proietto*, che figura nell'espressione dell'accelerazione dovuta alla resistenza dell'aria: $I = cF(v)$. Si ha: $c = i\Delta \frac{a^2}{p}$, dove: i (indice caratteristico, o coefficiente di forma) è per proietti oblunghi in 1ª approssimazione uguale a sen γ_1; Δ è il peso del m^3 d'aria a 15° e 756 $^m/_m$ di colonna di mercurio; a è il diametro del proietto, p il suo peso. Si ricava $c = 0{,}000373$;

$g = 9{,}81$;

C: momento d'inerzia del proietto rispetto all'asse di figura, è dato dalla formola: $C = \pi d_1 r_1^5 [h_1 + \psi(\gamma_1)] - \pi(d_1 - d_2) r_2^5 [h_2 + \psi(\gamma_2)]$, dove $\psi(\gamma)$ è dato da apposite tabelle [1], d_1 è la densità dell'acciaio, d_2 quella della carica interna. Si ha $C = 0{,}12887$;

r: velocità angolare di rotazione del proietto, impressagli dalla rigatura, è data dalla formola: $r = 2\pi \frac{v_0}{h}$, dove h è il passo finale della rigatura. Si ha $r = 394$.

Risulta:

$$A = 0{,}00000376.$$

Calcolo delle quantità v_m e $F(v_m)$. — Si ha: $F(v) = f(v)v^2$, dove la $f(v)$ si ricava, sotto forma di coefficiente numerico, dalla sua curva sperimentale.

La v in un punto qualunque della traiettoria è data dalla $v = \frac{u}{\cos\tau}$. La teoria del *tiro curvo a piccola velocità* (che costituisce una delle soluzioni del problema balistico principale) fornisce la seguente equazione:

$$u = u_0 \left[1 - \frac{c}{g} \left\{ \xi(\alpha) - \xi(\tau) \right\} \right],$$

dove u_0 è la componente orizzontale della velocità iniziale, e della funzione: $\xi(\tau) = \int_0^\tau F\left(\frac{u_0}{\cos\tau}\right) \frac{d\tau}{\cos\tau}$, esistono tabelle. Nel nostro

[1] V. CHARBONNIER, *Balistique extérieure*, pag. 402.

caso: $u_0 = v_0 \cos\alpha = 131{,}5$, e l'espressione: $1 - \frac{c}{g} \} \xi(\alpha) - \xi(\tau) \{$ vale:

Per $\tau = 50°$: 0,99996.
„ $\tau = 0°$: 0,99991.
„ $\tau = -50°$: 0,9998.

Cioè la u si mantiene praticamente costante nel valore $u_0 = 131{,}5$. La v_m si potrà dunque ricavare dalla formola: $v_m = \frac{u_0}{\cos\tau_m}$.

Passiamo ora al calcolo dei successivi Δx.

1°. Per $\tau = \alpha = 60°$, si ha $x = 0$.

2°. Per $\tau = 58°$, si ha $\alpha - \tau_1 = \Delta_1 \tau = 2° = 0{,}0349$ m.: il valor medio v_{1m} corrispondente a questo intervallo è $\frac{u_0}{\cos 59°}$, cioè 255,2.

Assumendo per x_{1m} il valore di tentativo: $x'_{1m} = 0{,}001$, si ha $\Delta'_1 x = 0{,}0034$. Un valore più approssimato di x_{1m} sarà dunque: $x''_m = 0{,}0017$, per cui: $\Delta''_1 x = 0{,}0045$.

Per $x'''_{1m} = 0{,}00225$, si ha: $\Delta_1''' x = 0{,}0051$.

Per $x_{1m} = 0{,}00255$, si ha finalmente: $\Delta_1 x = \mathit{0{,}0054}$; $x_1 = \mathit{0{,}0054}$.

Le successive approssimazioni dànno variazioni trascurabili.

3°. Per $\tau_2 = 54°$, si ha $\Delta_2 \tau = 0{,}0698$; $\alpha - \tau_2 = 0{,}1047$; $v_{2m} = 235{,}15$.

Per $x'_{2m} = x_1 = 0{,}0054$, si ha $\Delta'_2 x = 0{,}0218$.
„ $x''_{2m} = x_1 + \frac{\Delta'_2 x}{2} = 0{,}0163$, „ $\Delta''_2 x = 0{,}0355$.
„ $x_{2m} = 0{,}0231$, „ $\Delta_2 x = 0{,}0411$;

donde $x_2 = \mathit{0{,}0465}$.

4°. Per $\tau_3 = 48°$, si ha $\Delta_3 \tau = 0{,}1047$; $\alpha - \tau_3 = 0{,}2094$; $v_{3m} = 209$.

Per $x'_{3m} = 0{,}0465$, si ha $\Delta'_3 x = 0{,}0764$.
„ $x''_{3m} = 0{,}0847$, „ $\Delta''_3 x = 0{,}0955$.
„ $x_{3m} = 0{,}0942$, „ $\Delta_3 x = 0{,}0987$;

donde $x_3 = 0{,}1452$.

Si è così proceduto, per variazioni di τ di 6° in 6°; col crescere dell'ascissa x, si può ben presto limitare a 2 sole il numero delle approssimazioni nel calcolo dei successivi Δx: si può, cioè, assumere, senza errore sensibile: $x_{im} = x_{(i-1)m} + \frac{\Delta'_i x}{2}$.
Risulta la seguente Tabella, nella quale occorre tener presente che le quantità α — τ dànno le successive posizioni della tangente corrispondenti alle ascisse delle successive posizioni di M.

τ°	α — τ metri	x metri
60°	0	0
58	0,0349	0,0054
54	0,1047	0,0465
48	0,2094	0,1452
42	0,3141	0,2535
36	0,4188	0,3642
30	0,5235	0,5052
24	0,6282	0,6093
18	0,7329	0,7115
12	0,8376	0,8156
6	0,9423	0,9245
0	1,0470	1,0403

τ	α — τ	x
— 6°	1,1517	1,1680
— 12	1,2564	1,3142
— 18	1,3611	1,4870
— 24	1,4658	1,6987
— 30	1,5705	1,9652
— 36	1,6752	2,3132
— 42	1,7799	2,7767
— 48	1,8846	3,3377
— 54	1,9893	3,7539
— 60	2,0940	4,0885

II. — Calcolo delle y.

Si è applicata l'equazione:

$$\Delta y = K[(\alpha - \tau)x - x^2] \frac{v}{g \cos\tau}(-\Delta\tau) = A \frac{vF(v)[(\alpha-\tau)-x]}{\cos\tau}(-\Delta\tau).$$

Risulta la seguente Tabella:

τ^0	y metri
60°	0
58	0,001
54	0,0336
48	0,0755
42	0,1022
36	0,1198
30	0,1280
24	0,1314
18	0,1345
12	0,1373
6	0,1397
0	0,1412

τ	y
— 6°	0,1406
— 12	0,1361
— 18	0,1239
— 24	0,0969
— 30	0,0404
— 36	— 0,0767
— 42	— 0,3272
— 48	— 0,8532
— 54	— 1,9542
— 60	— 4,1842

III. — Calcolo delle δ.

τ^0	δ^0
60°	0
58	1,69
54	3,85
48	5,68
42	6,82
36	7,56
30	7,39
24	7,63

τ^0	δ^0
18°	7,80
12	7,96
6	8,09
0	8,10
— 6	8,12
— 12	8,49
— 18	10,13
— 24	14,43

τ^0	δ^0
— 30°	22,75
— 36	36,93
— 42	60
— 48	96,50
— 54	151
— 60	265

Osservazioni.

1° I valori di x, y, δ dati nelle precedenti tabelle in corrispondenza degli ultimi valori negativi di τ, a partire da $\tau = -42°$, non vanno più considerati *quantitativamente* (non essendo più, in tal caso, attendibili, dato che il metodo vale nell'ipotesi che lo scostamento asse di figura-tangente si mantenga piccolo) ma qualitativamente, a significare il rovesciamento del proietto che avviene in questo ultimo tratto del ramo discendente della traiettoria. Vale a dire che l'elevazione di 60° può servire per colpire un bersaglio molto elevato sull'orizzonte del pezzo, cioè a forte angolo di sito, cioè tale che ivi la tangente alla traiettoria abbia inclinazione positiva, o di poco negativa; mentre non darebbe risultati utili, dal punto di vista della stabilità del proietto, cioè dell'efficacia del tiro, per colpire un bersaglio a piccolo angolo di sito, per il quale una così forte elevazione fosse resa necessaria dalla presenza di un elevato ostacolo interposto fra il pezzo e il bersaglio. Ciò è, del resto, implicitamente ammesso dalle tavole di tiro, le quali non considerano elevazioni superiori a 41°, $\frac{4}{20}$, cioè non contemplano il tiro nel settore superiore col mortaio da 210, altro che per forti angoli di sito.

D'altra parte bisogna osservare che questo caso estremo del tiro della massima elevazione non è stato scelto che per verificare le condizioni di stabilità del proietto nelle condizioni più sfavorevoli: e sotto questo punto di vista il risultato della verifica è soddisfacente, mantenendosi il proietto stabile, anche in questo caso estremo, per tutto il ramo ascendente, e per buona parte del discendente.

3° Risulta dal grafico annesso che l'angolo ν formato dal piano di resistenza col piano di tiro si mantiene, per un lungo arco della traiettoria, prossimo al valore $\frac{\pi}{2}$: il che è d'accordo con le idee espresse a questo proposito dal Mayevski e dal De Sparre.

3° Risulta pure che l'asse di figura si mantiene, durante la maggior parte del percorso, indietro, rispetto alla tangente:

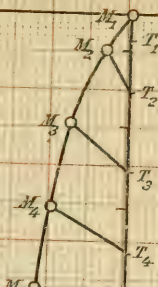
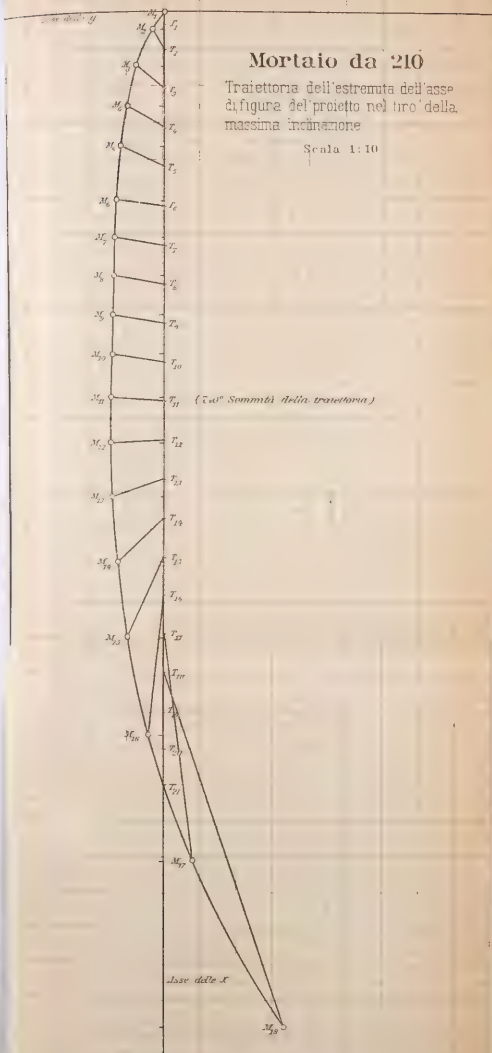
il che è in contrasto con l'opinione del Vallier, che l'asse di figura passi subito al disotto della tangente.

4° Le ultime cifre decimali nei valori di x e y, non sono probabilmente rigorose, perchè non tutte le grandezze che figurano nelle formole sono note con esattezza fino alle cifre decimali corrispondenti alle quattro date per x e y.

5° Questo metodo è suscettibile di dare risultati tanto più rigorosi quanto maggiore sarà l'esattezza raggiunta dalla Teoria della resistenza obliqua dell'aria.

6° Il metodo sussiste identicamente quando, per effetto di cause accidentali, si supponga una divergenza iniziale δ_0 tra l'asse di figura e la tangente.

Torino, 4 aprile 1917.

BURZIO F. – Una soluzione del problema della stabilità dei proietti.

Mortaio da 210
Traiettoria dell'estremità dell'asse di figura del proietto nel tiro della massima inclinazione
Scala 1:10
Asse delle y
Asse delle x
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
M_6
M_7
M_8
M_9
M_{10}
M_{11}
M_{12}
M_{13}
M_{14}
M_{15}
M_{16}
M_{17}
M_{18}
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
T_6
T_7
T_8
T_9
T_{10}
T_{11}
T_{12}
T_{13}
T_{14}
T_{15}
T_{16}
T_{17}
T_{18}
T_{19}
T_{20}
T_{21}
Sommità della traiettoria

Note litologiche e mineralogiche sui dintorni di Avigliana

dell'Ing. Dott. GABRIELE LINCIO.

La regione di Avigliana fa parte della zona delle rocce verdi e delle serpentine, che venne illustrata dagli ingegneri delle miniere E. Mattirolo, V. Novarese, S. Franchi ed A. Stella (1890-1910) coi magistrali rilievi geologici segnati sulla carta al 100.000, foglio di Susa.

Riguardo alla bibliografia delle rocce verdi, delle quali avremo a trattare in seguito, per evitare ripetizioni inutili, rinvio il lettore alle note pubblicazioni fondamentali di S. Franchi, di V. Novarese (di cui trattano T. Taramelli e C. F. Parona (1)) ed alle più recenti di E. Manasse e di F. Millosevich. Quest'ultimo Autore (2) ci dà tutte le indicazioni bibliografiche fino al corrente anno.

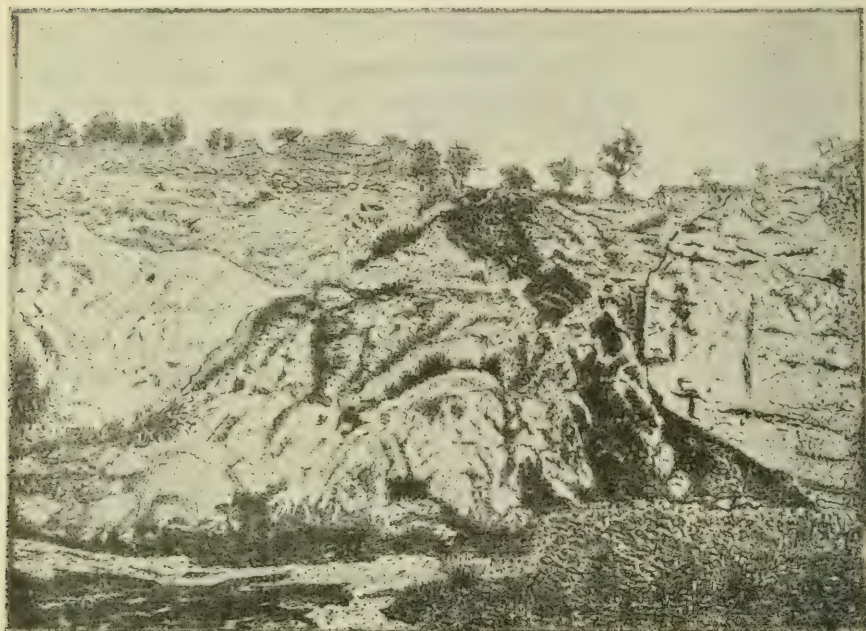
La carta geologica segna nelle vicinanze di Avigliana, ad est del Dinamitificio, alcune masse di serpentine, di serpentino-scisti e di prasiniti-anfiboliti, emergenti dal terreno morenico. La loro identità con le masse più estese delle rocce giacenti ad ovest del Dinamitificio, nel triangolo Bussone-S. Michele-S. Ambrogio, ed a nord dello stesso opificio sulla linea Torre del Colle-Villar Dora, ed infine con quelle situate a sud-est presso Trana, al monte Pietraborga, risulta evidente per la loro apparenza e posizione ed è provata dai rilievi fatti.

Visitando io tempo fa le cave di pietre presso Avigliana, ne' pressi della stazione ferroviaria, vi rintracciai una tipica

---

(1) T. Taramelli e C. F. Parona, *Sull'età da assegnare alla zona delle pietre verdi nella carta geologica delle Alpi occidentali.* Relazione al R. Com. Geologico, Roma, 1911.

(2) Federico Millosevich, *Studi litologici sull'isola del Giglio.* I, *Le rocce verdi.* " Atti della R. Acc. dei Lincei ", vol. XXV, 1916.

linea di contatto tra le masse serpentinose e quelle prasinitiche, che insieme si ergono dal piano. Raccolsi rocce e minerali interessanti per il loro modo di giacitura e d'associazione e li feci oggetto del presente studio. Ora mi sia permesso di riferire qui brevemente i risultati ottenuti. A questi unisco pure uno schizzo della configurazione della cava più vicina alla stazione ferroviaria, presentando essa le migliori sezioni. Alle parti laterali vi si vedono le sezioni delle rocce prasinitiche, che vengono

cavate ad usi edilizi, mentre al centro della figura si mostra scoperto, a mo' di contrafforte, il dosso rugoso e tondeggiante della massa serpentinosa, che dai cavatori viene lasciata indietro perchè inusabile.

Durante la nostra esposizione tratteremo prima della natura delle due rocce confinanti, del modo con cui esse si presentano alla faccia del loro contatto, poi dei minerali che vi si formarono, ed infine faremo seguire alcune osservazioni d'indole genetica.

Serpentine.

Appartengono a questo gruppo nuclei di rocce più o meno compatte, fino a tipicamente scistose ed antigoritiche. Esse hanno un color verde grigiastro, sono solcate da venuzze di talco, ed in prossimità delle prasiniti sono molto ricche di cristalletti di magnetite in ottaedri perfetti. Gli scisti serpentinosi si presentano fortemente contorti, arricciati e con frequenti facce lucenti dovute a pressioni con scorrimento.

Le serpentine studiate in sezioni sottili al microscopio mostrano una variabilità di struttura abbastanza grande. Alcune presentano fibre lunghe e parallele tra loro, la cui direzione d'allungamento corrisponde a quella di minima elasticità ottica; altre invece presentano fibre molto fine con birifrazione che non è più quella delle prime, ma diventa quasi nulla. Non mancano poi begli esempi di impalcatura ortogonale, dovuta a fascetti di fibre leggermente divergenti e disposti l'uno ad angolo retto sull'altro. A nicols incrociati e nelle posizioni di massima illuminazione l'impalcatura è visibile con bel risalto a colori di polarizzazione bassi.

In altri casi notai a nicols incrociati delle plaghe, ove fasci di fibre parallele di color rosso erano disposti parallelamente ad altri di color giallo, in modo però sfumato, senza confini ben distinti, e poi sfrangiati alle estremità. L'aspetto di tali plaghe rimane quello del serpentino ed anche qui la direzione delle fibre si mostra direzione di minima elasticità ottica, ma dall'assieme si potrebbe intravvedere la struttura del diallagio, che si sarebbe trasformato nel serpentino.

Prasiniti.

Si tratta qui di rocce più o meno afanitiche di color verde cenerino scuro e d'altre simili ma più chiare, che mostrano fine lenticole e macchiette bianche. Le varietà di rocce chiare presentano una spiccata tendenza a scistosità ed a divisibilità in grossi banchi.

Abbondanti filetti e granuli di pirite sono sparsi nella massa delle rocce.

Attorno alla pirite si osserva un arricchimento d'anfibolo verde, minerale che raggiunge la grossezza di aghetti minuti.

Specialmente nelle varietà di rocce più scure, si notano cristalletti di pirite della grandezza fino ad un millimetro di lato, abbastanza bene delimitati dal cubo solo o dal cubo modificato da pentagono dodecaedro. Vi si trovano pure ottaedri di magnetite, ma sono rari e minutissimi.

In tutte queste rocce non si riscontrano apprezzabili vani, esse sono sempre molto compatte e tenacissime.

Studiate in sezioni sottili al microscopio esse mostrano in generale la struttura a mosaico delle prasiniti, tipiche anche per la presenza dell'anfibolo e del feldspato in quantità pressochè uguali. La struttura passa talora a porfiroidica.

Insieme coi due componenti principali, *Anfibolo* e *Feldspato*, si notano anzitutto la *Clorite*, che è il componente che dopo di essi si presenta in quantità massima e poi quantità gradualmente minori di *Epidoto*, di *Zoisite*, di *Titanite*, d'un carbonato (calcite?), per giungere infine all'*Apatite*, il componente in quantità minime.

Anfibolo.

Raggiunge in alcuni casi, come dicemmo, dimensioni di aghetti minuti.

Osservato al microscopio in sezioni sottili, mostra un pleocroismo non molto forte col seguente assorbimento:

$\alpha =$ giallo chiaro fino ad incoloro
$\beta =$ verde gialliccio
$\gamma =$ verde bluastro.

L'intensità di assorbimento è:

$$\gamma > \beta > \alpha.$$

L'angolo formato dalle direzioni $\overset{|}{c}$ e γ è in media

$$\measuredangle\ \overset{|}{c} : \gamma = 18^{\circ}.$$

In base a tali determinazioni noi possiamo ritenere che il nostro anfibolo è un ornblenda con assorbimento del tipo di quello dell'ornblenda di St. Colombin (1) e di Beverley (2).

Nella massa della roccia l'anfibolo è distribuito e disposto irregolarmente e raggiunge talora una grande finezza di fibre.

Feldspati.

L'esame delle sezioni sottili delle prasiniti mi permise di stabilire la presenza di due tipi di feldspati acidi prevalenti e di un terzo più basico e meno abbondante.

In alcuni punti le prasiniti presentano solo albite o albite in prevalenza: in altri punti questa cede il posto ad albite oligoclasica.

Una certa quantità di andesina è pure sparsa nella roccia.

Il feldspato è raramente idiomorfo con le facce M, P, T, l = (010), (001), $(1\bar{1}0)$, (110).

Riferisco qui brevemente i risultati delle misure ottiche che mi permisero la determinazione dei tre tipi di feldspati suaccennati: *Albite*, *Albite oligoclasica*, *Andesina*.

Albite. — Lamine isolate di sfaldatura del feldspato vennero paragonate col balsamo di Canadà ($n = 1,537$) della preparazione. Si giunse così alla determinazione per approssimazione:

Lamine parallele a P (001)

$$\alpha' < 1,537; \qquad \gamma' = 1,537.$$

Lamine parallele ad M (010)

$$\alpha' < 1,537; \qquad \gamma' < 1,537.$$

Cioè:

$$\alpha < 1,537 > \beta < \gamma.$$

---

(1) A. Lacroix, *Min. de la France*, etc., I, 1893, pag. 665.

(2) Wright, citato in Rosenbusch, *Mikro. Phys.*, Bd. I, *Mineralien*, VI Aufl., 1905, pag. 234.

A tale schema si adatta bene il tipo d'Albite d'Amelia:

$$\alpha = 1{,}528\ ; \qquad \beta = 1{,}532\ ; \qquad \gamma = 1{,}539\,,$$

riferibile alla miscela $Ab_{95}\ An_5$.

Sezioni sottili dello stesso feldspato, normali a tutt'e due le facce P (001) ed M (010), ci diedero un'estinzione media, rispetto alla traccia della faccia M, pari a [— 14°].

Da tale valore si ottiene il termine di miscela

$$(Ab_{97}\ An_3) = \text{tipica albite.}$$

In generale le lamelle di geminazione di questo feldspato sono sottili e rare.

Albite oliglasica. — Come tale venne riconosciuto un altro feldspato acido in base alle seguenti determinazioni:

Confrontandolo col Collolite (n_{Na} 18° $C = 1{,}5354$), che servì alla preparazione delle sezioni sottili delle prasiniti, si ebbe per alcune lamine:

$$\alpha' = 1{,}5354\ ; \qquad \gamma'\ \text{deb. (1)} > 1{,}5354\,,$$

per altre

$$\alpha'\ \text{deb.} > 1{,}5354\ ; \qquad \gamma'\ \text{decis. (2)} > 1{,}5354$$

quindi:

$$\alpha\ \text{deb.} < 1{,}5354\ ; \qquad \beta\ \text{deb.} > 1{,}5354\ ; \qquad \gamma\ \text{decis.} > 1{,}5354\,.$$

A tale schema si adatta abbastanza bene il tipo

$$\alpha = 1{,}533\ ; \qquad \beta = 1{,}537\ ; \qquad \gamma = 1{,}542\,,$$

che corrisponde alla miscela $Ab_{87}\ An_{13}$ = *Albite oligoclasica.*

Con questa determinazione approssimativa si accorda abbastanza bene la seguente, ottenuta mediante misura delle estinzioni su sezioni sottili, normali tanto ad M quanto a P. L'estin-

(1) deb. = abbreviazione di debolmente

(2) decis. = abbreviazione di decisamente.

zione media rispetto alla traccia di M è di (-9°) e come tale si riferisce ad una miscela di ca. $Ab_{89}\ An_{11}$.

Nelle sezioni qui studiate notai una buona sfaldatura e lamelle rare di geminazione parallele ad M e poi un'ottima sfaldatura parallela a P.

Andesina. — Il feldspato più basico, paragonato col Collolite ($n = 1,5354$), mostra indici di rifrazione tutti maggiori di tale valore.

Sezioni normali ad M o della zona simmetrica ci diedero una media in massimo di $(+19^\circ)$, che ci conduce ad una miscela $Ab_{63}\ An_{37}$, cioè ad una *andesina.*

Va notato che parecchie sezioni della zona simmetrica con indici tutti $> 1,5354$ e coi colori di polarizzazione più alti, sezioni cioè con indici di rifrazione verisimilmente non molto discosti da γ e da α e quindi con posizione vicina a quella della base P, ci diedero in media una estinzione oscillante sui (-4°), mentre l'estinzione media teorica sulla base P rispetto alla traccia di M è circa (-3°) per le andesine.

Dette sezioni, per quanto di posizione approssimativa, m'avevano già permesso di ritenere che il feldspato in questione fosse un'andesina.

Buone sezioni dello stesso feldspato, normali contemporaneamente a P ed M, ci diedero valori di $+15^\circ$ fino a $+16^\circ$ rispetto alla traccia di M.

Nel primo caso si tratterebbe di una miscela $Ab_{67}\ An_{33}$, nel secondo caso $Ab_{66}\ An_{34}$.

La media di queste tre determinazioni ci porterebbe ad una miscela $Ab_{65}\ An_{35}$ = *Andesina.*

Epidoto e Zoisite.

L'Epidoto contribuisce in rilevante quantità alla costituzione delle prasiniti. Si nota in cristalli ed in granuli incolori. Le sezioni dei cristalli lasciano scorgere le tracce delle facce M (001), $T = (100)$, $r = (\bar{1}01)$.

Data la grande sottigliezza delle sezioni, si nota una forte e diffusa sfaldatura secondo la base, favorita appunto da cause meccaniche di preparazione.

Su sezioni coi colori di polarizzazione più vivi, cioè su sezioni vicine a (010), si nota l'angolo di estinzione tipico oscillante intorno ai 27°-28° rispetto alla traccia di sfaldatura basale.

La *Zoisite* è pure presente in certe quantità ed in forma tipica.

Clorite, Titanite, Calcite, Apatite.

Questi minerali non presentano nulla di speciale.

La *Clorite*, insieme con l'anfibolo, si rinserra attorno al feldspato. Essa si presenta in forma di mazzetti di lamelle o in gruppetti disposti a ventaglio; ha colore verde gialliccio, con leggero pleocroismo ed estinzione ondulata.

La *Titanite* è pure abbondante in granuli irregolari ed in cristalli. Compare in sezioni a losanga, delimitate da n $(\bar{1}23)$ con $\measuredangle n : n =$ ca. 136°.

La *Calcite* è piuttosto scarsa, ma frequente.

L'*Apatite* è presente e vicina alla Titanite in piccoli granuli incolori, trasparenti ed in sezioni arrotondate esagonali.

La struttura delle nostre prasiniti è, come dicemmo, quella tipica a mosaico.

L'associazione e l'assetto dei minerali componenti ed accessori della roccia si può riassumere nel modo seguente:

Attorno al feldspato si stringono confusi insieme granuli e cristalli idiomorfi di epidoto, gruppi di lamine di clorite, aghetti e fibre di anfibolo.

Detti minerali compenetrano anche il feldspato, che del resto è trasparente.

In mezzo a plaghe più ampie di epidoto e di clorite si trova di preferenza sparsa la Titanite, che però si riscontra anche da sola sparsa nella massa del feldspato. Noduli e filetti di calcite, la quale si direbbe l'arrivata dell'ultima ora, qua e là paiono legare tra loro plaghe di clorite, di epidoto e di anfibolo, senza però includere isolatamente nell'interno della loro massa questi minerali.

Talco con Magnetite e Brucite.

Presso la linea di contatto delle prasiniti con le serpentine si nota qualche concentramento di piccole lenti, di nidi e di vene di talco.

Questo minerale si presenta con qualche raro foglietto e con masserelle confuse di clorite e rinserra grande quantità di ottaedri nitidi e completi di magnetite, le cui dimensioni vanno da poco più di un mm. fino a quelle di polvere grossolana. Tra i cristalli di magnetite trovai alcuni geminati secondo la legge dello spinello.

La pirite è pure presente nel talco, ma solo in piccola quantità, non è regolarmente delimitata da facce cristallografiche, ma ha assunto la forma di granuli tondeggianti e di gocce.

Nel talco si osservano inoltre chiazze di un minerale sfaldabile, lamellare, incoloro, allotriomorfo, con caratteri individuali poco marcati.

Siccome del talco stesso si possono avere sezioni che sono quasi isotrope (quelle cioè in cui giacciono le due direzioni β e γ, per le quali $\gamma - \beta$ è quasi $= 0$), così queste sezioni si possono a prima vista confondere con le frequenti sezioni isotrope del minerale in questione. Osservando però a luce convergente si riscontra subito che le prime (del talco) sono biassiche, le seconde uniassiche con una croce scura abbastanza ben marcata, senza colori attorno e che in alcuni casi si apre alquanto mostrando i rami dell'iperbole. I colori di polarizzazione di detto minerale sono più bassi di quelli del talco, in ogni caso però il suo indice di rifrazione è maggiore di 1,5354, cioè dell'indice di rifrazione del Collolite che servì alla preparazione, pel quale n_{Na} . 18° C. = 1,5354.

Confrontato col talco il minerale mostra indici di rifrazione in alcune sezioni quasi eguali, in altre maggiori.

Tanto del talco che del minerale da determinare si osservano sovente sezioni normali alle lamine di sfaldatura ed in questo caso pel talco si ha normalmente alle lamine la direzione di grande elasticità ottica, quindi α, mentre per l'altro minerale normalmente alle lamine di sfaldatura si ha la direzione di piccola elasticità.

Il minerale si mostra in noduli e grani angolosi disposti qua e là nel talco ed in generale si tratta di piccoli ammassi di scagliettine differentemente orientate.

Laminette di sfaldatura sono pure tra Nicols incrociati quasi assolutamente isotrope e mostrano la croce scura a luce convergente. Scaldate diventano bianche opache, e si disidratano.

Da tutte queste osservazioni io ritengo che il minerale sia brucite, per la quale la direzione di piccola elasticità normale al piano di sfaldatura, è $\epsilon = 1{,}58$, mentre quella parallela al piano di sfaldatura è $\omega = 1{,}56$, ciò che ci indica anche il carattere della birifrazione $\epsilon - \omega = +$.

Prove chimiche, data la piccolezza delle laminette e la difficile separazione dal talco commisto, non vennero nemmeno tentate.

Osservazioni sulle rocce e minerali della zona al contatto delle prasiniti con le serpentine.

Dalla parte destra del dosso serpentinoso (vedi la figura unita alla presente Memoria) e ancora in posto a contatto diretto con le serpentine trovai avanzi d'una roccia d'aspetto delle prasiniti, ma molto più tenera e già con la lente riconoscibile come costituita prevalentemente d'anfibolo.

Sezioni sottili di essa mostrano come elementi predominanti l'anfibolo ornblendico e la clorite. In alcuni punti questa è anzi più abbondante di quello. Poi si ha quantità rilevante di titanite talora idiomorfa e vicina ad essa poca apatite. Il feldspato delle prasiniti è qui raro e saltuario. Si nota poi gran copia di pirite sparsa nella massa e che si presenta in un modo speciale.

Anzitutto risaltano all'occhio noccioli di pirite d'una certa grandezza, cioè fino ad un massimo di ca. 2 cent. di diametro. La loro forma è irregolare e ricorda quella delle pepiti; le facce però non sono liscie, ma bensì ricoperte di impronte lasciatevi dall'anfibolo circostante. Vi si nota qualche tendenza alla formazione di facce cristallografiche, le quali però, se compaiono, sono molto rudimentali e curve; e rappresentano casi isolati e discutibili d'una faccia sola d'orientazione ignota.

Maggior luce ci portano i nuclei minori e minimi di pirite. Questi possono assumere forme cristallografiche di cubi un poco tondeggianti agli spigoli, ma ben definiti. Non ne trovai esemplari che superassero i 4 mm. di lato. Al disotto di tale misura se ne trovano molti, ma, come sono frequenti i piccoli cristalli, così sono pure frequenti piccoli nuclei lentiformi, tondeggianti, senza facce cristallografiche.

A tutta prima osservando tali solidi pepitiformi si sarebbe indotti a considerarli quali cristalli, dotati originalmente di forme esterne sviluppate e solo in seguito ridotti allo stato attuale per avvenuto riassorbimento. Se non che si nota che: *a)* la roccia attorno alla pirite non mostra traccia di modificazione ascrivibile al presunto riassorbimento; *b)* le superfici di detti solidi pepitiformi, invece di essere liscie o ricoperte di figure di corrosione, mostrano impressa la trama della massa dell'anfibolo circostante; *c)* se si ritenesse come dovuta a riassorbimento la forma irregolare delle pepiti maggiori, questa forma dovrebbe rivelarci una corrosione profonda ed irregolare di cristalli cubici originarî, ciò che non può essere, e poi come si potrebbe spiegare la coesistenza dei minuti cristalli cubici non corrosi e dei piccolissimi solidi irregolari discoidali o tondeggianti, contenuti insieme anche nello spazio ristretto d'un piccolo campione di roccia? È ovvio che sotto l'azione d'un solvente o corrodente i piccoli cristalli sarebbero del tutto scomparsi prima dei grossi, che invece avrebbero subìte solo parziali modificazioni nella forma e nella grandezza.

Mi pare quindi che sia lecito inferire che i maggiori solidi pepitiformi di pirite, qui studiati, rappresentino cristalli ostacolati, e ciò specialmente per le ragioni addotte in *b)*.

In un prossimo lavoro spero di portarne le prove.

Data la costituzione variabile della roccia e la scistosità che essa presenta, a seconda cioè dell'ambiente minerale includente, clorite o anfibolo, e del modo con cui la pirite potè disporsi con le facce fondamentali e di minimo accrescimento, nel nostro caso il cubo, si avverò che i cristalli si poterono o liberamente sviluppare in cubi o solo in discoidi o lenticole. Ammettendo per le prasiniti uno stato di fusione o rammollimento sotto l'azione di vapor d'acqua od in generale di gas all'epoca della loro formazione, noi possiamo pure ammettere che la pirite, accentratasi nella zona di contatto, abbia subìto l'azione di contrazione dei silicati includenti, che andavano solidificandosi. Come vedemmo, in condizioni favorevoli, piccoli nuclei di pirite ebbero tempo e modo di svilupparsi in forma di cubetti, altri pure piccoli non vi riuscirono; i grossi nuclei invece in ogni caso non ebbero tempo a svilupparsi con forme cristallografiche e vennero plasmati dalla contrazione ed arricciatura della roccia includente mentre passava allo stato solido.

Altrimenti si comportò la magnetite, che noi osservammo tanto nelle serpentine che nel talco. Qui la magnetite deve essere cristallizzata per la prima e le facce dei suoi ottaedri sono nitide e lucenti, gli spigoli ed i vertici marcatissimi.

Del resto è noto come anche altrove la magnetite entro scisti cloritici e talcosi si presenti in cristalli ottaedrici ben delimitati.

Nelle serpentine il talco, che si trova disseminato in piccole vene e nidi, è da ritenersi come originato al pari di quelle e contemporaneamente da una stessa roccia presumibilmente olivinica.

Se noi infine osserviamo come sulla linea di contatto delle prasiniti con le serpentine, da una parte si abbia la formazione di antigorite insieme con talco, mentre dall'altra quella di masse cloritiche anfiboliche, e come poi nella prima formazione si noti un forte arricchimento di magnetite, nella seconda uno simile di pirite, che dalle prasiniti va crescendo verso la parte cloritico-anfibolica, ci pare di poter rintracciare con una certa probabilità un'azione pneumatolitica o idrotermale al confine delle due rocce prasinitiche e serpentinose.

Questa azione si sarebbe esplicata quando le due rocce o l'una di esse passavano dallo stato fuso o plastico allo stato solido.

Non possedendo elementi più positivi sia a tale riguardo, che a riguardo dell'origine delle prasiniti e delle serpentine, ulteriori speculazioni sarebbero gratuite.

Istituto di Mineralogia e Geologia dell'Univ. di Cagliari
16 novembre 1916.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Aprile 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, De Sanctis, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Manno, Carle, e S. E. Ruffini.

È letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente del 1° aprile corr.

Il Presidente dà comunicazione di una lettera in cui il Socio Senatore Carle lo ringrazia per le condoglianze inviategli a nome dell'Accademia in seguito alla morte del figlio, vittima compianta del dovere compiuto nell'esercizio del suo ufficio di magistrato.

Il Socio Vidari presenta alla Classe in dono la quarta edizione con ritocchi e aggiunte dei suoi *Elementi di Etica* (Milano, Hoepli, 1917). La Classe ringrazia.

Da parte dell'autore il Socio Segretario Stampini presenta la Memoria a stampa del nostro Socio corrispondente P. Giuseppe Boffito, *Ugo Bassi. Note bio-bibliografiche* (Estr. dal vol. XLVI degli “ Atti dell'Accademia Pontaniana „), rilevandone l'impor-

tanza scientifica e, nell'ora presente, l'opportunità della pubblicazione. La Classe ringrazia. Il Socio Segretario presenta inoltre, a nome della Ditta Editrice, il N° 7 del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum*, che comprende l'opera di Tacito *De vita Iulii Agricolae* per cura di Cesare Annibaldi. La Classe ringrazia la Ditta Editrice Paravia.

Il Socio De Sanctis presenta, perchè sia pubblicata negli *Atti*, una *Nota* della signorina Matilde Denicolai, col titolo *La pace del 311 av. Cr.*

Il Socio Patetta presenta per la pubblicazione negli *Atti* una sua terza *Nota* su *Il poeta torinese Camillo Maulandi.*

Il Socio Stampini presenta pure per la stampa negli *Atti* una seconda *Nota* (*) del Prof. Clemente Merlo dell'Università di Pisa riguardante *L'articolo determinativo nel dialetto di Molfetta* (Parti III e IV e Appendice). Inoltre, anche a nome del Socio Vidari, presenta una *Nota* del Prof. Armando Carlini del R. Liceo di Pisa intitolata *La polemica di G. Locke contro le "idee innate"*. Questa Nota sarà parimente pubblicata negli *Atti.*

(*) Tanto questa quanto la precedente *Nota*, di cui è detto nel processo verbale dell'adunanza del 1° aprile u. s. (pag. 590), non saranno più pubblicate negli *Atti*, essendo state restituite all'autore.

LETTURE

La pace del 311 av. Cr.

Nota della sig.na MATILDE DENICOLAI.

Uno dei più importanti episodi della guerra quadriennale (315-311) risorta fra Antigono da una parte, Tolemeo, Seleuco e Lisimaco dall'altra, fu la battaglia di Gaza vinta da Seleuco e Tolemeo sul giovane figlio di Antigono, Demetrio, che, nella ritirata, apriva agli avversari la Siria, la Palestina e la più gran parte della Fenicia, e lasciava, in seguito, libera la via di Babilonia. Seleuco, il quale sapeva che i Babilonesi gli erano devoti e che il satrape postovi da Antigono era morto nella battaglia di Gaza, si avviò verso quella città e vi entrò accolto come un liberatore. Vinse Nicanore, togliendo così ogni impedimento alla sua avanzata nelle alte satrapie, mentre Antigono, impensierito dal nuovo e più grande pericolo, manda Demetrio per ricuperare Babilonia al suo dominio. Demetrio trova la città abbandonata, e, delle due cittadelle, che sole erano occupate dalle truppe di Seleuco, riesce a prenderne una: l'altra resiste.

Sono questi in breve gli ultimi avvenimenti che Diodoro ci narra prima di venire al trattato di pace del 311, così formulato (1): ... *οἱ περὶ Κάσανδρον καὶ Πτολεμαῖον καὶ Λυσίμαχον διαλύσεις ἐποιήσαντο πρὸς Ἀντίγονον καὶ συνθήκας ἔγραψαν· ἐν δὲ ταύταις, ἦν Κάσανδρον μὲν εἶναι στρατηγὸν τῆς Εὐρώπης, μέχρι ἂν Ἀλέξανδρος ὁ ἐκ Ῥωξάνης εἰς ἡλικίαν ἔλθῃ, καὶ Λυσίμαχον μὲν τῆς Θρᾴκης κυριεύειν, Πτολεμαῖον δὲ τῆς Αἰγύπτου καὶ τῶν συνοριζουσῶν ταύτῃ πόλεων κατά τε τὴν*

(1) XIX, 105.

Λιβύην καὶ τὴν Ἀραβίαν, Ἀντίγονον δ' ἀφηγεῖσθαι τῆς Ἀσίας πάσης, τοὺς δὲ Ἕλληνας αὐτονόμους εἶναι.

Come mai non è nominato Seleuco? Si sono già cercate varie risposte alla domanda, che pare tanto più legittima se si pensa che il silenzio su questo personaggio è pure mantenuto in una lettera di Antigono agli Scepsî (1) per il riconoscimento della libertà delle città greche: in essa è pure menzione della pace del 311.

Secondo il Droysen (2), Antigono avrebbe, in quest'anno, conchiuso la pace soltanto con Tolemeo e con Lisimaco, continuando la guerra con Seleuco: a lui, poi vittorioso, avrebbe riconosciuto il possesso di Babilonia e delle altre satrapie. Ma questa soluzione non regge, anzitutto perchè non si comprende l'abbandono di Seleuco da parte degli alleati, e poi perchè i due luoghi da lui citati di Polieno (3) e di Arriano (4), che paiono confermare la continuazione della guerra, non hanno data, e si possono riferire, come pensa il Costanzi (5), l'uno ad un'azione posteriore alla guerra di coalizione (battaglia d'Ipso), e l'altro all'ultimo anno di guerra.

Il Bouché-Leclercq (6) e l'Haussoullier (7) seguono in sostanza il Droysen, in quanto ammettono che Seleuco fosse realmente escluso dalla pace. Più indipendente, invece, è il Niese (8), secondo il quale Antigono non avrebbe potuto riconoscere Seleuco, pur conservando gli alleati la loro lega intatta; Antigono, insomma, avrebbe concesso a Seleuco un armistizio.

Anche il Beloch (9), trattando di questa pace, accenna alla questione; egli ravvicina il testo di Diodoro alla lettera di Antigono agli Scepsî, non ha il minimo dubbio che Seleuco non

---

(1) Dittenberger, *Orientis Graeci Inscr.*, 5.

(2) *Histoire de l'Hellén.*, II, p. 361 segg.

(3) *Strat.*, IV, 9.

(4) *Indica*, 43, 4.

(5) *La pace fra Antigono e i coalizzati contro di lui nel 311,* in “ Annali delle Università toscane „, nuova serie, vol. I, fasc. 4°, p. 5.

(6) *Histoire des Lagides,* I, p. 52 segg.

(7) “ Revue de Philologie „, XXIV (1900), p. 262.

(8) I, pp. 303-4.

(9) *G. G.* III[1], p. 137, n. 1.

fosse compreso nella pace, ma non spiega il motivo del silenzio di Diodoro, e, quanto alla lettera agli Scepsî, trova che, trattandosi solo della libertà delle città greche, non vi era nessun bisogno di nominare Seleuco, poichè città greche non esistevano nel suo territorio.

Il Costanzi (1) propone due ipotesi:

a) il trattato poteva comprendere varî capitoli, e riferirsi: alcuni di essi alla pace generale, gli altri alle condizioni particolari fatte a ciascun contraente;

b) Seleuco potrebbe aver incaricato Tolemeo di concludere la pace in suo nome.

Ma, a parer mio, queste ipotesi, così formulate, non rispondono allo scopo: *di spiegare il silenzio su Seleuco.*

Secondo me, finora non si è potuta risolvere definitivamente la questione, perchè non si è fatto il debito conto di un documento di non piccola importanza: di quella lettera, cioè, di Antigono agli Scepsî, di cui ho già fatto menzione. Essa fu ritrovata non molti anni or sono, insieme con un decreto degli Scepsî in onore di Antigono. L'illustrarono il Köhler (2) e il Munro (3).

È vero che l'argomento principale della lettera è il riconoscimento della libertà delle città greche, ma in essa si tratta ancora, e non solo occasionalmente come è parso ai più, della pace del 311. Leggiamo il documento.

Nella parte che ci rimane, dopo un accenno ai grandi sacrifizî che ad Antigono s'erano imposti, questi afferma che ha condotto a termine tutte le trattative con Cassandro e Lisimaco (i quali avevano mandato a lui Prepelao con pieni poteri), sebbene le pretese di Cassandro fossero eccessive; continua dicendo che, *dopo* (4) gli accordi definitivi con Cassandro e Lisimaco, Tolemeo aveva inviato ambasciatori per chiedere che si trattasse

---

(1) Art. cit., pp. 11-12.

(2) " Sitzungsber. der Berliner Akademie ", 1901, p. 1059 segg.

(3) " Journal of Hellen. Studies ", XIX (1899), p. 330 segg.

(4) Dittenb., 5, ll. 26-32: *ὄντων δ' ἡμῖν τῶν πρὸς Κάσσανδρον καὶ Λυσίμαχον συντετελεσμένων, πρὸς ἃ Πρεπέλαον ἔπεμψαν αὐτοκράτορα, ἀπέστειλεν Πτολεμαῖος πρὸς ἡμὰς πρέσβεις, ἀξιῶν καὶ τὰ πρὸς αὐτὸν διαλυθῆναι καὶ εἰς τὴν αὐτὴν ὁμολογίαν γραφῆναι.* — ll. 45-6: *ᾤμεθα καλῶς ἔχειν συνχωρῆσαι καὶ τὰς διαλύσεις ποήσασθαι καὶ πρὸς τοῦτον.*

anche con lui; mostra di aver ceduto, sebbene non troppo volentieri, specialmente per amore delle città greche. E conclude dicendo: " ora sappiate che le trattative sono state condotte a termine e che la pace è fatta „ (1).

È facile osservare:

1° che la parte riguardante le trattative di pace non è certo la meno importante nella lettera;

2° che la cosidetta pace del 311 non fu una convenzione generale fra Antigono e i coalizzati contro di lui, ma che la pace fu invece stabilita con trattati separati;

3° che questi singoli accordi non avvennero contemporaneamente (2) e non incontrarono tutti le stesse difficoltà;

4° che la pace era realmente conclusa con tutti i singoli nemici quando Antigono scriveva questa lettera.

Ora, per poco che si consideri ciò che ci rimane dei fatti antecedenti e di quelli susseguenti la pace del 311, non si può escludere da essa Seleuco, e la lettera agli Scepsî (ch'io ritengo rispecchiare fedelmente lo stato delle cose), coll'insistenza sul concetto che *la pace è conclusa*, ne è una conferma. Abbiamo visto l'importanza di Seleuco negli ultimi fatti d'arme a Babilonia e i suoi progressi nella facile conquista delle satrapie superiori. Se ricordiamo ancora che l'ipotesi della continuazione della guerra tra Antigono e Seleuco, alla fine della quale l'uno avrebbe riconosciuto all'altro il possesso di Babilonia, è priva di fondamento, e che, d'altra parte, quando Diodoro riprende a parlare di Seleuco lo dice tranquillamente signore di Babilonia, dobbiamo concludere che, non solo Seleuco era compreso direttamente nella pace, ma ancora che gli erano lasciate quelle province. Per il silenzio in Diodoro potrebbe darsi: o che riassumendo la sua fonte avesse tralasciato la parte riguardante Seleuco per dimenticanza (il che è possibile, sebbene assai poco probabile proprio in un trattato di pace), — oppure che l'omissione esistesse anche nella sua fonte, quindi nel vero trattato

(1) Dittenb., id., ll. 51-2: *ἴστε οὖν συντετελεσμένας τὰς διαλύσεις καὶ τὴν εἰρήνην γεγενημένην.*

(2) Infatti è chiaramente notato che il trattato con Tolemeo è posteriore a quello fatto con Lisimaco e Cassandro. Dittenb., 5, ll. 26-7.

di pace. Vista e considerata anche la coincidenza coi dati della lettera agli Scepsî, io credo si debba essere piuttosto di questa seconda opinione. Risolverei dunque la questione così:

Antigono, nel 311, venne coi singoli coalizzati contro di lui a paci separate, colle quali concedeva: a Cassandro la strategia sull'Europa fino alla maggiorità di Alessandro figlio di Rossane; a Lisimaco il dominio della Tracia, a Tolemeo il dominio dell'Egitto e dei territorî contermini di Libia e d'Arabia. Per Seleuco potremmo dire che non sappiamo quale parte di territorio gli fosse assegnata, non informandocene esplicitamente alcuna fonte. Ma, ripensando un momento agli ultimi fatti dei quattro anni di guerra narrati da Diodoro, mi pare che lo stesso Antigono potrebbe avere affrettato, sia pure non in modo diretto, la conclusione della pace, impensierito sopratutto dalla facilità con cui Seleuco era entrato in Babilonia e di lì s'era spinto nelle province superiori, accolto, in massima, dal favore di quelle popolazioni. Antigono non ignorava che l'opinione pubblica, già a lui ostile, non poteva essere cambiata in suo favore in seguito alle ultime devastazioni di Demetrio, quindi era bene approfittare di un momento in cui poteva accampare qualche diritto sulla città, essendo una delle due cittadelle ancora in mano del presidio lasciatovi da Demetrio suo figlio. D'altra parte è manifesto che Antigono, se aveva rinunciato alla supremazia sull'Europa, voleva assolutamente mantenere quella sull'Asia, e non sarebbe mai sceso a patti tali che non assecondassero questa sua aspirazione, almeno apparentemente.

Per tutte queste ragioni non sarà troppo difficile ammettere che Antigono venne a separate trattative con Seleuco come cogli altri dinasti, colle quali decideva di lasciare a lui ogni potere *reale* su Babilonia e sulle satrapie superiori, mentre egli se ne sarebbe considerato *nominalmente* signore. Si sarebbe trattato quindi di una convenzione particolare, la quale soddisfaceva tutti: gli alleati, i quali capivano che, per il momento, Seleuco (il quale del resto appare chiaramente in condizioni di inferiorità rispetto agli altri) non avrebbe avuto nulla da temere, e Antigono, il quale, colla formula *ἀφηγεῖσθαι πάσης Ἀσίας*, mentre aveva accontentato Seleuco, salvava la sua ambizione.

Mi pare dunque evidente che non si può seguire il Costanzi,

il quale, prendendo il *πάσης* alla lettera, e non nel senso di " supremazia generale „ quale noi l'intendiamo, crede che sia un'aggiunta fatta da Diodoro nel parafrasare la sua fonte o per indicare che si voleva intendere *Asia* nel significato più esteso, contrapposto alla *provincia romana*, o semplicemente per dare una forma più tondeggiante al periodo!

Possiamo ancora citare una notizia di Giuseppe Flavio (1), che giustamente il Costanzi riferisce alla situazione creata dalla pace del 311. Anche qui si dice Antigono signore dell'Asia e Seleuco di Babilonia. Il passo non fa quindi che confermare le nostre induzioni.

Dunque, concludendo, Seleuco, benchè compreso, come abbiamo visto, nelle trattative, non poteva essere nominato esplicitamente nella lettera agli Scepsî e nemmeno in Diodoro, il quale non ci riferisce già le linee di un trattato generale, bensì i risultati *ufficiali* di paci separate concluse tra Antigono e i suoi avversari.

---

(1) *Ant. Jud.*, XII, 1.

Il poeta torinese Camillo Maulandi e uno strano errore del Botta.

Nota III del Socio FEDERICO PATETTA.

8. Non ricordai finora le poesie del Maulandi se non quando potevano servire ad accertare qualche data o qualche fatto importante della sua vita, ed anche allora senz'entrare in particolari. Credetti infatti fin da principio che convenisse raggruppare in uno dei paragrafi finali il poco che si può dire dell'opera poetica del nostro autore, in modo che le precedenti notizie biografiche potessero contribuire all'intelligenza ed al giusto apprezzamento delle poesie, e fossero alla loro volta illustrate ed arricchite di qualche nuovo dato.

Eccoci dunque alle poesie, le quali, per quanto m'è noto (1), son raccolte tutte nel *Saggio*, ad eccezione di due, dedicate a

(1) La bibliografia delle poesie del Maulandi fu data dal Vallauri, l. c., ma colla solita negligenza. Dei dieci numeri, di cui consta l'elenco vallauriano, il 2, 3, 4, 5, 6 corrispondono a pubblicazioni già citate o che citerò. L'ode registrata al n. 1, senza che sia detto dove si trovi e coll'errore di data 1781 in luogo di 1788, è nel vol. III degli *Ozi letterarii*. Nello stesso volume, e poi nel *Saggio*, si trovano pure le odi, che il Vallauri registrò ai nn. 8 e 9, senza parimenti dire se siano stampate e dove. Il n. 7, " *Odi* " *di* Camillo Maulandi... *Torino, dalla stamp. Reale, in 8°, di pag. 13 senza* " *nota d'anno* ", rappresenta certo una tiratura a parte dal vol. I degli *Ozi*, già registrato al n. 3. Analogamente furono senza dubbio tirate a parte le poesie stampate nel terzo volume degli *Ozi*, e forse altre stampate altrove. Resta il n. 10: " *Poesie varie stampate nelle raccolte* ". Il Vallauri non dice nè di che poesie nè di che raccolte si tratti. Per parte mia, conosco solo due raccolte contenenti versi del Maulandi, cioè quella del 1792, in morte di Enrichetta Taparelli in Balbo, e quella del 1797 per nozze Maffoni-Bruna. Trovai inoltre che l'ode VI fu riprodotta, come dirò, nella *Biblioteca per l'anno MDCCXCIII*; e che la stessa ode si trova pure, insieme colla settima, nel *Mercurio d'Italia storico-politico per l'anno 1796*, Venezia, tip. pepoliana, pag. 185-189 della parte letteraria (Il *Mercurio* dà, erroneamente,

principi di Casa Savoia e che perciò, essendo stato instaurato in Piemonte il governo repubblicano, si credette evidentemente di dover omettere, così come si credette di dover trasformare in *cittadini* i *conti* ed i *signori* delle prime edizioni.

Sbrighiamoci subito delle poesie escluse. Sono due odi, pubblicate nel 2° e nel 3° volume degli *Ozi letterarii* e scritte nel 1787 e 1788 per due visite a Givoletto dei Principi di Piemonte, Carlo Emanuele e Maria Clotilde, accompagnati la seconda volta dal Duca e dalla Duchessa del Ciablese.

La prima, colla ridicola importanza data ad un fatto tanto semplice, è stupidamente cortigiana (1): la seconda, del 1788, colle sue tendenze arcadicamente pacifiche, umanitarie, idilliache, appare a noi, che non possiamo staccarla dai ricordi storici degli anni successivi e dagli altri scritti dello stesso Maulandi, quasi un'ingenuità e una stonatura; se è lecito *parvis componere magna*, quasi come una festa campestre al Trianon alla vigilia della Rivoluzione. Amazzoni ed eroi, dice il poeta, incutevano altre volte terrore colle loro imprese guerresche. Ora non più:

“ Pace propizia
Del valor vero
Schiuse le limpide
Fonti, e 'l sentiero
D'eternità.
Natura i teneri
Dritti riprese,
E in cor degli uomini
Sua face accese
Umanità „.

---

al Maulandi il titolo di conte). Altre ristampe di poesie del Maulandi potranno probabilmente trovarsi nell'*Anno poetico* o in altre pubblicazioni dello stesso genere; ma non ne feci ricerca.

(1) Eccone la chiusa:

“ Di questo azzurro sasso a piè del monte
Mole eterna di gloria
S'innalzi, e sculti questi carmi in fronte
Serbino l'alta istoria:

Carlo e Clotilde quest'umil dimora
Sì grandi non sdegnarono:
T'arresta, passeggiero, e chino adora
L'orme che qui segnarono „.

Quindi *eccelse Amazzoni* ed *augusti eroi* sono delizia dei popoli, rinnovando, *numi presenti,* l'età dell'oro fra genti semplici e incolte, che, in pegno della loro fede, offrono *su rustica ara* una bianca agnella votiva.

Passiamo alle poesie contenute nel *Saggio.* Questo fu stampato colla data del 1799; ma essendo il Maulandi stato fatto prigioniero fin dal marzo di tale anno, si deve credere che sia stato preparato, e forse in gran parte stampato, fin dal 1798. All'inverno del 1798 risale appunto la più recente fra le poesie datate.

Il *Saggio* contiene diciannove composizioni, sei delle quali non pubblicate prima o di cui ignoro la prima edizione, le altre riprodotte da stampe anteriori con semplici correzioni ortografiche o di punteggiatura. Sono undici *odi*, un'*anacreontica*, due *epigrammi,* tre traduzioni e una pretesa traduzione da Catullo, e finalmente alcuni *endecasillabi.*

Tali composizioni non sono disposte in ordine cronologico, ma divise per generi; e le più numerose dello stesso genere, cioè le odi, sono talora raggruppate anche per analogia d'argomento. La data, almeno approssimativa, della maggior parte si può per altro accertare, ricorrendo alle edizioni originali e tenendo conto delle indicazioni date dal *Saggio.*

Le poesie di data più remota sono le prime cinque odi, pubblicate nel 1787 nel primo volume degli *Ozi letterari* (pagine 310-320), e che c'interessano in modo speciale, perchè lasciano intravvedere le origini della passione per Nice. Il Maulandi era allora sui trent'anni: e certo può parer strano che abbia cominciato così tardi a scriver dei versi, o almeno a pubblicarli. In ogni modo, se ne esistono di pubblicati anteriormente, o anonimi o firmati con nomi accademici o col vero nome, essi non furono accolti dal Maulandi fra quelli, cui voleva affidata la sua fama di poeta, nè a me è riuscito di rintracciarli.

La prima ode è *Il voto.* Il Maulandi si rivolge all'Amore ed umilmente espone, come qualmente si trovi sotto il *ferreo giogo* di

> " Vispa fanciulla indomita
> Di gigli-roseo viso „

che l'Amore stesso *non tocca* o s'accontenta di *vario-pingere. Se mai fia* che essa *palpiti* per la prima volta, e *dolce-rivolta* fissi

languidamente *i suoi bei rai* su di lui, egli offrirà in sacrificio *il primo soavissimo miele*, che coglierà *sulle fraghe tenerelle* della giovane amata.

Essendosi l'Amore lasciato sedurre da tanta generosità, il poeta, *memore del voto*, potè cantare nell'ode *La felicità* come, reso ardito dalla notte, avesse fatto la sua brava dichiarazione *al tenue raggio di Cinzia*, e come *la cara Nice dalle luci tenere* si fosse addirittura *arresa* alla Dea d'amore. *Honny soit qui mal y pense!* Non si trattava, pare, d'una resa a discrezione. Tutt'altro! Ma il poeta sperava ed era felice.

Senonchè *il signor Maulandi* non era probabilmente un partito conveniente per Nice, i cui parenti dovevano aver mire ben più alte. Bisognò quindi rassegnarsi... e scrivere una terza ode d'intonazione alquanto diversa, *Il dolore*:

" Pon freno ai fervidi
Rotti sospir,
Diletta Nice;
Assai già straziano
Fieri martir
Un infelice.

Se destin barbaro
Parte due cor
Fidi e costanti,
Ahi! che non placano
Il suo rigor
Querele e pianti! "

Il fido poeta promette però che non amerà e non si confiderà con altra donna:

" Sola del tenero
Cor seppe già
Nice i contenti;
Sola del misero
Core saprà
Nice i tormenti ".

Nella quarta ode, *Contro un geloso*, il Maulandi pretende di esser già *vendicato appieno* dalla *pallida furia*, che *dilania il misero seno* del suo rivale; ma che per di più questi non potrà, con tutta la sua vigilanza, *evitare l'inevitabil fato*:

“ Poteo già d'Argo all'alternar de' lumi
Funesto sonno infondere
Il Messaggier de' Numi:
E 'l Dio, ch'è meco, e tutto sforza e vince,
Saprà miei furti ascondere;
Aguzza il guardo, o Lince „.

Se quest'ode fu scritta anticipatamente all'indirizzo del futuro marito di Nice, forse lo stesso Maulandi avrà dovuto in seguito riconoscere d' essere stato ingiusto e crudele verso un uomo di così buona o di così grossa pasta. Ma probabilmente egli scrisse e pubblicò la sua ode col solo fine di nascondere ai curiosi, e specialmente ai parenti, l'esser vero di Nice; e per la stessa ragione pose ad arte, dopo l'invettiva contro il preteso geloso, l'ode *Al signor Carlo Bossi*, la quale, a giudicare dal probabile ordine logico degli avvenimenti, avrebbe dovuto trovar luogo prima dell'ode sulla forzata separazione dei due amanti. Dice infatti il Maulandi, che inutilmente l'amico Bossi gli *addita dall'alto le orme d'onore. Sognò* egli pure *con piacere* [!] *pugne feroci*; ora il sublime incantesimo sparì dai suoi occhi; il suo cuore udì le voci di natura; ed egli non sa che farsi della fama, poichè gli basta l'approvazione di Nice:

“ Ambizíon sollecita
Più non mi punge il sen,
E in braccio del mio ben
Contento i' sono:
Che se, negato un bacio,
Nice poi dona a me,
Io non invidio un re
Sopra il suo trono „.

Tutte le odi fin qui enumerate furono scritte almeno due anni prima del matrimonio di Nice. Un'altra ode, pubblicata nel 1791 nel terzo volume degli *Ozi* e poi nel *Saggio* come ode VII, è invece ispirata dagli amori, tutt'altro che innocenti, svelati nelle lettere da Milano e da Albonese. Il Maulandi, nella visita già ricordata alla casa del Petrarca, si sente *invaso dal Nume*; *inusitata insania* lo toglie a sè stesso; l'*ombra patetica dell'altissimo Vate gli investe e domina l'anima*; il ricordo di Laura e quello di Nice si fondono assieme:

" Occhi cerulei, treccia biondissima,
Cantar, che in l'anima soave infondesi,
Sei Nice, o illudemi follia dolcissima;
Già 'l mio pensier confondesi.

Pensosa e tacita scorrer ti veggio
Sulle mie pagine l'occhio volubile,
E 'l capo languido posar sul seggio,
Qual astro, che si annubile.

Tergi la lagrima del desiderio,
Amata giovane, il duol discaccia;
Al primo riedone tuo dolce imperio,
Volo fra le tue braccia:

Volo, nè arrestanmi quelle, che ammirano
L'Adria e gli Euganei, vivaci Veneri;
Solo te chiedono, sol te sospirano
Tutti i miei voti teneri.

O divo Spirito, de' melanconici
Canti buon arbitro, deh! tutti prestami
Quei lusinghevoli tuoi modi armonici,
E l'estro in sen ridestami;

Ch'io possa all'etere mia Nice spingere,
Cantare il mutuo amor fidissimo,
E i pronto-ingenui moti dipingere
Dell'occhio amorosissimo ".

Dopo quest'ode il nome di Nice non compare più nei versi del Maulandi, così come non compare più nelle lettere. Potremmo quindi facilmente ricostruire la prima e la seconda parte del romanzo; immaginare cioè come *il mutuo amor fidissimo* sia nato e sia vissuto. Non sappiamo invece come sia morto; e solo possiamo osservare, forse malignamente, che dimorando Nice, a quanto pare, lontano da Torino, la sua fedeltà, oltre che esposta ai consueti pericoli, doveva essere messa a dura prova dalle lunghe, forzate assenze del Maulandi. Questi, del resto, non si fece mai troppe illusioni, poichè fin dal marzo del 1790, nel pieno ardore della passione corrisposta, parlava di *ultimi bei giorni di sua vita*, e, quand'anche dovesse arridergli la gloria, prevedeva *triste la serie* degli anni avvenire.

Il terzo volume degli *Ozi*, oltre all'ode per la visita ad Arquà e a quella, parimenti già ricordata, per i Principi di

Piemonte, contiene due altre odi, che corrispondono all'ottava e alla sesta del *Saggio*.

L'ode ottava del *Saggio*, intitolata semplicemente *In morte d'un amico poeta*, fu scritta per Anton Maria Durando, conte di Villa, nato in Torino il 9 agosto 1760 e morto il 26 sett. 1787. In onore di lui Prospero Balbo aveva letto l'*orazione accademica*, che è pubblicata nello stesso volume degli *Ozi*. Il Maulandi si rivolge quindi al Balbo per dire, con molte reminiscenze classiche, cose veramente non troppo nuove nè peregrine:

“ Se i soli cadono, risorger ponno;
Ma se il brevissimo dì cade a noi,
Ci tiene un ferreo perpetuo sonno
Fra i vanni suoi „.

Sono dunque inutili le smanie della moglie, il dolore del padre. Vivranno nei secoli le poesie scritte dal Durando, ma egli non canterà ormai più per *le figlie d'Eridano*, che lo cercano invano; canterà invece *fra gli odoriferi mirti fioriti di Lete*, e intorno gli si *addenseranno le ombre*, avide d'ascoltarlo.

“ Ma dall'Elisie cieche contrade
Poi che non grazie, non dolci note,
Non oro fulgido e non pietade
Ritor ci puote,

Spargiam del debito Febeo liquore
Almeno il cenere del Vate amico,
E l'ombra bevalo grata all'amore
E al genio antico „.

L'ode sesta del *Saggio* (una delle meno peggio) è posta negli *Ozi* fra l'ode per la visita dei Principi a Givoletto nel 1788 e quella per la casa del Petrarca, del 1790. Alla posizione deve presumibilmente corrispondere la data, intermedia fra le due indicate.

Il Maulandi, in questo suo *Invito alla campagna*, si rivolge ad una Filli,

“ che libera
D'ogni cura volgare il nobil core,
Divide i giorni rapidi
Tra le delizie d'Amistà e d'Amore „,

e la prega di lasciare i portici di Torino, e, se può vivere per un sol giorno lontana dall'amato bene, di recarsi, evidentemente a Givoletto,

> " A contemplar la semplice
> Spontanea beltà della Natura „.

Nel *campestre solitario tetto* del poeta, assisa a lieta mensa, essa gli confiderà i suoi segreti amorosi; egli ne alleverà le pene col canto:

> " Nemica di mestizia,
> Fille dal nero fulminante ciglio,
> Lascia, deh! lascia i portici
> Vario-frementi, e 'l popolar bisbiglio.
> . . . .
> Poi tra i bicchier scherzevoli,
> Tra 'l geniale convivar faceto,
> Al mio sicuro orecchio (1)
> Deporrai del tuo core ogni secreto.
> . . . .
> Tutto a me svela; i fervidi
> Dardi del Nume Arcier ed io pur sento,
> E dolci versi fingere
> Saprò per lusingare il tuo tormento „.

Di data incerta, ma anteriore (2) in ogni modo all'ode del 1792, della quale diremo, e probabilmente da porsi fra i primi versi del Maulandi, è l'*anacreontica per nozze* pubblicata nel *Saggio* a pag. 45-50. Da essa risulta che lo sposo si chiamava Carlo e la sposa Felicita. Questa, il poeta ce lo dice per ben tre volte, aveva quattordici anni. Del resto nessun pensiero serio fa

---

(1) Cfr. Orazio, *Carm.* I, 27, 17-18: " Quidquid habes, age, — Depone tutis auribus „.

(2) L'anteriorità risulta specialmente dai seguenti versi, che il Maulandi non avrebbe potuto più scrivere dopo l'ode del 1792:

> " Agli amor teneri
> Usa mia lira
> Di Marte indomito
> Intuonar l'ira
> Non anco osò „.

capolino fra le molte banalità e frivolezze della poesia; nessun accenno alla prole futura, ai parenti, alla patria. Il matrimonio è semplicemente la miglior via per potersi dare *sul molle talamo* alle *dolci opre d'amore*, senza che la *virtù* possa trovar a ridire.

Una nota nuova, virile, patriottica risuona finalmente, dopo scoppiata la guerra colla Francia, nell'ode IX composta, pare, verso la fine del 1792 e già pubblicata nel volume (1) che Prospero Balbo dedicò alla memoria della prima moglie, morta giovanissima, in marzo di detto anno. L'ode s'apre con una parafrasi delle prime strofe d'Orazio, *Carm.* II, 9, ed è tutta intessuta di reminiscenze oraziane: ma si stacca dal modello in ciò che, per ricondurre alla ragione il marito desolato, viene evocata la stessa moglie defunta, che gli ricorda i doveri verso la patria in un'ora così grave, e vuole che s'ispiri alla memoria dell'avo, il famoso ministro Giambattista Bogino:

“ Non sempre gl'ispidi campi si allagano
Per nembi e pioggia, nè 'l mar d'Etruria
Agitan le tempeste
Sempre con egual furia;
Nè dell'Armenia i campi fertili
Ghiacci perpetui, mio Balbo, indurano,
Nè frondi alle foreste
Gli Aquilon sempre furano.

Te sempre in flebili modi ripetere
Udrem dai Superi la sposa tenera,
La tua Enrichetta ahi! tolta
Da lei, che tutto incenera?
. . . .
Ve' dal purissimo ciel, di te in traccia,
Dolente del tuo duolo,
Enrichetta si affaccia:
E dice: o tenero sposo carissimo,
. . . .
Sull'Alpi intrepido oh! si precipiti
Contro le Galliche falangi orribili
Chi fra 'l fumo e le strida
Sprezza di Morte i sibili.

---

(1) *Memoriae Henrichettae Taparellae Prosperi Balbi uxoris monumentum*, Torino, Soffietti, *s. a.* L'ode del Maulandi è a pag. 97-99; e poichè vi si accenna alla guerra sulle Alpi, non può in ogni modo esser anteriore agli ultimi giorni di settembre del 1792.

Non minor gloria è d'ardor civico
Raffrenar l'impeto cieco ed instabile,
E ai gridi imperversanti
Serbarsi imperturbabile.

. . . .

Ve' la tua Patria, nome santissimo,
Che 'l nobil animo già tutto accendeti;
Oh quai veglie e sudori!...
Qual nuovo vanto attendeti!
Dell'alma Patria gran desiderio,
All'Avo altissimo rivolgi il ciglio,
Ei dai beati Cori
Ti porgerà consiglio „.

La Musa del Maulandi tace poi per un pezzo, finchè non vengono a procacciargli un ozio non gradito la ferita e la prigionia di guerra. *Ferito* appunto e *prigioniero*, egli rivolge ad un'*Eugenia N. N.* i due epigrammi, o madrigali che dir si vogliano, pubblicati a pag. 51-52 del *Saggio*. Dice il poeta, nel primo di essi, che s'era ingannato sperando, per virtù delle acque di Digne, di guarire della sua ferita e poter quindi tornar libero in patria. Invece era stato nuovamente ferito e fatto prigioniero:

“ Te vidi, te ascoltai; tardi ahi! m'accorsi,
Ch'è mio destin restar ferito e preso „.

Il secondo epigramma accompagnava alcune traduzioni di poesie francesi fatte dal Maulandi e presentate alla stessa Eugenia, alla quale egli si lagna di non avere ancora toccato il cuore:

“ Ma pur tal corda ancora ah! non toccai,
Che dal tuo core un suon traesse mai „.

Segue, dopo un altro lungo periodo di silenzio, la “ *Traduzione di alcuni pezzi di Catullo cogli stessi metri ed ugual numero di versi* „, pubblicata, come abbiamo detto, nel 1797 per nozze Maffoni-Bruna e ristampata nel *Saggio*, a pag. 53-57. Sono tradotti il carme 51 (51 *b*) di sedici versi, il quinto di tredici, ridotti nella traduzione a dodici; e il settimo parimenti di dodici versi. Che la traduzione sia fatta *cogli stessi metri* dell'originale è anche vero solo in parte. Il carme 51, saffico, è reso

colle strofe saffiche rimate di schema ABAb, usate già prima molte volte dal Fantoni (1). Ai faleucii dei carmi 5 e 7 corrispondono i quinarii accoppiati, i quali però non si seguono liberi come i faleucii di Catullo o come in una delle odi fantoniane (2), ma sono distribuiti in strofe di tre versi, il primo e il terzo dei quali finiscono sempre con una parola piana e rimano fra di loro, mentre il secondo è sdrucciolo e non rima. Il primo quinario dei versi piani termina poi sempre con parola sdrucciola, e viceversa, salva una sola eccezione (3), termina in piana il primo quinario degli sdruccioli:

" Viviamo, o Lesbia, amiamo pure,
Dei più severi vecchi le ciancie,
E ai venti rapidi doniam le cure „.

Del resto le traduzioni mi sembrano addirittura pessime. La spontaneità, la semplicità, la freschezza della poesia catulliana sono scomparse del tutto. La stentatezza, la scorrezione, l'ineleganza dominano invece sovrane.

Quantunque però il Maulandi si mostri assolutamente inetto a rendere la poesia di Catullo in modo non del tutto indegno, egli si permise uno scherzo, che possiamo ben dire di cattivo genere: presentò cioè come quarta traduzione da Catullo una sua imitazione dei due carmi precedenti:

" Sui dolci, o Lesbia, tuoi neri rai
Trecento mila baciuzzi fervidi
No non sariano bastanti o assai;

Non se dell'aride spiche feraci
Ancor più densa fosse, mia Lesbia,
La messe fervida dei nostri baci „.

---

(1) Si vedano, per esempio, nel primo libro dell'edizione curata da G. Lazzari (Bari, 1913), le odi 14, 18, 23, 38, 46; nel secondo libro, le odi 20, 30, 33, ecc.

(2) Ediz. cit., II, 12, dell'anno 1782.

(3) Nel penultimo verso della pag. 55: " Ah! confondiamoli sì che non possano „. Nell'ode del Fantoni citata nella nota precedente i due quinarii di ciascun verso finiscono sempre in sdrucciola.

Non so se questa piccola gherminella sia stata mai segnalata.

D'ispirazione catulliana sono anche i sedici *endecasillabi*, erotici, che vengon dopo le quattro poesie ricordate e chiudono il *Saggio*. Sono quinarii accoppiati, rimati irregolarmente, e nei quali il primo quinario è sempre sdrucciolo e il secondo sempre piano:

> " Mia vita, stringimi, stringimi ancora,
> Qual edra stringiti a questo seno „ ecc.

Si può credere che questi *endecasillabi*, di cui ignoriamo la data, siano presso a poco contemporanei delle traduzioni.

Restano soltanto due odi, di data certa: la decima, *Per nozze, nell'inverno del 1797*, e l'undecima, *La lite di Nerina, nell'inverno del 1798*.

Diede occasione alla prima il matrimonio di un *Nuitz* (1), giureconsulto dotto, naturalmente, e integerrimo, con una Teresa, non solo colta e pronta nella *conscia rapidissima mente* a *consentire al vero* quando il marito volesse svolgerle qualche *luminosa idea socratica*; non solo istruita nel canto, nel suono, nella declamazione, nella pittura, ma dotata d'una qualità nuova, di *cuore italiano*:

> " Dal dotto Padre fu la bell'indole
> Nudrita e l'alta mente alla gloria;
> Ei dielle Italo core
> Patrio spirante amore „.

La poesia non ha quindi più l'intonazione frivola dell'anacreontica per nozze già ricordata. I *doni di Venere* sono posposti a

---

(1) Forse Giuseppe Antonio Nuytz, che è il solo della famiglia ricordato dal Dionisotti, *Storia della magistratura piemontese*, vol. II, Torino, 1881, pagg. 294-295 e 354. Egli, secondo il Dionisotti, nacque in Torino nel 1758, si laureò in legge nel 1783, fu dottore aggregato e raggiunse i più alti gradi nella carriera giudiziaria. Le attribuzioni dello sposo nel 1797 sono indicate dal Maulandi nei seguenti versi:

> " Tu che le giuste leggi santissime
> Ai Padri Augusti proponi libero
> D'ogni ligio concetto,
> Pel Ben-comun, pel Retto „.

quelli di Pallade: si pensa ai figli che dovranno nascere e nei quali i genitori sapranno destare

" quel dolce fremito
Cui le bennate alme risentono,
Amor del suol natio,
Che giace in tanto oblio! „.

E l'ode prosegue e si chiude con la dolorosa constatazione delle miserie presenti dell'Italia e con l'augurio di un avvenire migliore:

" Or turpi voti l'alme parteggiano
Dei Latin nuovi, ahi! di sè immemori:
Degli emuli stranieri
Su noi qual fia che imperi?

Ah! pera il vile, che per imperio
Divise e diede la bella Ausonia
A' ferrei gioghi estrani,
Ausonia ahi! fatta a brani.

Discordia surse, mostro gentivoro,
Di fresco sangue grondante e lurido,
E di fraterna clade
Bruttò le orrende spade.

Amor di Patria alto diè un gemito,
E dal corrotto vulgo fatt'esule,
Sol pochi prodi inspira
Di sua magnanim' ira.

Oh il sangue sparso! oh il vil ludibrio!
Oh indegnazione l'alme rattempri!
Oh torni un dì migliore
Prole il prisco valore! „.

Misera Ausonia! sì, ha ragione il Maulandi; ma ahimè! anche povera lingua e povera grammatica italiana!

L'ultima ode, *La lite di Nerina*, dovrebbe esser stata scritta, a giudicar dalla data, quando il poeta era in Acqui, in casa della marchesa Scati. Nerina, forse la sua ospite, parte improvvisamente, nel cuore dell'inverno, per i *lidi avari* della Liguria, dovendo iniziare una lite giudiziaria per farsi rendere dei *tesori*, che le erano *contesi*. Il Maulandi si meraviglia vedendola vestita all'Amazzone; ed esprime il suo stupore in due strofe,

che, nonostante la diversità del metro, s'ispirano un po' troppo da vicino all'ode del Parini *Sul vestire alla ghigliottina*:

" Perchè, Nerina amabile,
Feltro inusato il bel volto t'ombreggia?
Perchè di prisca Amazzone
Tra breve veste l'agil fianco ondeggia?

Questa non è del tepido
Favonio ahi! non è l'aura lusinghiera,
Ma del gelato Borea
L'acuta rigidissima bufera „.

Conosciuta poi la ragione della partenza, inveisce contro

" l'uom che i termini
Primo levò sull'indivise glebe,
E, d'ogni male origine,
L'oro scoperse all'abbagliata plebe „.

Vorrebbe almeno accompagnare la viaggiatrice, perchè vicino a lei sarebbe *scevro di mille dubbi e palpiti*, e saprebbe sottrarla, *come leon terribile*, da qualsiasi pericolo:

" Ma già sei lungi ... io restomi
In preda a tetra noja, a rei martiri
Ah! il tuo tornar solleciti
Almeno Amor propizio a' bei desiri! „.

Così con dei versi d'amore, o forse meglio di galanteria, si chiude l'opera del poeta, ormai quarantenne.

9. Le poesie del Maulandi sono così poco numerose, che ho potuto, senza troppa difficoltà, dar conto di tutte, riportandone quasi sempre dei brani, in modo da mettere i lettori in grado di giudicare da sè sullo stile, sulla lingua, sulla metrica.

Ora io non presumo d'esser interprete sicuro del loro pensiero, nè so d'altra parte se i giudizi, che essi fossero per dare, sarebbero in tutto concordi; ma credo, in ogni modo, che non s'accorderebbero con quelli dei contemporanei del Maulandi, i quali, a mio avviso, mostrarono d'apprezzarne l'opera poetica molto più di quanto a noi possa sembrar ragionevole.

Anche non tenendo conto dell'epigramma già citato del Somis, secondo il quale il Maulandi si sarebbe assicurata coi suoi *soavi metri* fama eterna, e non dando troppa importanza alla *distinzione*, con cui il cantore dell'*inclità Nice* avrebbe parlato fin dal 1790 del poeta, il cui principal titolo letterario consisteva allora nelle cinque prime odi per la Nice piemontese, è innegabile che le poesie pubblicate dal Maulandi negli *Ozi letterarii* furono accolte, in Piemonte e fuori, con grandissimo favore.

Nei *Comentarj bibliografici* per il 1792, t. I, parte II (febbraio), Torino, stamp. di Giacomo Fea, pag. 194, si legge che " le odi di Camillo Maulandi, in cui fa rivivere il cantor di " Venosa, sono attissime a promovere la letteratura in un ge- " nere nuovo di composizioni, in cui egli è fra i primi, che " l'abbiano con tanta maestrevolezza imitato ".

Nell'ultimo volume della *Biblioteca oltremontana e piemontese* per il 1791, a pag. 268, è pure un accenno al " nostro " poeta, che contemporaneamente al Fantoni cominciò a ver- " seggiare nello stesso genere Oraziano ". Con ciò si faceva evidentemente torto al Fantoni, che avea cominciato a scrivere le sue odi oraziane parecchi anni prima del Maulandi; e il torto venne, forse di proposito, riparato nel secondo volume del 1793, dove tuttavia l'anonimo scrittore mostra quasi di credere, che, prescindendo dalla priorità, il valore dei due poeti possa bilanciarsi (1).

Nelle *Considérations d'un italien sur l'Italie*, pubblicate dal

---

(1) Dopo un lunghissimo esame delle poesie del Fantoni, delle quali era comparsa una nuova edizione, lo scrittore della *Biblioteca* dice, a pagine 115-116, che il Maulandi, " portando dalla natura l'estro, la fantasia " e l'inclinazione a quel genere medesimo di poesia, che abbiamo fin qui " osservato esser la più felice occupazion di Labindo, non avea bisogno " che di alcuna accidental circostanza, che servisse d'impulso a sviluppare " un talento a sé stesso mal conosciuto. Furono, a dir vero, le odi di La- " bindo quelle, che diedero esempio e muovimento al signor Camillo Mau- " landi ... ". Volendo poi che " possano i dotti, confrontando i due compagni " cantori, vedere quanta parte di lustro ciascuno di essi sia per arrecare " al Parnasso Italiano in questa pressochè nuova carriera ", lo scrittore riproduce per intero, a pagg. 116-118, l'ode del Maulandi, *L'invito alla campagna*, già pubblicata nel 3° volume degli *Ozi*.

Denina a Berlino nel 1795 e che diedero luogo a tante recriminazioni e a così ardenti polemiche, è detto che il Maulandi era “ avantageusement connu en Italie par des poésies légères “ fort élégantes „ (1).

Un giudizio ancor più lusinghiero si legge nel già citato *Mercurio d'Italia... per l'anno 1796* (2), in un interessante articolo sugli *epigrammi* del conte Roncalli. I Francesi, dice l'anonimo scrittore, affermavano, che, quantunque gli Italiani pretendano “ d'avere una lingua capace di piegarsi a tutto „, essa non aveva mai “ potuto prendere quel giro semplice, naturale, “ disinvolto e polito, che hanno [*in Francia*] i versi di società „. “ I Francesi (*continua l'anonimo*) avevano ragione. Il nostro “ soverchio spirito ci ha traditi: ci siamo invaghiti troppo del “ fraseggiare pomposo; e se alcuno fra noi ha tentato di sem“ plificar l'espressione adattandola ad argomenti comuni della “ vita, è caduto nel basso, nel plebeo, nel buffonesco. Vedete “ Berni, Lasca, cent'altri „. Accenna poi al Fagiuoli e al Rolli che “ aveva fino ingegno, ma dura ed aspra la penna „ e viene finalmente al Bossi, al Maulandi e al Roncalli: “ Bossi e Mau“ landi, due cultissimi giovani torinesi, amici ambidue, e degni “ di esserlo, *i soli che in Piemonte coltivino con buona riuscita* “ *la poesia italiana*, si distinguevano in questo genere, quando “ il conte Roncalli pubblicò la sua prima traduzione degli *epi*“ *grammi francesi*. Negli annali della poesia italiana il conte “ Roncalli avrà uno de' primi posti fra quelli, che pubblicamente “ hanno per questa parte vendicata la nostra lingua dal torto, “ che le aveano fatto d'accordo e i nostri pedanti e i Francesi „.

“ *Bossi e Maulandi... i soli, che in Piemonte coltivino con* “ *buona riuscita la poesia italiana* „! Apriti, cielo. Tutti i poetastri del Piemonte dovettero sentirsi scottati; e uno dei peg-

---

(1) *Op. cit.*, pag. 31. Il Denina dice inoltre d'aver fatto conoscenza del Maulandi, e che questi aveva pubblicato sulle *Evoluzioni della fanteria* un libro *scritto in italiano con precisione ed eleganza*, nel quale *non s'era creduto indegno* d'entrar in lizza con dei tattici tedeschi riputatissimi. Parecchi anni dopo il Denina annoverò il Maulandi fra i Piemontesi, “ che si me“ ritarono un luogo distinto nel Parnasso italiano „ (*Saggio istorico-critico sopra le ultime vicende della letteratura*, Carmagnola, 1811, pag. 111, nota).

(2) Parte letteraria, fascicolo di gennaio, pagg. 48-50.

giori, Giovanni Giacinto Andrà, s'incaricò di protestare per tutta la nobile compagnia, scrivendo in dieci giorni, com'egli afferma, e dedicando a Francesco Albergati Capacelli " *La dissertazione dei dieci giorni o l'apologia de' poeti piemontesi in risposta all'autore del Mercurio storico-politico per il 1796* „ (1).

" Si può sentir di peggio? (*scrive l'Andrà a pag. 3*). Possi-
" bile, che in Piemonte non vi sieno che due soli poeti di buon
" gusto? Professo molta venerazione a Bossi e a Maulandi, e
" ne sono veramente meritevoli; ma quanti altri o li eguaglia-
" rono o li superarono... „.

Come si vede, l'Andrà, nonostante l'ardore polemico, non osa mettere in dubbio i meriti del Maulandi. Anzi, avendo più tardi, nella *Nuova frusta letteraria per l'anno 1798* (2), riportato il titolo delle traduzioni catulliane pubblicate dal Maulandi, lo fa seguire dal seguente commento: " *Il solo titolo dimostra l'ottimismo di queste traduzioni* „. E il pover uomo voleva proprio dire che le traduzioni sono ottime, poichè già poco prima, contradicendo, a gran torto, un noto epigramma di Marziale, aveva sentenziato sull'intera raccolta: " *sunt mala nulla, bona multa, optima quaedam!* „.

Altri giudizi si potrebbero certo aggiungere, avendo la pazienza di scorrere gli altri giornali letterarii pubblicati in Italia alla fine del Settecento; ma i già riferiti mi sembrano sufficienti a mostrare in qual conto il Maulandi fosse tenuto durante la vita.

Avvenutane la morte, il Ranza lo proclamò *poeta filosofo* al pari del Bossi. Poco dopo Vincenzo Marenco, in principio

(1) Torino, 1796, dalla stamperia di Giacomo Fea. A pag. 53 e segg. è un *Saggio di poesie* di scrittori piemontesi; a pag. 113 e segg. il *Catalogo de' Poeti viventi, che scrissero sparsamente*, fra i quali, forse per reazione contro il *Mercurio*, furono dimenticati tanto il Bossi quanto il Maulandi. Le *Effemeridi letterarie* di Roma, n. XXIX, 22 luglio 1797, pag. 228, discorsero di questa *Dissertazione*, dandone un giudizio, in massima favorevole, ristampato nel *Catalogo delle opere edite ed inedite del Signor Gio. Giacinto Andrà ...*, Torino, 1828, dalla tipografia Barberis, pagg. 24-28.

(2) Torino, stamp. Guaita, n° 2, pag. 28; cfr. n° 1, pag. 16. La *Nuova frusta*, compilata appunto dall'Andrà, manca nell'elenco dei periodici piemontesi pubblicato nel vol. I della *Biblioteca storica degli Stati della monarchia di Savoia*.

delle *Riflessioni sopra la prosodia metrica italiana* (1) lette alla nostra Accademia nella seduta del 17 dicembre 1806, scrisse che " non è nuova l'idea d'imitare i metri latini e greci nell'ita- " liana poesia ", e che " ognuno sa con quanta lode il Chiabrera... " e fra i moderni il Fantoni e il nostro Maulandi ed alcuni altri " abbiano i loro lirici componimenti, sino a certo segno, di questa " imitazione illustrati ". Venne in seguito il Botta, il quale, giudicando gli scritti del Maulandi " pieni di spirito poetico, di " dolce amenità, di grazia tutta oraziana ", non fece in sostanza che riassumere e ripetere ciò che avevano scritto, una trentina d'anni prima, i contemporanei del poeta. Di fronte all'autorità del Botta, poco valsero per Cesare di Saluzzo e per il Casalis, già citati, le restrizioni del Vallauri. Sembra del resto, come abbiam veduto, che tutta questa brava gente, a partire dal Botta, parlasse delle poesie del Maulandi per averne sentito dire, o almeno non conoscendole se non molto imperfettamente. Certo l'opera del poeta fu in appresso sempre più dimenticata; tanto ch'io posso citare due soli scrittori moderni, che ne fecero cenno, G. P. Girelli e il Bertana.

Il Girelli, morto giovanissimo, prima, se non erro, d'aver conseguita la laurea in lettere, alla quale aspirava, in un suo studio (2) sullo scritto testè ricordato di Vincenzo Marenco, osservò incidentalmente che *il tentativo compiuto in Toscana dal Fantoni* ebbe " il suo riflesso in Torino, quasi contemporaneamente, " nelle Odi di Camillo Maulandi... ". Il Bertana (*op. e loc. cit.*) pose invece il Maulandi fra i poeti della così detta *Arcadia lugubre*. Avendo infatti parlato delle poesie del giovane Durando di Villa, morto, come abbiam veduto, nel 1787, affermò che i suoi colleghi della Società filopatria gli " rassomigliavano un po' " tutti " e " dalla malinconia e dalla tetraggine, sia pure per " vezzo, non rifuggivano ". Erano della brigata (*aggiunse*) ...un

---

(1) *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino*, serie I, vol. XXI, Torino, 1813, pagg. 155-170.

(2) *Le " Riflessioni sulla poesia metrica italiana " di Vincenzo Marenco*, nel periodico *Il movimento letterario italiano*, anno II, Torino, 1881, n. 31 e segg. Il passo citato è a pag. 170. Il Girelli, come risulta dall'*Annuario* della nostra Università, fu licenziato in filosofia e lettere nell'anno scolastico 1881-82.

“ Camillo Maulandi... che poi consegnò il proprio magro bagaglio
“ poetico alle classiche stampe del Bodoni, degne di riprodurre
“ ben altra roba che i belati dell'ex ufficialetto (una ferita toc-
“ cata a Briga nell'infelice campagna del '94 l'aveva disgustato
“ del mestiere dell'armi), che invano sforzavasi di dar il tono
“ dell'amor disperato ad un'anacreontica: *Il dolore*, e altrove
“ chiedeva lena al Petrarca ‘ divo spirito, de' melanconici (*si*
“ *noti*) canti buon arbitro ’ „.

Per parte mia, consento col Girelli e cogli altri, che, prima di lui, notarono la dipendenza del Maulandi dal Fantoni: non saprei invece accordarmi col Bertana se non in una cosa sola, che è del resto la più importante, nel porre cioè il Maulandi fra i poeti men che mediocri. Prescindendo infatti dalle inesattezze sulla persona del preteso ex-ufficialetto, mi parrebbe ingiusto parlar soltanto di *belati* e non tener alcun conto dei sentimenti d' italianità espressi dal Maulandi, sia pure in forma letterariamente manchevole. Credo poi, soprattutto, che il Maulandi, il quale s'ispirava ad Orazio ed al Fantoni, non abbia nulla a vedere coi poeti dell'*Arcadia lugubre*, che davano invece la preferenza alle *Notti* di Young e ai famigerati poemi attribuiti ad Ossian.

Scrivere un'ode per una disgrazia amorosa non è certo prova sufficiente di pessimismo; tanto più quando alle *Nici* perdute si sostituiscono così presto le *Eugenie* e le *Nerine*. La designazione del Petrarca quale *buon arbitro dei canti melanconici* è per il Maulandi una semplice constatazione di fatto, per non dire un semplice riempitivo: al Petrarca, del resto, egli *chiedeva lena* per *spingere all'etere* Nice, allora sua amante anche nel senso più materiale della parola, e per cantare l'*amore mutuo* e altre cose tutt'altro che malinconiche.

Ho detto che il Maulandi dipende dal Fantoni. Un suo amico propose nel 1793, che si *confrontassero i due compagni cantori*, per vedere *qual parte di lustro ciascuno di essi* fosse *per arrecare al Parnasso italiano* (1). Trascorsi ormai più di cent'anni, il confronto sarebbe inutile, e crudele per il Maulandi, che non uscì mai dal gregge servile degli imitatori, che non ebbe

(1) V. sopra, pag. 711, n. 1.

assolutamente la padronanza della lingua italiana e non seppe far versi se non a furia di zeppe, moltiplicando le interiezioni e gli epiteti, troppo spesso volgari o mal scelti. Credo tuttavia, che importi fissar bene i rapporti fra il Maulandi e il Fantoni per riguardo alla metrica, essendo, a parer mio, fuor di dubbio, che l'accoglienza favorevole fatta alle odi del poeta piemontese è dovuta in gran parte ai così detti metri oraziani, che per molti lettori erano una novità.

Delle cinque odi pubblicate dal Maulandi nel 1787, due, cioè la seconda e la quarta, erano appunto composte coi metri nuovi, ch'egli non mancò di segnalare: “ *metro oraziano dell'ode XIX, libro I* „; “ *metro oraziano dell'ode XIII dell'Epodi* „. Si sarebbe però potuto dire, con maggior sincerità e maggior precisione: “ *metro dell'ode di Labindo a Venere* „; “ *metro dell'ode di Labindo a Luigi Fantoni* „ (1). Il Maulandi accolse infatti senz'alcuna modificazione i metri usati dal Fantoni nelle due odi citate, le quali risalgono al 1782. Fece anzi di più; saccheggiò addirittura l'ode a Venere, prendendovi talvolta, oltre alle parole e alle immagini, anche le rime (2). Ciononostante le due odi del Maulandi furono probabilmente molto lodate; ed egli scrisse quindi in metri oraziani tutte le odi seguenti, fatta solo eccezione per quella del 1788 in onore dei Principi di Piemonte. Non seppe però mai staccarsi minimamente dal Fantoni. Quindi l'ode del 1787, essa pure in onore dei Principi di Piemonte, corrisponde perfettamente nel metro e nella disposizione delle rime all'ode del Fantoni, che nell'edizione del

(1) *Ediz. cit.*, I, 10; II, 14.

(2) Il primo e il quarto verso dell'ode fantoniana e della maulandiana finiscono colle parole “ *ténere — Venere* „. Il *sen tumido* e il *labbro umido* rimano parimenti fra di loro in tutte due le odi. Solo il *seno tumido* della Licori fantoniana è coperto da un *velo azzurro*, quello di Nice da un *velo bianco*; e mentre il Fantoni si lagna che in lui “ di strali gravido — Tutto vuotò il turcasso Amor *terribile* „, il Maulandi dice che l'Amore è in sostanza un buon diavolo: “ Amor, no che *terribile* — Nume non sei, nè arcier dei cor venefico „. Lo stesso Maulandi fece inoltre tesoro, se non della *bionda treccia*, almeno dell'espressione *spingere all'etere*; e più tardi, nell'ode settima, oltre a ripetere le rime “ *ténere — Venere* „, volle egli pure *spingere all'etere* la sua Nice, ornata, per combinazione, di *treccia* non *bionda*, ma *biondissima*.

Lazzeri è la nona del libro I; e nello stesso modo l'ode sesta del *Saggio* corrisponde a Fantoni, I, 36; la settima a I, 3; l'ottava a II, 7; la nona a II, 23; la decima a I, 20; l'undecima a II, 43. Naturalmente ho indicato delle odi fantoniane, le quali sono tutte anteriori di parecchi anni alle corrispondenti maulandiane, cosicchè ogni questione di precedenza è assolutamente troncata.

Dopo tutto questo, ricercare, oltre alla già indicata, le altre ragioni, per le quali le poesie del Maulandi ebbero momentaneamente un certo buon successo, mi condurrebbe ad affrontare una questione d'indole generale, quella cioè della critica letteraria italiana, e specialmente piemontese, alla fine del Settecento. Preferisco invece concluder senz'altro, ripetendo a proposito del Maulandi l'osservazione, che suol servire di scusa a coloro che temono d'essersi troppo indugiati a dire *della vita e delle opere* di qualche scrittore appena mediocre: le poesie del Maulandi e dei suoi *compagni* posson esser studiate, *non per rivendicare glorie, non per far note bellezze nuove*, ma come *documenti della vita morale ed intellettuale sullo scorcio del secolo decimottavo*. Perciò la correzione d'un curioso errore del Botta fu per noi principio d'un così lungo discorso (1).

---

(1) Nota aggiunta. Dopo la pubblicazione della prima parte di questo lavoro, ebbi dalla cortesia dell'illustre collega Conte Giovanni Sforza le seguenti notizie raccolte nella quarta Sezione dell'Archivio di Stato torinese, del quale egli è degnissimo Soprintendente: " Maulandi Camillo, figlio di Andrea, d'anni 20, nato in Torino „ fu dal 24 gennaio 1778 " soldato volontario in soprannumero, per anni otto, senza ingaggiamento, nel Reggimento *Guardie* „; dal 1° novembre 1778 " tale effettivo in detto „; dal 20 giugno 1781 " sottotenente nel Reggimento *Ciablese* „; dal 28 giugno 1786 " tenente nel Reggimento provinciale *Susa* „; dal 4 aprile 1789 " capitano-tenente in detto „; dal 13 marzo 1793 " capitano aggregato al suddetto Reggimento ed applicato allo Stato Maggiore Generale dell'Armata „; dal 14 novembre 1795 " maggiore nelle truppe di fanteria „; dal 15 gennaio 1797 " capitano dei Pontonieri, Battaglione *Guastatori* „. Il Maulandi prese parte alle " Campagne delle Alpi 1793 e 1794. Ferito e prigioniero di guerra alla Ridotta di Fel il 27 aprile 1794. Restituito sulla parola in agosto 1795. Cambiato in novembre 1795 „.

La notizia più importante, che si ricava dallo stato di servizio del Maulandi, è che alla fine del gennaio 1778 egli aveva vent'anni. Dev'esser dunque nato nel 1757 o nei primi giorni del '58. Riguardo ai Maulandi di

Sospello, posso aggiungere alla notizia data a pag. 480, n. 1, che a un Filippo Maulandi di Sospello fu conferito il 22 maggio 1847 il titolo di *nobile*. La famiglia non si trova però nell'odierno *Elenco ufficiale delle famiglie nobili e titolate*.

Riguardo alla collaborazione del Maulandi alla *Biblioteca oltremontana*, debbo dire, a complemento e a parziale correzione di quanto scrissi a pagina 481, che articoli evidentemente del Maulandi, firmati coll'iniziale *M.*, si trovano nel vol. III del 1787, pagg. 225-238; nel vol. X dello stesso anno, pagg. 3-25; nel vol. IX del 1788, pagg. 274-294; nel vol. VII del 1789, pagg. 228-235, e forse altrove. Com'è noto, la *Biblioteca* si pubblicò, con parecchi cambiamenti nel titolo, dal 1787 al 1793; prima in volumetti mensili, poi, negli ultimi due anni, in volumi trimestrali.

I due sonetti del Parini, mandati dal Maulandi al Somis con lettera del 6 marzo 1790 e che lamentai di non aver trovati, sono certamente quelli scritti per il busto di Maria Ricciarda Beatrice d'Este, pubblicati dalla *Biblioteca oltremontana* appunto nel volume di marzo del 1790, pagg. 470-471. Il primo di essi si trova, senza varianti, nell'edizione delle *Opere* curata dal Reina, vol. II, Milano, 1802, pag. 36, e in quella di Monza, 1836, pag. 62. Vi manca invece, e non so se sia stato da altri segnalato, il secondo sonetto, che comincia " Questa, che le mie forme eterne rende ".

L'*anacreontica* del Maulandi *per nozze*, che abbiamo detto anteriore in ogni modo all'ode del 1792, fu scritta probabilmente nel 1788 per le nozze dell'avvocato *Carlo* Lajolo con *Felicita* Pagan, per le quali furon dati alle stampe una cantata ed un sonetto del chierico Gioseffo Massa (Torino, Briolo, 1788, di pp. 8 in 8° piccolo).

Ancora alcune piccole correzioni. A pag. 477, lin. 19, s'aggiunga *di* prima di *opera*; a pag. 486, lin. 4, in luogo di *entrambi* si legga *entrambe*; e a pag. 549, lin. 6 dal basso, *Autione* in luogo di *Ausione*.

La polemica di G. Locke contro le "idee innate,,

Nota del Prof. ARMANDO CARLINI.

SOMMARIO. — A chi mira la polemica lockiana? Risposte de' critici più notevoli. — Cenno sulla dottrina cartesiana delle idee innate. — Il 1° Libro del *Saggio* in relazione agli altri libri e alla filosofia lockiana in generale. — Cenno sul movimento del pensiero contemporaneo a Locke in Inghilterra. — Soluzione della questione proposta.

Per lunga tradizione, formatasi in Francia nel secolo XVIII e durata sino ad alcuni decenni addietro, la filosofia lockiana è stata considerata in decisa antitesi con quella cartesiana. Come Descartes è stato il fondatore dell'idealismo e dell'intellettualismo moderno; così Locke, si è ripetuto molte volte dal Cousin in poi (1), è stato il fondatore del sensualismo e dell'empirismo. Condillac e i materialisti francesi sono figli di lui, più o meno legittimi. Padre, dunque, sia pure incorrotto, o meno corrotto, ma, certamente, di corrotti figli.

Tale giudizio si è venuto via via modificando con lo sviluppo del senso storico nei critici della seconda metà del secolo scorso. I primi furono inglesi, il Tagart e il Webb (2), i quali, contro il Cousin, cominciarono a mettere in vista gli elementi intellettualistici della filosofia lockiana, e l'ultimo specialmente

(1) La prima pubblicazione delle lezioni del COUSIN su la *Philosophie de Locke* è del 1829.

(2) TAGART, *Locke's writing and philosophy historically considered and vindicated from the charge of contributing to the scepticism of Hume* (London, 1855); WEBB, *The intellectualism of Locke* (London, 1857).

azzardò di ravvicinarla alla kantiana, sembrandogli che Locke ponesse l'intelligenza come un apriori della esperienza.

Seguì un periodo, in gran parte tedesco, che discusse ampiamente sino a qual punto Locke potesse esser riguardato come un precursore del così detto criticismo kantiano (1). Per tal modo, la primitiva interpretazione, che lo metteva in rigida opposizione a Descartes, dileguava, e le relazioni tra i due filosofi apparvero sempre più intime (2). Non si poteva seguitare a confondere il sensismo, per es., di Gassendi e di Hobbes, con quello di Locke, perchè, mentre quelli sono ancora fuori dell'orbita cartesiana, questi ci è già dentro. Il principio del *Saggio su l'Intelligenza* implica che il punto di partenza della filosofia è la coscienza di noi stessi.

Ma ecco che in Germania, dopo questa scoperta, si è venuta determinando negli ultimi decenni una tendenza altrettanto decisamente opposta a quella che prevaleva in principio: onde il merito precipuo del Locke è sembrato al Windelband consistere in questo, di aver saputo " trovare una forma popolare di esposizione empirico-psicologica per le linee generali della concezione cartesiana „ (3). Dalla padella nelle brage!

Intanto, a far di Locke un cartesiano, in quel senso lì, sorgevano difficoltà da ogni lato. Per tacere del resto, la polemica famosa contro le " idee innate „, col relativo tradizionale concetto della " tabula rasa „ o " white paper, void of all characters, without any ideas „ — si è parata innanzi come una barriera insormontabile.

Trent'anni or sono, uno studioso, J. Geil, sotto la direzione del Windelband, tentò per primo di rimuovere l'ostacolo. In una stringata Memoria a stampa su *La dipendenza di Locke da*

---

(1) Cominciando col Drobisch, *Ueber Locke, den Vorläufer Kants* (in " Zeitschrift für ex. Phil. „, II, pp. 1-32, 1861). Su lui v. Spaventa, *Kant e l'empirismo* (1880), in *Scritti filosofici* (ediz. Gentile-Jaia, 1901).

(2) Cfr. A. de Fries, *Die Substanzenlehre J. Lockes mit Beziehung auf der cart. Phil. kritisch entwikelt und untersucht* (In. Diss. Brême, 1879); la dottrina di Locke non è contraria per principio a quella di Cartesio, se questa è interpretata in un senso dallo stesso Cartesio in vari luoghi consentito.

(3) *Storia d. fil.* (trad. it.), vol. II, p. 117.

Descartes (1), radunando dell'opera lockiana i principali punti di accordo col cartesianesimo, tentò di dare definitiva solidità alla tesi, col supporre che il primo libro del *Saggio* non fosse diretto, almeno nell'intenzione di Locke, contro Cartesio, come sempre si era creduto, ma contro i Neoplatonici di Cambridge; e s'indicavano il More, il Cudworth, ed altri meno esattamente, oltre Herbert di Cherbury (al quale sono dedicate alcune sezioni del secondo capitolo), quali i più probabili avversari presenti al pensiero di Locke. La dimostrazione della giustezza dell'ipotesi era incardinata, oltre che su le concordanze generali, sul fatto speciale che le idee innate combattute da Locke non corrispondono, nè per definizione, nè per le ragioni attribuite ai loro sostenitori, a quelle definite e sostenute da Cartesio.

La dimostrazione del Geil non parve abbastanza fondata a B. Erdmann, che, con una serie di citazioni, specialmente di fonti non utilizzate dallo scolaro del Windelband, mise in rilievo (2) che, oltre numerosi e fondamentali punti in cui Locke è agli antipodi di Cartesio, anche quelli apportati in favore del suo cartesianesimo non sono punto decisivi: sia perchè in Locke hanno un altro significato, e sia perchè, prima di stabilire ch'egli li derivò da Cartesio, bisogna dimostrare che non poteva derivarli da nessun altro. Le idee innate combattute nel primo libro del *Saggio* comprendono certamente anche quelle cartesiane, come le espressioni usate dal Locke per caratterizzarle dimostrano (3), anzi in prima linea quelle di Cartesio, e dei mistici o scettici cartesianizzanti d'accordo su quel punto (4). Che se già in Cartesio è possibile trovare un'interpretazione delle idee

(1) *Ueber die Abhängigkeit Lockes von Descartes* (Strassburg, 1887, Diss. dott.).

(2) *Jahresbericht über die neuere Phil.*, in " Archiv für Gesch. d. Phil. ", II (1889), pp. 99-121.

(3) Già il Fries, op. cit., aveva notato che per le idee innate, non concedendo Locke che il pensiero costituisca l'essenza dell'anima, neppure poteva concedere che ci siano dispositiones, da cui poi le idee o nozioni comuni o verità eterne, indipendenti da ogni stimolo esterno e dalle determinazioni della nostra volontà.

(4) Cfr. per questi J. E. Erdmann, *Versuch einer wiss. Dars. d. Gesch. d. neuern Phil.* (I B, 2 Abth., p. 99 sgg.).

innate, che, come " facultas ideas istas formandi ", non è molto lontana dalla origine lockiana delle idee — nel fatto Locke respinge anche questa parentela, vietando che tale " facultas " possa esser intesa nel senso intellettualistico degl'innatisti. Egli stesso in una lettera al Collins, pochi mesi prima di morire, a proposito delle critiche sollevate contro l'opera sua, dichiara inconciliabile ogni principio innatistico con la propria dottrina (1). L'Erdmann reputa poi che al primo libro del *Saggio* si sia data un'importanza soverchia: esso non rappresenta nè l'origine nè il fondamento della filosofia lockiana (2). Locke, infatti, non vien fuori dal movimento cartesiano, nè dall'opposizione a esso, ma dal più vasto campo dell'empirismo a lui contemporaneo. E l'opera sua, nell'insieme, non è tanto diretta contro Cartesio, quanto contro la tradizione scolastica: anche contro Cartesio, per quel che di scolastico era in lui rimasto (3).

Sarebbe dunque il primo libro accidentale in rispetto agli altri tre del *Saggio*? E questo, nel suo insieme, poteva essere semplicemente una polemica contro la Scolastica, alla fine del

---

(1) " Nothing can be advanced against it (sc. my Essay) but upon the " principle of innate ideas "; ma aggiunge: " in the sense I speak of in- " nate ideas ".

(2) Notisi che nell'Estratto del *Saggio*, pubblicato in anticipo (nel 1888: il *Saggio* uscì nel 1890) dal Le Clerc (trad. in francese) nella sua Biblioteca, il primo libro non compare. Il testo originale comincia così: " In the " thoughts I have had concerning the understanding, I have endeavoured " to prove that the mind is at first rasa tabula. But that being only " to remove the prejudice that lies in some men's minds, " I think it best, in this short view I design here of my principles, to " pass by all that preliminary debate, which makes the first book, " since I pretend to show in what follows the original from whence, and " the ways whereby, we receive all the ideas our understandings are em- " ployed about in thinking " (King, *The Life of L.*, II, 237). Il Bourne, *The Life of L.* (II, 102), suppone che il 1° libro sia stato scritto per ultimo.

(3) Il Geil replicò all'Erdmann nell'anno seguente su lo stesso " Archiv f. Gesch. d. Phil. ", III (1890), p. 579 sgg., prendendo a esaminare l'idea dell'esistenza di Dio e la dimostrazione della sua esistenza. Egli dimostrò che in Locke ci sono due punti di vista, l'uno empirico, l'altro metafisico, e che in entrambi è evidente l'influsso di Descartes. — La sua tesi precedente aveva avuto l'approvazione del Natorp, in " Philos. Monatshefte ", Bd. XXIV, p. 493.

sec. XVII? E l'empirismo suo, se aveva valore filosofico, poteva mancare di pigliar posizione in rispetto alla filosofia cartesiana? O diremo che Locke rimase fuori dello svolgimento del pensiero contemporaneo?

In seguito a queste discussioni, e quasi a metterne meglio in evidenza (inconsapevolmente, però) il punto debole, un altro tedesco entrò nell'arringo, con un volume ben lavorato, promettente gran novità nel titolo: *Locke e la Scuola di Cambridge* (1). Comincia con l'esposizione del *Saggio*, dal libro secondo, riconducendo le dottrine lockiane a quelle che, secondo lui, sono le due originarie e opposte tendenze non conciliate in Locke: l'empiristica e la razionalistica. Alla ovvia obiezione che pure si dovrebbe trovare un punto in cui le due tendenze si conciliassero nella viva mente del filosofo, egli risponde bruscamente che " Locke era in fondo un filosofo d'occasione, e tale era " anche lo Scritto a cui egli deve la sua rinomanza ". Era un medico. Poi si diede ai viaggi. Poi alla vita politica. Aveva troppe questioni pel capo. Manca di sistema e di principio fondamentale. Prese di qua e di là (2).

Lasciamo andare questo strano concetto del più grande filosofo inglese, e fermiamo la nostra attenzione alla parte che più c'interessa. L'Autore si propone di mostrare che per il razionalismo di Locke non c'è bisogno di ricorrere a Cartesio, ma basta fermarsi a quei teologi di Cambridge, contro i quali, male a proposito, il Geil l'aveva messo in opposizione. Giovandosi anche del lavoro del Tulloch (3), passa in rassegna More, Cudworth, Smith, Whichcote, Culverwell, Glanvill, e altri, notandone le affinità religioso-politiche, la comune opposizione a Hobbes, l'incertezza in rispetto a Cartesio. — Segue un capitolo (poco probante) su le relazioni di Locke con quei della Scuola. Contro il Tagart e altri nega l'influsso di Hobbes su lui, perchè Hobbes è un metafisico, e in metafisica Locke è sotto l'influsso dei teologi di Cambridge o de' loro amici, e tra questi ultimi

(1) G. v. Hertling, *J. Locke und die Schule von Cambridge* (Freib. i. Br., 1892).

(2) P. 93.

(3) *Rational Theology and christian Philosophy in England* (Londra, 2ª ed., 1874).

pare che il Boyle e il Glanvill giovino a intender meglio anche l'empirismo lockiano. — In fine, così preparata, vien la questione delle idee innate. Aggiustando l'opinione dell'Erdmann alla sua, egli è propenso a riguardare il primo libro del *Saggio* come un episodio occasionale, che tuttavia stava bene a proposito insieme col resto. Viene ora la questione: Contro chi è diretto? Se non è contro Descartes, come il Geil sostiene, neppure è contro que' di Cambridge. Allo Herbert non è il caso di pensare, perchè le sezioni a lui dedicate sono evidentemente un'aggiunta posteriore al primo concepimento (1). L'Autore conchiude che Locke combatte in prima linea una tendenza generale, non una dottrina determinata; e soltanto in seconda linea si accenna a una dottrina già formulata. — Ritorna la domanda: da chi? Da Descartes? Potrebbe essere: i cartesiani, infatti, rimasero disgustati della polemica lockiana (2). O da qualche platonico di Cambridge, che aveva accettato la dottrina cartesiana delle idee innate? Anche questo non si può escludere: su questo punto secondario c'è tra essi stessi disformità di pareri. C'è chi ha pensato persino a Cicerone (3), e l'Autore assicura che in realtà, almeno per certi lati, la coincidenza con la teoria combattuta dal Locke è abbastanza esatta (4). — La conchiusione finale è che miglior cosa è di rinunciare a trovare nella letteratura contemporanea l'esatta espressione della dottrina delle idee innate a cui Locke si riferisce (5).

---

(1) La sez. 15 del cap. II comincia così: " When I had written this, " being informed that my Lord Herbert had, in his book *De Veritate*, as" signed these innate principles, I presently consulted him, hoping to find " in a man of so great parts, something that might satisfy me in this " point etc. ".

(2) Lett. di Locke a Limborch del 18 maggio 1701.

(3) Webb, op. cit., p. 44.

(4) Su i rapporti in generale tra lo stoicismo latino e la filosofia di questo secolo, cfr. W. Dilthey: *Die Autonomie des Denkens* etc. *im 17. Jahr.* (in " Archiv " cit., VII, 1894, p. 28 sgg.). Sfugge a lui la diversità del processo con cui torna la dottrina stoica nel rinnovamento di questo secolo. Non così al Brochard, *Descartes stoïcien* (in " Études de phil. anc. et de phil. mod. ", Paris, 1912, p. 320 sgg.).

(5) Non portano a nuovi risultati: Thilly, *Locke's relation to Descartes*, in " The philosophical Review ", nov. 1900, p. 597 (Locke combatte Cartesio); Rose, *Die Lehre der eingeborenen Ideen bei Descartes und Locke*, in

A questo risultato, per la filosofia lockiana nel suo complesso, erano già arrivati altri, che pure movevano a indagini storiche senza un sicuro criterio di orientamento (1).

* * *

Per i limiti della presente Nota, dobbiamo contentarci di procedere per accenni. E, prima di tutto, pregare il lettore di ripensare all'origine e alla funzione delle idee innate in Cartesio, e come esse non costituiscano quello che in lui ha un valore filosofico permanente. Onde il cartesianesimo o non-cartesianesimo di un filosofo non può consistere nell'accettazione o nel rifiuto delle idee innate. Locke è cartesiano per questo solo fatto: che senza Cartesio non lo si spiegherebbe più. Egli è poi baconiano nello stesso senso, segnando, per così dire, il punto di coincidenza di quel che di più vitale era ne' due indirizzi di pensiero: indirizzi diversi, non opposti, ma che è gloria immortale di Locke avere svolti unificandoli nel principio dell'esperienza come coscienza di sè. L'esperienza per Cartesio è ancora un oggetto da interpretare: non è l'esperienza che l'intelligenza fa di se stessa, come è in Locke.

La dottrina delle idee innate non è un'invenzione cartesiana: nel Rinascimento neoplatonico-agostiniano c'è già, com-

---

" Bernerstudien ", XXXI, 1901. L'Ueberweg nel " Grundriss " ha pensato di riassumere così: " In dem ersten Buche der Untersuchung über den " menschlichen Verstand sucht Locke darzutun, dass es keine angeborenen " Vorstellungen gebe, wahrscheinlich in Polemik gegen Descartes' Lehre " von den ideae innatae, wobei er freilich auch scholastische und neuere " Philosophen wie Herbert von Cherbury und die Cambridger mit im Sinne " gehabt haben mag " (p. 196, 11ª ediz., 1914).

(1) Cfr. Lyon, *L'idéalisme en Angleterre* (Paris, 1888), p. 68: " Renonçons " à tenter plus longtemps de saisir une pensée qui nous fuit et se fuit " éternellement elle-même. Ce livre est une mêlée d'idées, de théories, " d'arguments contraires. Perpétuellement partagé avec lui-même, il donne, " en tout litige, raison tour à tour à chacune des parties adverses ". Etc. In questi anni, inglesi e tedeschi hanno gareggiato nell'esporre la filosofia lockiana come " un sistema di contradizioni ". Celebre il Green nelle Introduzioni alle opp. di Hume. Lo spunto era già in Hegel, p. 434 di *Gesch. der Phil.* (1836, 3° vol.).

pleta (1). Ognuno sa che l'argomento della certezza della propria esistenza e quello della esistenza di Dio come essere perfetto — non sono nuovi. Ma poi tutto è diventato nuovo nel processo del pensiero cartesiano, che trova in sè l'idea di Dio e dell'Io in quanto parte dal principio dell'assoluta realtà del pensiero. E così per l'esperienza del mondo, ch'ei vuol pensare matematicamente. Analizzando il concetto di quella realtà, scopre che essa è pura estensione. Ma dal concetto di pura estensione egli non potrebbe procedere oltre, perchè, essendo esso il più universale e indeterminato concetto di essere materiale, non potrebbe passare alle sue determinazioni, se Dio non lo soccorresse, dandogli, per così dire, la chiave o il piano da lui liberamente prescelto tra le infinite possibilità nella creazione mondana, cioè le nozioni prime, le prime idee e i primi assiomi. Ottenuto ciò, egli ripiglia la sua primitiva indipendenza e, per la già affermata identità del pensiero nostro col pensiero divino nella conoscenza della verità, può ora creare la scienza dell'universo intero. L'esperimento gli giova soltanto ne' casi in cui si presenta la possibilità di molteplici soluzioni.

Locke e Malebranche non chiedevano alla filosofia la scienza dell'universo, ma dell'intelligenza che lo pensa; epperò neppure di quelle nozioni prime ebber bisogno di chieder la rivelazione. Per entrambi, nessuna idea o nozione è presupposta all'attività dell'intelligenza, nostra (Locke) o divina (Malebranche), la quale le produce cavandole dal suo seno medesimo, conformi alla determinazione della propria libertà (Locke) o della propria essenza (Malebranche) (2).

In tal modo il loro cartesianesimo si svolge in direzione opposta, non soltanto a Cartesio, ma anche tra loro.

Abbiamo detto in che senso Locke è cartesiano: che è anche l'unico senso in cui un filosofo può essere scolaro di un altro filosofo. L'andar cercando tale relazione — che è cosa tutta spirituale — in ravvicinamenti di passi, divelti dall'insieme dei testi, è impresa disperata: essi non coincidono mai, anche dove

---

(1) Cfr. Ficino, *Theologia Platonica*, lib. XI, cap. III.

(2) Contro le idee innate, per Malebranche, cfr. *Recherche de la Vérité* lib. III, part. II, cap. 4.

sono più vicini, sì che è aperta la strada a sostenerne indifferentemente la dipendenza o l'indipendenza.

Per l'innatismo non c'era più posto nel *Saggio* lockiano sin dalle prime parole dell'Introduzione, in cui ci si propone di studiare, non gli oggetti della nostra intelligenza, ma l'intelligenza stessa. Le idee, se ci sono, e quel che sono, le dobbiamo trovare in essa, con la riflessione. E tutto il *Saggio* è una dimostrazione che noi siamo gli autori di ogni nostra concreta reale conoscenza.

Il primo libro, quindi, è intimamente legato a tutto il resto. Vediamone in breve il movimento del pensiero.

Capitolo Primo: " No innate Principles in the Mind „. L'ipotesi dell'innatismo è inutile se noi possiamo dimostrare che quelle nozioni o verità, che per tal modo ci verrebbero offerte, le possiamo acquistare da noi. Si badi che una verità la diciamo nella nostra intelligenza soltanto in quanto abbiamo coscienza d'intenderla: chè non ha senso affermare che " truths can be imprinted on the understanding without " being perceived „. Bisogna dunque mettersi dal punto di vista della nostra intelligenza, la quale nel suo svolgimento (empirico) ha il potere di produrre tutte le proprie conoscenze (nozioni e verità). Quindi, o tutte innate (in quanto abbiamo il potere di produrle) o nessuna innata (fuori di questo potere) [§§ 1-5]. Per quelli che ne fanno principii razionali — distinguendo fra intelligenza intuitiva e intelligenza dimostrativa (ragione), si prova che quelle verità (assiomi), appunto perchè evidenti (intuitive), non dipendono dalla ragione (non si acquistano col ragionamento). Si dirà allora che sono innate perchè intuitive? Ma le intuizioni (percezioni di rapporto tra due idee o nozioni) sono tutte evidenti nella stessa maniera. Quindi, o tutte innate o nessuna innata. Si vuol distinguere tra esse quelle che sono più generali, e dichiarare innate soltanto queste? Sarebbe un errore: perchè alle nozioni più generali e astratte, e però a intuirne i rapporti, si richiede una maturità d'intelligenza che s'acquista con fatica, e a cui neanche tutti pervengono. L'intelligenza si svolge gradatamente: i primi giudizi sono i più concreti e particolari [§§ 6-20].

Si tratta dunque di generalità, di principii di scienze particolari, di logica, di discipline, in somma, che s'apprendono

nelle scuole, dove bisogna imparare un certo linguaggio, certi termini, certe maniere di considerare le cose e di argomentare. Fuori di lì, non se ne sa nulla; ma non per questo non s'intende! Si può ragionare solidamente con la propria testa, anche di tutt'altre cose: come nello svolgimento abituale della vita ognuno fa. Anzi è dubbio se le scuole e le Accademie giovino assai alla conoscenza e allo svolgimento della verità e della scienza [§§ 21-28].

Questo primo capitolo non si comprende, se non si tien presente il resto del *Saggio*, e specialmente: lib. IV, cap. I, § 2: che cosa è conoscere; cap. II, 1-8: intuizione e dimostrazione; V-VIII e XII: proposizioni mentali e proposizioni verbali, proposizioni particolari e proposizioni generali, l'evidenza e immediatezza delle proposizioni, critica dell'importanza erroneamente data agli Assiomi (il cui vantaggio è soprattutto didattico), critica del verbalismo nelle scienze, quale è il concreto processo di svolgimento del sapere positivo.

Pel verbalismo e per le nozioni astratte, il lib. III è tutto interessante.

Per l'origine delle idee o nozioni, lib. II, cap. I, §§ 1-9: esse derivano dallo svolgimento delle concrete percezioni; riflettendo su le percezioni avute, fissiamo le idee semplici (capp. II-IX), e questa è la vera origine di tutte le idee, senza che ci sia bisogno di ricorrere all'innatismo, perchè, poi, con l'attività del pensiero, che separa, confronta, compone, ecc. (IX-XI), noi, combinando le idee semplici o ponendo certe relazioni tra loro, formiamo variamente le idee complesse (XII-XXVIII).

Capitolo Secondo: "No innate practical principles„: non esistono norme, regole pratiche innate [§§ 1, 4, 12]. Questo, con speciale riferimento alle lunghe celebri polemiche de' Teologi inglesi (More, Cudworth, Cumberland, ecc.) contro Hobbes. Gli appetiti sono principii innati, se si vuole, in quanto son principio di azioni, ma, certamente, non nel senso in cui si parla dagli innatisti di principii (norme etico-sociali). Di questi non ce ne sono, innati: essendo pratici, si vedrebbero nelle azioni, in atto. E non basterebbe nemmeno: perchè l'utilità, l'interesse egoistico, in molti casi potrebbe esser sufficiente a spiegare la conformità delle azioni a certe nozioni variabili e mutevoli, per cui, a seconda che quelle son lodate

o biasimate dagli altri, son chiamate virtuose o viziose. Le vere leggi morali sono le leggi divine, che noi possiamo conoscere e seguire con la nostra sola intelligenza, senza che ci sia bisogno di nessuna rivelazione o altra ipotesi dogmatica (cfr. lib. IV, capp. XVIII-XIX). L'appello degl'innatisti alla coscienza (*sensus interior*) e al consenso universale, degl'individui e delle nazioni, è vano: chè, cercare lì una testimonianza uniforme, è impresa disperata: tanta è la varietà e contrarietà de' principii che gli uomini paiono seguire nelle loro azioni [§§ 2-3, 5-7, 8-11, 13-14]. Del resto, se ci sono questi principii morali innati, li espongano, ce ne diano l'elenco. Che si sappia, soltanto Herbert di Cherbury ha tentato di determinarne il numero e la qualità; ma con poco risultato [§§ 15-19]. Si può conchiudere che l'ipotesi innatistica non soddisfa in niun modo: soltanto il pregiudizio, l'ignoranza, la poltroneria, ecc. possono favorire il comodo principio che ci son principii di cui non si deve neppur dubitare [§§ 20-27].

È difficile rendersi conto di molti punti, senza tener presente: il rapporto tra appetiti, desiderii, volontà; che cosa è la libertà o il potere di agire; l'importanza che han la ragione e l'educazione nel guidare le nostre azioni (lib. II, cap. XXI); il concetto di norme etiche e la loro origine (cap. XX, le idee di passioni; XXII, le nozioni di azioni; XXVIII, le idee di relazioni che noi poniamo tra le azioni: la moralità, le leggi, le norme sociali, vizi e virtù, ecc.: argomento ripreso, dal punto di vista nominalistico, in lib. III, cap. V e VI, 44-45). Un'idea cara al Locke: l'etica è una scienza dimostrabile come la matematica (lib. III, cap. XI, §§ 15-18; e nel lib. IV, II, 9-13; III, 18-20; IV, 7-10; XII, 11; XXI, 3). Ma altri punti sono meglio chiariti in questo secondo capitolo del primo libro.

Infine, il Capitolo Terzo: " osservazioni comuni " a entrambi i capitoli precedenti. Prima si parlò di principii (proposizioni, definizioni; norme, regole; massime teoriche o pratiche, di scienza o di azione); ora si parla di idee. I principii son composti di idee: se quelli fossero innati, sarebbero innate anche le idee che li compongono. Si citano alcuni assiomi e si accenna ad alcune massime (per la conoscenza e per l'azione), in cui sono incluse le idee di identità e differenza, possibilità e impossibilità, tutto e parte, Dio e ado-

razione, numero e sostanza. Non sono idee innate [§§ 1-19]: come possono esser tali, dunque, i principii? Nè giova l'ipotesi platoneggiante della reminiscenza: le idee sono un ricordo, sì, ma di una percezione passata, che fu un atto concreto del nostro pensiero [§ 20]. Conchiusione generale: Non c'è altra verità che quella che noi acquistiamo con l'uso della nostra intelligenza: il resto è illusione, vano orgoglio, castelli in aria.

Anche qui, bisogna tener presenti, oltre i luoghi citati del libro II su l'origine delle idee in generale, in particolare quella del numero (XVI), della sostanza (XIV, 17-20; a cui bisogna aggiungere il cap. VI del lib. III), di Dio (XXIII, 33-35), dell'identità e diversità (XXVII, sebbene scritto per la 2ª ediz. del *Saggio*).

***

Il primo libro, quindi, non soltanto è intimamente legato agli altri libri, ma rincalza e in alcuni punti compie (specialmente il 2° capitolo) le tesi del resto. È un preludio che è nello stesso tempo una conchiusione. Un'introduzione, in somma, che, probabilmente scritta dopo che gran parte dell'opera era già stata fermata, certo non è stata pensata prima. Si può considerare come una prova di ciò anche il fatto che ne' manoscritti precedenti alla pubblicazione dell'opera, e tra i pensieri del *Common-place book*, che documentano il lento lavorìo da cui quella uscì, non v'ha menzione veruna delle questioni innatistiche. Si può assicurare che la formazione storica della mente lockiana non prende le mosse di lì. E però, anche, che non è la via migliore, per intendere Locke, cominciar di lì e fare degli altri libri un naturale svolgimento di quella tesi: come pur si è fatto, specialmente nel secolo XVIII e nel secolo scorso, da quanti son partiti da quella interpretazione. Il *Saggio* è il frutto di un ventennio di meditazioni: ma l'Autore, invece di attendere a sistemare il suo pensiero anche letterariamente, pur seguendo un piano generale ben definito, venne accumulando a mano a mano nelle singole parti del lavoro episodi e ricerche che oscurano la chiarezza dell'insieme. Ma uno spirito unificatore, a cercarlo, si trova, e in esso tutta l'opera è potentemente organizzata. Noi abbiamo qui indicato il posto che ha in essa

il primo libro, e abbiamo corrette, per ciò, sia le tesi che lo riguardano come essenziale (di cui l'iniziatore si può considerare il Voltaire) e sia quelle che lo riguardano come accidentale (B. Erdmann, von Hertling).

Neppure è esatto considerarlo con J. E. Erdmann come un momento semplicemente negativo nel processo del pensiero lockiano (1), perchè, come abbiamo detto, esso integra e compie in alcuni punti il resto; e poi, non si possono far corrispondere momenti ideali a parti concrete di un'opera. Neanche il Fischer può contentarci: egli vuol far apparire il *Saggio* tutto quanto come un proseguimento dell'opera baconiana di purificazione della mente dagl'idoli, per derivar poi dall'esperienza il nostro sapere; e il primo libro avrebbe, quindi, un significato in quel senso: Locke avrebbe fatto valere un punto di vista baconiano contro Cartesio (" den baconischen Empirismus gegen Descartes " zu rechtfertigen ist Lockes erste Aufgabe „) (2). Già è strano che si debbano parificare due movimenti di pensiero che, separati da quasi un secolo di riflessione, han motivi, forme, spiriti molto diversi. L'empirismo di Locke è tanto lontano da quello baconiano, quanto questo è lontano da quello scolastico. Ripetiamolo: c'era passato di mezzo Descartes. E oramai anche Descartes era passato da un pezzo, e non si vede come potesse venire in mente al Locke di muovere in battaglia contro di lui. Nessun filosofo, anzi nessuno scrittore si piglia la pena di affrontare un problema che non sia presente, allo spirito suo e de' contemporanei.

Dove viveva, dunque, questo problema dell'innatismo? In Francia, presso quei di Port-Royal e presso Malebranche, non esisteva; de' cartesiani minori non è il caso di occuparci. Poichè noi dobbiamo trovare, non soltanto qualcuno che sostenesse l'innatismo, ma, più assai, la ragione di prendere in tanta considerazione questo problema, da parte di Locke.

Ebbene, un po' di attenzione al movimento della filosofia inglese da Bacone a Locke ci scopre, da Herbert di Cherbury († 1648) sino a Cudworth († 1688), un'ininterrotta discussione

(1) Cfr. op. cit., vol. 2°, parte I (1840), p. 21 sgg.

(2) K. Fischer, *F. Bacon und seine Schule* (3ª ed., 1904), p. 380.

proprio su la questione dell'innatismo (1). A essa prendono parte non soltanto i così detti Neoplatonici di Cambridge, ma, in generale, tutti que' teologi che, impegnati nella discussione del concetto di una Religione Naturale, proposto da Herbert nel *De Veritate*, non potevano esimersi dal pronunciarsi su i presupposti innatistici di lui. Che Herbert di Cherbury intervenga nel primo libro del *Saggio* a trattazione inoltrata, e come per incidente, non vuol dire che ci stia per caso. Anzi, il contrario: Locke non l'avrebbe fatto intervenire, se la dottrina di lui non avesse avuto qualche stretto rapporto con quella che stava esaminando. Con questo si concede che certamente non è stato Herbert che abbia indotto Locke a scrivere il Primo Libro. I filosofi d'Inghilterra dopo Herbert sono teologi, in gran parte naturalisti: ammiratori di Bacone e anche di Cartesio, sebbene lo avversassero fieramente, dopo l'apparizione del Leviatano di Hobbes (1651), si stringono in fascio per la difesa della morale e della religione, distrutte (a loro avviso) dall'empietà hobbesiana. Le rivoluzioni politico-religiose hanno la loro parte d'influsso nella disputa ardente. Nell'università di Cambridge la dottrina herbertiana si trasforma sotto l'assillo de' nuovi problemi, e si orienta verso l'idealismo cartesiano, senza tuttavia riuscire a una solida fusione. Nell'università di Oxford lo spirito baconiano è più vivo e spregiudicato. Negli anni di preparazione del *Saggio* la disputa vivace si svolgeva ancora tra l'apostolo del cartesianesimo in Inghilterra A. Le Grand, il Parker, di Oxford, il More, di Cambridge, e altri. L'ipotesi dell'innatismo dei principii della scienza, della morale, della Religione, fu largamente ripresa in esame. Non si trattava delle “ idee innate „ nel vero senso cartesiano, quale era stato propriamente in Cartesio. Ma di “ principii naturali „, da accettarsi dogmaticamente, non tanto per l'interpretazione dell'esperienza, quanto, e molto di più, per salvare dalla rovina (dal sensismo

---

(1) Cfr. mia Memoria su *Herbert di Cherbury e la Scuola di Cambridge*, in “ Rendiconti della R. Accademia de' Lincei „, Sc. mor. e pol., a. 1917; qui si accennano soltanto i punti principali per quel che riguarda il Locke. Pel resto, si veggano il Tulloch, op. cit., e Ch. De Rémusat, *Histoire de la phil. en Angl.* (Paris, 2ª ediz., 1878), per Lord Brook, J. Smith, Culverwell, More, Parker, Hale, Baxter, Barrow, Whitby, Halyburton, ecc.

e dal materialismo de' seguaci di Gassendi e di Hobbes) la logica e l'etica. Ad es., la giustizia e la santità de' contratti, di cui Locke tratta nel su esposto capitolo secondo (§ 5), dovevano essere principii posti da Dio nell'anima umana, raggi della bontà divina medesima, che tutto crea armonicamente perchè tutto a lei ritorni per un misterioso istinto di conservazione, nella natura fisica, non meno che nella natura spirituale e morale dell'uomo e della umana società.

Oggi, poco si parla più di quel periodo (tutt'altro che privo d'interesse, del resto) che precedette, nella storia della filosofia inglese, la pubblicazione del capolavoro di Locke. Dimentichiamo che alla luce improvvisa del *Saggio* si deve l'eclissarsi di que' bagliori che pure prepararono l'aurora novella. L'empirismo lockiano, pervaso da un fine senso critico che fa già pensare a Kant, si lascia dietro a enorme distanza tutti i tentativi precedenti.

Il primo libro del *Saggio* è un'occhiata gettata su quell'empirismo dogmatico, che pur tanto interessava i contemporanei, che credevano persino di aver superato Cartesio, senza propriamente neanche intenderlo, e gli opponevano o un naturalismo neoplatonico, che egli aveva superato di gran lunga, o un empirismo dozzinale, acritico. Ma, poichè pregi non mancavano in quei pensatori, specialmente nella trattazione del problema etico-religioso, così non fu inutile per Locke prenderli in considerazione. E non inutile crediamo anche la presente discussione, per chiarire l'insufficienza degli ultimi critici di lui.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Aprile 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Fusari e Panetti. — Scusa l'assenza il Socio Parona. Lo sostituisce come Segretario il Socio Segre.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio nazionale Taramelli ha inviato in omaggio due suoi opuscoli: *Risultati di uno studio geologico della provincia di Pavia*, e *La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni italiane nell'Adriatico.*

Il Socio Fusari offre in omaggio, per incarico del Dottore A. C. Bruni, una Memoria pubblicata da questo, *Sullo sviluppo della porzione ghiandolare dell'ipofisi nell'uomo.*

Il Socio Mattirolo comunica, per la stampa negli *Atti*, un suo scritto, *Giulio Camus e la sua opera botanica (1847-1917).*

Pure per gli *Atti* fu trasmessa dal Socio Parona una Nota del Prof. F. Sacco su *Una zona a Bathysiphon attraverso il Miocene delle Langhe*; ed è presentato dal Socio Segre un lavoro del Dr. Eugenio G. Togliatti, *Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazî ad* n *dimensioni.*

LETTURE

GIULIO CAMUS e la sua opera botanica (1847-1917).

Cenni biografici del Socio ORESTE MATTIROLO.

Lontano dalla patria e dalla famiglia, tormentato dalle visioni tragiche della guerra, sfiduciato del presente e dell'avvenire, colpito da male inesorabile, a poco a poco, ignaro di sè e delle cose che lo circondavano, spegnevasi in penosissima incoscienza il chiaro ingegno di GIULIO CAMUS, nella notte dal 25 al 26 gennaio 1917.

Nato a *Magny en Vexin* (Seine et Oise) il 1° giugno dell'anno 1847, dopo aver compiuto gli studi elementari e ginnasiali nella *Pension Jonquière* della città natia, seguiva a Parigi i corsi letterari del celebre Liceo *Louis le Grand*; e quindi, allo scopo di perfezionarsi nelle lingue principali, imprendeva a viaggiare in Inghilterra, dove dimorava lungo tempo, poi in Germania e in Russia.

A 33 anni GIULIO CAMUS era riuscito a possedere il francese, l'inglese, il russo, il tedesco in modo perfetto, avendo egli indefessamente studiato tali idiomi anche nelle loro origini e nella loro letteratura.

Nell'anno 1873, GIULIO CAMUS venne in Italia per imparare la lingua nostra e prese dimora in Padova, come istitutore dei figli del generale russo PONINSKY dapprima, e quindi, nello stesso ufficio, dimorò presso la famiglia dei Conti TREVES (1).

(1) Le notizie qui riferite della vita di GIULIO CAMUS io ebbi in parte da lui stesso, e in parte mi furono comunicate dalla sua adorata sorella, la signora BLANCHE CAMUS in MÉLINAND, ora a Milly (Seine et Oise), e dagli amici suoi, Professori OTTO PENZIG, EDMONDO BONNET e PAUL DORVEAUX, ai quali mi è gradito dovere esprimere cordiali ringraziamenti. Alcuni dati

Fu in quel turno di tempo che egli si legò in affettuosa e salda amicizia, durata poi sempre intima e cordialissima, con OTTONE PENZIG, allora assistente del Prof. P. A. SACCARDO, e lo seguì in moltissime escursioni botaniche ai colli Euganei, ai colli Berici, al monte Summano, a Chioggia, al bosco Cansiglio, ecc., innamorandosi, egli pure, al contatto dell'amico, della scienza dei vegetali.

Nell'anno 1881, chiamato il PENZIG alla Direzione della Stazione agraria di Modena, essendo egli stesso nominato, dietro concorso, insegnante di lingua e letteratura francese alla Regia Scuola militare di Modena, il CAMUS seguì l'amico, e con esso rimase in un più intimo e fraterno contatto, facendo con lui vita comune, seguendone gli ammaestramenti, applicando con lui ogni sua attività allo studio della botanica.

OTTONE PENZIG si interessava allora alla Teratologia vegetale, e l'amico suo ne seguì l'esempio dedicandosi a questo studio con identità di intenti e di passione.

Come frutti degli studi comuni e del reciproco aiuto scientifico, delle discussioni, delle escursioni, vennero fuori interessanti lavori, che da una parte condussero il PENZIG alla pubblicazione dell'importante opera sulla *Teratologia delle piante* (1); e dall'altra portarono il CAMUS alla compilazione di parecchie pregevoli note di Teratologia, che il lettore troverà elencate nella Bibliografia.

Sono osservazioni, alcune assai notevoli, che riguardano una quantità considerevole di fatti teratologici (fasciazioni, saldature, torsioni, frondescenze, sdoppiamenti, sinanzie, sincarpie, pelorie, ecc., ecc.), che il CAMUS andava mano mano raccogliendo e diligentemente studiando nelle escursioni coll'amico, nei dintorni della città di Modena.

Esse rappresentano un complesso interessante di materiali

---

ho trovato elencati in P. A. SACCARDO, *La Botanica in Italia*, Venezia, 1895, e DE GUBERNATIS, *Dictionnaire des écrivains*, p. 488. Avendo avuto l'onore di conoscere il CAMUS nella sua qualità di *Botanico*, considererò l'opera sua da questo lato solo, non riconoscendo in me competenza sufficiente a parlare di lui, come linguista, bibliofilo, storico e matematico.

(1) O. PENZIG, *Pflanzen Teratologie*, vol. I, Genova, 1890; vol. II, Genova, 1894.

di studio, di cui si valse il PENZIG nella compilazione della sua opera.

In questo stesso periodo di tempo l'attività scientifica dei due amici si rivolse eziandio allo studio del preziosissimo *Ducale Erbario Estense* (v. Bibliografia), che il CAMUS, dietro indicazioni del Prof. CESARE FOUCARD e del Dott. PICAGLIA (1), aveva scovato nella locale Biblioteca Estense.

La Collezione, oggetto di uno studio diligentissimo anche nei più minuti particolari, nelle filigrane dei fogli, nei nomi, nei documenti storici dell'epoca, ecc., portò alla conclusione che il rarissimo cimelio dovesse risalire ad un'epoca certo anteriore al 1560; che esso provenisse da Ferrara; e che a Modena vi fosse portato dal Duca CESARE DI ESTE, quando, abbandonata Ferrara ai Pontefici, la Corte Estense si ridusse a Modena; e che finalmente la pregevole collezione fosse stata messa insieme da un anonimo giardiniere dei Duchi.

La illustrazione di questa collezione, ricca di note storiche, linguistiche, di particolari che interessano tanto il botanico, quanto il glottologo e il *folklorista*, riveste una importanza eccezionale, e dà modo di apprezzare la perfetta fusione delle speciali attitudini dei due collaboratori.

Questo lavoro in comune decise il CAMUS ad occuparsi da solo di quelle ricerche storiche sui primi Erbarii, che lo portarono poi successivamente a geniali studi di lessicografia botanica e a quelle illustrazioni di codici botanici antichi e rari, nelle quali ebbe campo a rifulgere la varietà della sua estesissima cultura. Questa lo trasse più tardi (forse anche per la lontananza dell'amico e della sua influenza) ad abbandonare quasi interamente il campo di studi che egli aveva fino allora coltivato, e ad occuparsi poi quasi esclusivamente di cose storiche, linguistiche e letterarie.

Interessantissime sono le ricerche del CAMUS sulla Storia dei primi Erbarii. Esse provano con argomenti di non dubbio valore che le collezioni di questo genere rimontano alla prima metà del secolo XVI.

---

(1) C. FOUCARD, *Esposizione di documenti storici dal IX al XIX sec.*, ecc., pag. 21, Modena, 1882; L. PICAGLIA, *Bibliografia botanica della Provincia di Modena*, " Atti della Soc. dei Naturalisti di Modena ", serie III, vol. II, 1883.

Al botanico inglese Giovanni Falconer, secondo gli studi del Camus, spetterebbe l'onore di aver fatto conoscere la pratica di essiccare le piante onde comporre collezioni od *Erbarii*. Tale pratica andò poi rapidissimamente divulgandosi, essendo dimostrato che pochi anni dopo il passaggio del Falconer a Ferrara (1540-47) l'uso di comporre Erbarii era in Italia dovunque praticato; le specie essiccate si distribuivano allora fra i Colleghi, iniziandosi così quel sistema di scambi che doveva poi contribuire potentemente allo sviluppo della scienza dei vegetali.

Il Camus con dovizia di documenti inediti, con acume di critico, si è occupato di questo luminoso periodo di tempo, dandoci visione di quel movimento innovatore, manifestatosi sopratutto in Italia, per effetto del quale la botanica andò rapidamente acquistando dignità di scienza indipendente tanto dalla medicina quanto dalla agricoltura.

Quantunque l'opinione suespressa del Camus circa l'opera del Falconer, sia stata poi dimostrata erronea dalle ulteriori ricerche di Penzig, Celani, Chiovenda, De Toni (1), le quali,

---

(1) Credo utile cosa accennare in questa occasione alle principali pubblicazioni che si riferiscono a questa importantissima disputa scientifica, imperocchè tali lavori si collegano a quelli del Camus e in certo qual modo ne sono corollario e sintesi. Camus diede la spinta a quelle ricerche sulla origine degli Erbarii e successivamente alla illustrazione dei vecchi Erbarii, alle quali dobbiamo oggi la conoscenza del luminoso periodo nel quale il genio italico aiutato dalle conoscenze delle antiche sorgenti del sapere, rivoltosi allo studio diretto della natura, formò lo spirito moderno delle scienze naturali.

Vedi O. Mattirolo, *L'opera botanica di U. Aldrovandi (1549-1605)*, Bologna, 1897; Id., *Illustrazione del 1° volume dell'Erbario di U. Aldrovandi*, " Malpighia ", Genova, 1899; Id., *Lettere di U. Aldrovandi a Francesco I e Ferdinando I Granduchi di Toscana,* " R. Acc. Sc. Torino ", 1894, Serie II, tomo LIV. — E. Celani, *Sopra un Erbario di Gherardo Cibo conservato nella Biblioteca Angelica di Roma*, Genova, " Malpighia ", 1902. — E. Chiovenda, *A proposito dell'Erbario di Gherardo Cibo*, " Annali di Botanica ", Roma, 1903. — O. Penzig, *Contribuzioni alla Storia della Botanica.* I. *Illustrazione degli Erbarii di Gherardo Cibo*, Genova, 1904. — E. Chiovenda, *Nuovi studi su due antichi Erbarii della Biblioteca Angelica di Roma*, Milano, 1907. Congresso dei Naturalisti italiani, 1906. — O. Penzig, *Contributo alla Storia degli Erbarii*, Milano, 1907. Congresso dei Naturalisti italiani. — E. Celani e O. Penzig, *Ancora sugli Erbarii conservati nella Biblioteca Angelica*, Ge-

dopo un interessantissimo dibattito durato dal 1902 al 1909, provarono che il merito di aver composto la prima raccolta di piante essiccate in un Erbario, dovesse essere attribuito invece che al FALCONER al suo celeberrimo maestro LUCA GHINI (alla cui Scuola crebbero tra gli altri ALDROVANDI, CESALPINO, FALLOPPIA, MARANTA, ANGUILLARA, MATTHIOLI, TURNER, FALCONER, ecc.), ritornandosi così all'opinione espressa nel 1857 da ERNESTO MEJER; pure le ricerche del CAMUS sono rimaste nella scienza come opere fondamentali, tanto è in esse viva la visione del complesso periodo storico da lui trattato con mano maestra, con competenza e chiarezza ammirabili.

Gli studi del CAMUS sul *Circa instans* di PLATEARIUS, la celebre opera della Scuola salernitana (così detta dalle prime parole del prologo); e quelli sul *Grant herbier en francoys*, due Codici del XV secolo conservati nella Biblioteca Estense a Modena, rappresentano, dal punto di vista della erudizione bibliografica e della lessicografia, il maggior lavoro sbocciato dalla vasta cultura del CAMUS del periodo della sua vita modenese.

I linguisti, forse più che i botanici, ed i bibliofili amanti delle carte rare hanno trovato in questa sua memoria una miniera di notizie importanti, e molti dati per gli studi riferentisi alla Scuola salernitana sono venuti alla luce con queste ricerche originali.

---

nova, 1907, " Malpighia ". — E. CHIOVENDA, *Sugli Erbarii della Biblioteca Angelica di Roma. Replica*, " Annali di Botanica ", vol. VI, 1908; ID., *Intorno all'Autore dei due antichissimi Erbarii che si conservano nella Biblioteca Angelica di Roma*, " Rendiconti Accad. dei Lincei ", vol. XVII, serie V, 1908; ID., *Francesco Petrollini botanico del secolo XVI*, " Annali di Botanica ", vol. VII, Roma, 1909. — G. B. DE TONI, *Le lettere del medico Francesco Petrollini ad Ulisse Aldrovandi e Filippo Teodosio*, Padova, 1908; ID., *Notizie intorno ad un erbario perduto del medico Francesco Petrollini, anteriore al 1553. Spigolature Aldrovandiane*, vol. VII; ID., *Illustrazione del II volume dell'Erbario di Ulisse Aldrovandi*, Venezia, 1908, " Atti Istit. Veneto ", tomo LXVII, parte II; ID., id., III vol., " Malpighia ", vol. XXII, Genova, 1908; ID., *Spigolature Aldrovandiane I a XIII*, 1907-1912; ID., *Sulla origine degli Erbarii*, " Soc. Nat. Modena ", Serie IV, vol. VIII, Modena, 1906.

Molti altri lavori di G. B. e ETTORE DE TOMI, di CERMENATI, MORINI, BALDACCI, ecc. vorrebbero essere qui ancora ricordati. Per ragioni di spazio io ho dovuto limitarmi a registrare quelli soli che più direttamente hanno rapporto alle ricerche surricordate.

Perchè il lettore possa giudicare intorno alla importanza dei due manoscritti scoperti e illustrati dal Camus, giova notare che di simili trattati medioevali con miniature di piante, altri non si conoscono all'infuori del *Liber de simplicibus Benedicti Rinii*, della Marciana di Venezia, esaurientemente oggi studiato da Ettore De Toni, composto circa il 1415; e del *Dioscoride* di Vienna, celebre manoscritto eseguito nell'anno 505 per ordine della Imperatrice Julia Anicia.

Il Codice estense assume poi una importanza somma per la storia della Scuola salernitana, perchè rappresenta l'unica copia oggi esistente di questo trattato, dappoichè quella scoperta e studiata da Ernesto Mejer è fatalmente scomparsa dalla Biblioteca di Könisberga, fino dall'anno 1858, senza che da allora se ne abbia più avuto notizia.

Questi ed altri molti lavori del Camus, come quelli sulla seconda traduzione della *Chirurgia* di Mondeville; sopra un Ricettario francese del XIV secolo; sopra un manoscritto di Namur del XV secolo, ecc. (v. Bibliografia), alla importanza linguistica aggiungono un interesse speciale per lo studio del *Folklore* di Francia, di cui il Camus si occupava con particolare competenza e con amore, così che il Rolland ne ricercò la cooperazione quando iniziò la compilazione di quel tesoro di notizie linguistiche e folkloristiche, riassunto nei volumi della celebre sua *Flore populaire*, ossia raccolta dei nomi dati dal popolo ai vegetali, dei proverbi, delle *devinettes*, dei racconti e delle superstizioni che li riguardano presso i popoli europei.

Nel 1887, Ottone Penzig, chiamato per concorso alla Cattedra di Botanica dell'Università di Genova, fu costretto ad abbandonare l'amico, e così forzatamente si chiuse il lungo periodo di vita comune, che tanta benefica influenza aveva esercitato sulle tendenze scientifiche del nostro Camus.

L'amicizia tra i due però non si spense col distacco; ma la relazione intima di questi uomini chiari si mantenne sempre uguale, sempre affettuosa e cordiale, legati strettamente dall'ideale scientifico, che aveva saputo affratellare un francese ed un tedesco, però naturalizzati italiani.

Ho segnato questa data, perchè essa ebbe sulla vita e sulle abitudini del Camus un'influenza notevole, per ciò che egli trovatosi solo in Modena abbandonò lo studio peripatetico della

botanica, e tutto si chiuse in se stesso diventando uomo di biblioteca.

Nel 1889 anche il CAMUS lasciava Modena, chiamato a Torino come Professore di lingua e di letteratura francese alla R. Scuola di Guerra.

Fissata la sua dimora a Torino e nel frattempo essendosi ammogliato l'amico, ogni anno durante le vacanze della Scuola e dell'Università, nella quale aveva ottenuto per incarico l'insegnamento della letteratura francese, il CAMUS imprese a recarsi in Francia, per rivedervi la sorella e i congiunti, e attendere a ricerche nelle Biblioteche di Parigi.

Cordiali e intimi rapporti egli riannodò con conoscenze antiche e specialmente con EDMONDO BONNET, il coltissimo assistente botanico del Museo di Storia naturale di Parigi, e con PAOLO DORVEAUX, il dotto Bibliotecario capo della Scuola superiore di Farmacia, con EUGENIO ROLLAND e coi dirigenti della *Bibliothèque Nationale* di Parigi, nella quale egli soleva trascorrere si può dire tutto il tempo delle vacanze.

Da queste gite frequenti, che gli offrivano il modo di vivere liete giornate nell'ambiente caro ai suoi sogni di erudito, nella compagnia e nell'intimo contatto con scienziati valorosi, animati dagli stessi ideali suoi, menti colte, che alle ricerche di erudizione dedicavano la maggior parte delle loro attività, il CAMUS ritornava a Torino, entusiasta, felice della ricca messe di note e di appunti, che ordinava e completava nell'intento di scrivere un'opera di lunga lena sui miniaturisti francesi e specialmente su quelli derivati dalla Scuola di GIOVANNI BORDICHON. A questi l'arte deve il celeberrimo *Livre des grandes heures* della famosa Regina Anna di Bretagna, che il CAMUS aveva studiato a Parigi sotto il doppio punto di vista linguistico e botanico (v. Bibliografia).

Il merito di tale caposcuola, del quale il CAMUS si era innamorato, era stato quello di aver egli rinunciato a seguire l'andazzo degli alluminatori medioevali che si beavano unicamente dei motivi floristici immaginarii, adatti soltanto allo sfoggio di tinte e di colori brillanti. Il BORDICHON infatti fu il primo dei miniaturisti che si inspirò direttamente alla natura, copiando le più variate piante che gli capitavano sotto mano nei campi, nei boschi, nei giardini.

Alle rose, ai gigli, ai papaveri e a poche altre piante convenzionalmente trattate dai suoi predecessori, egli volle sostituire un ricco complesso di specie, che il Camus ha calcolato a più di trecento.

Quantunque Bordichon non abbia dipinto preoccupandosi di fare della botanica pura, ma abbia trattato i fiori e le piante attratto più dall'effetto pittorico che dalla rappresentazione esatta dei particolari e che molte volte si sia lasciato trascinare ad alterare le forme delle foglie e dei fiori dipingendo e componendo colla fantasia, pur tuttavia in complesso, come risulta dal lavoro analitico del Camus (il quale potè giovarsi dei manoscritti di Jussieu e delle pubblicazioni di Decaisne, di Curmer, di Lalanne, Delisle, De Mely, ecc., di quanto insomma precedentemente era stato scritto intorno al gioiello della Biblioteca nazionale di Parigi), giunse il Bordichon a suscitare colle sue miniature l'ammirazione non dei soli artisti, ma anche quella dei botanici.

Come bene scrisse il Molinier, le ornamentazioni floreali che decorano i margini dei fogli del celebre suo *Livre des heures*, formano *un véritable herbier peint par un artiste de talent* (1). Jean Bordichon, capo di una Scuola schiettamente francese, la cui pittura si distingue per caratteri netti e precisi dalle Scuole italiane e fiamminghe contemporanee, nato a *Tours* circa il 1437 e morto nel 1521, fu allievo di Jean Fouquet, al quale successe nella carica di pittore del Re, e si suppone abbia visitato l'Italia.

Il Camus stava appunto diligentemente studiando nella Biblioteca nazionale di Torino due celebri opere, che egli, con documenti storici e con ragionamenti artistici, stimava di poter attribuire al pennello di Bordichon, cioè le traduzioni di Appiano d'Alessandria e di Tucidide, ambedue dovute a Claudio di Seyssel, che fu vescovo di Marsiglia; quando, sventuratamente, le due opere insigni vennero quasi per intero distrutte dal terribile incendio che divampò nella notte tra il 25 e il 26 gennaio dell'anno 1904.

Il disastroso, terribile avvenimento, che colpì così acerba-

(1) A. Molinier, *Les manuscrits et les miniatures*, p. 370, Paris, 1892.

mente l'animo di tutti gli eruditi, piombò il CAMUS nel più doloroso dei disinganni! Nel più brutale dei modi, di colpo, venne tolta a lui la visione di un tesoro lungamente accarezzato nel desiderio di farlo conoscere ed apprezzare al mondo dei bibliofili e degli artisti.

Le due fotografie che il Prof. CHATELAIN, della Università di Parigi, aveva provvidenzialmente eseguite tre mesi prima del fatale incendio, per rispondere a un desiderio del CAMUS, e che questi, un anno dopo l'incendio, volle pubblicare e commentare nel giornale *l'Arte* del VENTURI, rappresentano oggi quanto è rimasto dei Codici preziosi, che a forza di paziente erudizione e di sagaci documentazioni il CAMUS sperava di far rivivere in onore del sommo miniaturista francese.

Tanta fu la disillusione risentita dal CAMUS per la perdita di questi e di altri consimili materiali di studio, che egli, abbandonando ogni ricerca, non volle più attendere a quel suo lavoro sui miniaturisti, attorno al quale da tanti anni si affaticava e dal quale i cultori d'arte avevano sperato nuova luce e nuove documentazioni.

Ricordando, mentre scrivo, con senso di dolorosa tristezza l'avvenimento luttuoso, mi ritorna alla mente la visione della figura di GIULIO CAMUS, quale io la contemplai allora oppressa dallo sconforto e dalla desolazione; e un senso di pietosa compassione mi assale, ripensando al dolore immenso del povero amico, che, perdutamente innamorato di tante bellezze, vide a un tratto perduti per sempre, sfumati, quei tesori d'arte e di cultura verso i quali si elevavano i palpiti del suo cuore, le aspirazioni della sua anima ardente di bibliofilo e di artista.

E notisi che a Torino un caso fortuito impreveduto e imprevedibile fu origine del disgraziato avvenimento, certo non dovuto a ordini freddamente calcolati e tenacemente voluti come mezzo orribile di crudele avvertimento ai vinti, come lo furono gli scempii mostruosi di ogni cosa bella, santa, venerata da secoli, compiuti nefandamente dagli Unni moderni che si atteggiano a banditori della *Kultur*!

Povero CAMUS, quanto ha sofferto di poi il tuo cuore di francese!

Oltre alle memorie principali di cui ci siamo occupati, altri studii di minore importanza, editi a Modena e a Torino e

in Francia (v. Bibliografia), furono rivolti dal Camus alla conoscenza di Erbarii di minore importanza, pure da lui scoperti in varie biblioteche e presso privati.

Collezioni che giacevano ignorate e che egli seppe far rivivere ed illustrare considerandole dal punto di vista storico-botanico e lessicografico.

Parecchi lavori di pura lessicografia botanica vanno ricordati come costituenti materiali di studio particolarmente interessanti per gli specialisti.

Alcune noterelle di sistematica (v. Bibliografia) dimostrano la sua competenza anche in questo campo della botanica, di cui il Camus si occupò unicamente nel periodo di tempo nel quale faceva vita comune col Penzig.

Il Camus si interessò anche di problemi matematici, e alcune formole nuove approssimative per il perimetro dell'ellisse, pubblicate nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, dimostrano (come gentilmente mi riferiva l'illustre matematico Peano) che egli aveva ottime conoscenze anche in questo speciale campo di scienza.

Mente enciclopedica, dotata di vastissima cultura, sorretta da memoria tenacissima, per naturale inclinazione portato alla misantropia, Giulio Camus in tutta la sua vita subì il fascino, più che delle viventi, delle cose passate, che egli ricercò nei relitti delle lingue, nei documenti della storia, nelle manifestazioni dell'arte primitiva.

L'opera complessiva del Camus, se non va distinta nè per lampi di idee innovatrici, nè per concezioni nuove, si presenta invece a noi prestantissima per ciò che essa ci rivela in lui lo studioso, l'erudito di razza, l'analizzatore coscienzioso, minuzioso, paziente e sagace.

Tutta la produzione così variata del suo ingegno, sia che ricerchi la storia, sia che si occupi di scienza, sia che si accinga ad illustrare manifestazione d'arte, sia che tenti sviscerare oscuri problemi di linguistica e di matematica, ci dimostra il ragionatore preciso che sente e vive nell'ambiente che lo interessa, che lo interroga nei più minuti particolari e che non lo abbandona se non quando è convinto di aver penetrato appieno il campo della indagine.

Così egli è riuscito a sciogliere problemi ardui, a scoprire codici ignorati, che giacevano da secoli polverosi aspettando

chi ridesse loro alito di vita e profumo di novità, a illustrarli e a presentarli al pubblico lumeggiati in ogni loro particolare, a seguire il pensiero creatore dell'artista, a rendere infine chiara e utile ogni sua indagine.

La Botanica più che nella libera natura egli la studiò sui libri, nelle raccolte ignorate. La storia della nostra Scienza è debitrice a lui di molta luce nuova e molti nomi di valenti ingegni risuscitarono per opera sua.

Per quanto mi fu possibile, ho messo amoroso impegno a raccogliere l'elenco delle pubblicazioni del compianto amico, convinto di fare opera utile, imperocchè non pochi dei suoi lavori comparsi in periodici poco noti alla generalità dei botanici, si trovano raramente citati nelle bibliografie, e alcuni altri, per la modestia dell'Autore, rimasero si può dire ignorati.

Ho ordinato l'elenco per materie onde rendere più pratica la ricerca e la consultazione della ricca produzione scientifica di questo modesto e coltissimo lavoratore, così benemerito della storia della nostra Scienza.

Negli ultimi anni di sua vita il Camus, che a poco a poco andava ritirandosi dal consorzio degli amici, trascorreva intere le giornate nella Biblioteca nazionale, nè per quante sollecitazioni gli si facessero riuscivamo ad averlo fra noi come un tempo.

Anche le brevi sue apparizioni all'Orto botanico nel cenacolo degli amici, avevano perduto ogni impronta vivace, nè più brillava il suo sguardo quando si parlava di scienza, o si discuteva di argomenti a lui prediletti, che alcuni anni prima avrebbero eccitato il suo caloroso interessamento.

La tragica bufera rovesciatasi sulla patria sua, il dolore per la perdita, sul campo dell'onore, di valorosi e amati congiunti, minavano lentamente la sua fibra già colpita dai prodromi di quella lenta e fatale malattia che lo spense inconscio di sè e del mondo che lo circondava.

Ebbe ventura di molte e chiare amicizie. Dai letterati, dai linguisti, dai colleghi della Facoltà di Lettere il suo consiglio fu sempre apprezzatissimo e ricercato, la sua cultura ammiratissima. Non fu oratore, ma maestro efficace, convincente, amorevole. Accademie e Società scientifiche si onorarono di annoverarlo fra i loro membri più autorevoli.

Egli fu eletto Socio dall'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dall'Accademia florimontana di Annecy, da Società varie di Storia e di Letteratura e di Botanica. Il Governo italiano lo nominava Cavaliere della Corona e quello francese gli conferiva il titolo di Officier de l'Instruction publique. P. A. SACCARDO gli dedicava la *Phyllosticta Camusiana*.

Onesto, leale, generoso, lavorò, si può dire, finchè visse, cercando nel lavoro il sollievo alle tristezze della sua vita di solitario.

Fra gli amici, fra gli allievi della R. Scuola di Guerra e dell'Università di Torino, fra i colleghi lasciò intenso e vivo desiderio di sè; la sua perdita fu sentita col più sincero rimpianto da quanti ebbero la ventura di apprezzare i pregi della sua mente e del suo cuore.

Elenco delle opere di GIULIO CAMUS.

Note di Teratologia.

CAMUS J. — *Tératologie du " Paliurus aculeatus „ Lam. et du " Gleditschia triachantos „ L.*, " Feuille des jeunes Natural. „, XIV anneé, n. 167, Paris, 1884.

ID. — *Tératologie des Ranunculus*, " Feuille des jeunes Naturalistes „, XIV année, n. 164, p. 102, Paris, 1884.

ID. — *Poliphyllie du Trèfle*, " Feuille des jeunes Natur. „, XV année, n. 169, Paris, 1884.

ID. — *Anomalie e varietà nella Flora del Modenese*, " Atti della Società dei Naturalisti di Modena „, Rendiconti, Serie III, vol. II, 1884 (*1ª Contribuzione*).

ID. e PENZIG OTTO. — *Anomalies du " Rhinanthus Alectorolophus „ Loin*, " Feuille des jeunes Naturalistes „, XVI année, n. 182, Paris, 1885 (avec planche).

ID. — *Anomalie e varietà nella Flora del Modenese, 1885* (2ª *Contribuzione*), " Atti della Soc. dei Naturalisti di Modena „, Serie III, vol. II, 1885; (*3ª Contribuzione*), ivi, 1887.

Camus J. e Penzig Otto. — *Les Véroniques et leurs altérations morphologiques*, " Revue de Botanique ,, tom. IV, n. 53, pp. 212-220, Auch, 1886.

Id. — *Anomalie e varietà nella Flora del Modenese* (3ª *Contribuzione*), " Atti della Società dei Naturalisti di Modena ,, S. III, vol. III, pp. 75-85, Modena, 1886-87.

Id. — *Alcune nuove osservazioni teratologiche sulla Flora Modenese*, " Atti della Società dei Naturalisti di Modena ,, S. III, vol. VII, pp. 212-215. Modena, 1888.

Illustrazione di Erbarii e loro storia.

Camus J. e O. Penzig. — *Illustrazione del Ducale Erbario Estense*, " Atti della Società dei Naturalisti di Modena ,, Memorie, S. III, vol. IV, Modena, 1885.

Camus J. — *L'opera salernitana " Circa Instans „ ed il testo primitivo del " Grant Herbier en Francoys „ secondo due codici del secolo XV*, " R. Accademia delle Scienze di Modena ,, vol. IV, Serie II, 1886.

Id. — *Un erbario dipinto nel 1750 da Giuseppe Bossi*, " Atti della Società dei Naturalisti di Modena ,, Serie III, vol. IV, Modena, 1892.

Id. — *Histoire des premiers herbiers*, " Malpighia ,, vol. IX, fasc. 7, 1895, Genova.

Id. — *Un herbier composé en 1838 pour Victor Emmanuel et le Duc de Gênes*, " Malpighia ,, anno X, 1896.

Id. — *Herbier des Alpes de la Savoie offert à l'Impératrice Joséphine par J. L. Bonjean*, " Revue Savoisienne ,, 1904, fasc. 3 et 4.

Lessicografia botanica.

Camus J. — *Botanique et philologie*, " Feuille des jeunes Naturalistes ,, XV année, n. 170, Paris, 1884; n. 171, 1885.

Id. — *Étude de lexicologie botanique (additions au Dictionnaire de Littré)*, " Revue de Botanique ,, Auch, 1884.

Id. — *Studio di Lessicografia botanica sopra alcune note manoscritte del secolo XVI in vernacolo veneto*, " Atti del R. Istituto Veneto ,, tom. II, serie VI, 1884.

Id. — *Réceptaire français du XIV siècle d'après un manuscrit de Turin*, " Société Syndicale des Pharmaciens de la Côte d'or ,, Bulletin VII, Dijon, 1892, pp. 34 a 49.

Miniature botaniche.

CAMUS J. — *Les noms des plantes du Livre d'Heures d'Anne de Bretagne,* " Journal de Botanique „, 2e année, nn. 19, 20, 21, 22, 23, 1894.

ID. — *Miniature di Jean Bourdichon distrutte nell'incendio della Biblioteca Nazionale di Torino,* " Arte „, VIII, fasc. IV, 1905.

Sistematica.

CAMUS J. — *L' " Haplophyllum patavinum „ et son* habitat *en Italie. Quelques mots sur la Flore des Monts Euganéens,* " Feuille des jeunes Naturalistes „, III année, n. 153, Paris, 1883.

ID. — *Nuovo parassita del " Paliurus aculeatus „ Lam.,* " Atti Società dei Naturalisti di Modena „, Memorie, Serie III, vol. VII, p. 109, Modena, 1888.

ID. — *Le " Veratrum nigrum „ dans le Tessin,* " Feuille des jeunes Naturalistes „, XXI année, n. 252, Paris, 1891.

ID. — *Le Fraisier des Indes dans l'Italie septentrionale,* " Malpighia „, XIX, Genova, 1905.

Storia, Letteratura, Arte, Bibliografia, ecc.

CAMUS J. — *Precetti di Rettorica scritti per Enrico III Re di Francia,* pubblicati ecc. Modena, " Memorie della R. Accad. delle Scienze e Arti di Modena „, vol. V, Serie II, 1887.

ID. — *Les Guépards Chasseurs en France au XV et au XVI siècle,* " Feuille des jeunes Natural. „, XVIII année, n. 214, Paris, 1888.

ID. — *Alcuni frammenti di antico dialetto piccardo dell'Etica di Aristotile compendiata da Brunetto Latini,* Modena, " Memorie Accademia Scienze, Lettere ed Arti „, vol. VII, Serie II, 1889.

ID. — *I Codici francesi della R. Biblioteca Estense,* Modena, 1889.

ID. — *Notices et extraits des manuscrits français de Modène antérieurs au XVI siècle,* Modena, 1891, in-8° (" Revue des Langues Romanes „, 1891).

ID. — *Les " Voyages „ de Mandeville copiés pour Valentine de Milan,* " Revue des Bibliothèques „, tom. IV, 1894.

CAMUS J. — *Un manuscrit Namurois du XV siècle,* " Revue des Langues Romanes ", tom. XXXVIII, 1895, nn. 1 et 4, Montpellier, 1895.

ID. — *Les songes au moyen âge, d'après un manuscrit du XV siècle,* " Bulletin de Folklore, organe de la Société de Folklore, Wallon ", tom. II, fasc. VII, VIII, Liège, 1895.

ID. — *Notice d'une traduction française de Végèce faite en 1380,* " Romania ", Paris, 1896, tom. XXV.

ID. — *La venue en France de Valentine Visconti Duchesse d'Orléans et l'inventaire de ses joyaux apportés de Lombardie,* " Miscellanea di storia italiana ", S. III, tom. V, Turin, 1898.

ID. — *Les épées de Bordeaux,* " Revue Savoisienne ", 1898.

ID. — *La Maison de Savoie et le mariage de Valentine Visconti,* " Bollettino storico-bibliogr. subalpino " diretto da F. Gabotto, 1899.

ID. — *La première version française de l'Enfer de Dante,* " Giornale storico della letteratura ital. " di Novati e Renier, 1901.

ID. — *La Cour du Duc Amédée VIII à Rumilly en Albanais (1418-1419),* Annecy, " Revue Savoisienne ", année 1901, fasc. 4.

ID. — *La seconde traduction de la Chirurgie de Mondeville* (Turin, Bibl. Nat., L. IV, 17), " Bulletin de la Société des anciens textes français ", 1902, n. 2, Paris.

ID. — *Les premiers autographes de la Maison de Savoie,* " Miscellanea di storia italiana ", S. III, t. XI, Turin, 1904.

ID. — *Morceaux choisis des prosateurs français du XIX siècle,* Modena, 1905, R. Scuola Militare.

ID. — *La " lonza " de Dante et les léopards de Pétrarque, de l'Arioste, etc.,* " Giornale storico della letteratura italiana ", vol. LIII, 1909.

Note varie (Zoologia, Matematica, Poesie, ecc.).

CAMUS J. — *Di un parassita del Platano,* " Atti Soc. Natur. di Modena ", 3ª Serie, VIII, 1888, p. 139.

ID. — *Un nouveau microlépidoptère (" Bucculatrix Turatii " Standfuss, parasite du " Paliurus aculeatus " Lam.),* " Feuille des jeunes Naturalistes ", XVIII année, n. 207, Paris, 1888; " Berliner Entomol. Zeitschr. ", Band XXXII, 1888, Heft 1, pp. 244-46.

ID. — *La " Bucculatrix Turatii " Stand., parassita della Maruca,* " Atti Soc. Nat. di Modena ", Serie III, vol. III, Modena, 1887.

ID. — *Intermédiaire des Mathématiciens,* anno 1904, pp. 193 a 208.

ID. — *Id. id. id.* anno 1908, p. 223.

Camus J. — *Ricerca geometrica della lunghezza di un arco di ellisse* (con tavola), " Atti del R. Istituto Veneto di Scienze ", vol. I, Serie VI.

Id. — *Escursione filologica nel campo della bacologia,* " Bollett. mensile di bachicoltura ", anno I, nn. 2 e 3.

Id. — *La Stenografia francese e il sistema Gabelsberg,* " Stenografo ", anno 1881.

A queste opere minori si dovrebbero ancora aggiungere *N. 89* piccole note, cenni, articoli, ecc., da lui pubblicati col suo nome o collo pseudonimo di *Samuel jucs* nei giornali seguenti " Notes and Queries ", " La Revue illustrée ", " L'Intermédiaire des chercheurs et curieux ", " Giornale degli eruditi e curiosi ", " L'Euganeo " di Padova, " Feuille des jeunes Naturalistes ", " Revue scientifique ", " Giornale storico della letteratura italiana ", ecc., ecc. Tutti questi lavori, accuratamente ritagliati dai giornali, nei quali furono stampati, si conservano rilegati in un volume nella Biblioteca del R. Orto botanico. Essi mi furono gentilmente donati in ricordo dell'amico, dalla sua sorella Blanche, unitamente a parecchie opere botaniche che formavano parte della biblioteca *Camus,* e che io conservo come preziosissimo ricordo dell'amico scomparso.

Una zona a "Bathysiphon„ attraverso il Miocene delle Langhe.

Nota di FEDERICO SACCO.

(Con una tavola).

È trascorso oltre mezzo secolo dacchè il Prof. Eugenio Sismonda raccoglieva fra le marne mioceniche delle Colline di Torino certi curiosi tubetti bruni subrettilinei che determinava, in m. s. sui cartellini della Collezione del Museo Geologico di Torino, col nome di *Carpolites* o *Leguminocarpon*, pensando si trattasse di frutti di Leguminose.

Ben più tardi, nel 1893, studiando tali fossili con altri analoghi del Terziario appenninico, li attribuivo (1) a speciali Foraminiferi agglutinanti (Astrorizidi) del genere *Bathysiphon*, Sars 1871, che vive, a profondità più o meno grandi, nei mari attuali, costruendosi appunto tubetti cilindrici silicei, aperti alle due estremità (2).

Contemporaneamente figuravo e determinavo la forma miocenica sovraccennata come *Bathysiphon taurinensis*, indicando che esso si trova fra le marne grigie specialmente del piano *Langhiano*, e meno comunemente dell'*Aquitaniano* e dell'*Elveziano*, delle colline di Torino-Casale.

Nello stesso anno il De Angelis, in un lavoro monografico sui Coralli terziari (3), attribuiva i fossili in esame a Celente-

(1) Sacco F., *Le Genre Bathysiphon à l'état fossile* (" Bull. Soc. Géol. France „, 3e série, tome XXI, 1893).

(2) Si tratta di astucci silicei che, sezionati ed osservati al microscopio, non hanno azione sulla luce polarizzata, ma mostrano fra la massa bianco-grigiastra minime macule brune carboniose.

(3) De Angelis G., *I Corallari dei terreni terziari dell'Italia settentrionale* (" R. Acc. Lincei „, serie 5a, vol. I, 1893).

rati Alcionari della famiglia delle Pennatulidee e precisamente al gen. *Pavonaria*, creandone una specie nuova: *Pavonaria Portisii*, descritta e figurata nel testo e nella 1ª tavola di detto lavoro.

Dopo d'allora questi fossili, riconosciuti da tutti come resti di Foraminiferi Astrorizidi, vennero generalmente considerati come quasi caratteristici dei depositi terziarii piuttosto profondi e quindi specialmente del *Langhiano*.

Nella scorsa estate (1916), facendo alcune escursioni attraverso le Langhe per rivedervi la potente serie miocenica che avevo già studiato trent'anni fa per il rilevamento geologico del *Bacino terziario del Piemonte*, pubblicato poi in 1889, ebbi occasione di osservarvi qua e là zone marnose con *Bathysiphon* ed altri fossili, specialmente Molluschi di mare profondo (come *Solenomya Doderleini, Syndesmya*, *Limatulella*, Pteropodi del genere *Vaginella* e *Carolinia*), per cui parvemi opportuno di seguirne lo sviluppo attraverso le Langhe, del che rendo conto nella presente Nota.

La formazione marnosa in questione appare in sottile zona ad Ovest di Ceva tra Mombasiglio e San Giovanni in Bosco in Val Salette e poi sviluppasi verso Ceva (con una quindicina di gradi di inclinazione verso N.N.O.), dove assume tosto una notevole potenza (un'ottantina di metri), come osservasi già nei dintorni della Stazione ferroviaria. Ma tale potenza va ancora rapidamente crescendo verso Est, per modo che tali marne grigie, qua e là scaglioso-filladiche, costituiscono gran parte delle colline di C. Pallavicini-S. Ruffino e di Priletto.

Ma nelle colline di Montezemolo la formazione in esame, sempre prevalentemente grigio-marnosa, talora però anche un po' giallastra e sabbioso-arenacea, assumendo un'inclinazione, verso il Nord ed il N.O., un po' più debole di prima (solo cioè di circa 5°-8°) e gradatamente incurvandosi si dirige verso Settentrione; costituisce così quella specie di altipiano collinoso, se è lecito di così esprimersi, di tinta grigio-biancastra in generale, che stendesi da Montezemolo a Barbei con dolce inclinazione verso Ovest all'incirca.

Discendendo in Val Bormida di Millesimo, sino ad attraversarla, le marne in esame, per la loro poca resistenza complessiva rispetto alle sottostanti arenarie di Bormida ed ai

potenti caratteristici banchi, pure arenacei, di Monesiglio, dànno luogo naturalmente ad un notevole slargo pianeggiante della vallata, cioè quello di Gambera tra Contrada e Novei.

Risalendo la Valle di Rio Campo Asine le caratteristiche marne a *Bathysiphon* formano le alture di Madonna di Gottasecca (dove la raccolta di fossili si può fare abbondante), ridiscendendo poi in Valle Uzzone, sul cui fianco destro esse costituiscono speciali sproni peninsulari (come quelli di quota 650, di Cavigio e di Costa-Pareta), formando poi, in fondo valle, il solito slargo su cui sorse il paese di Scaletta Uzzone.

Di qui la zona marnosa, sempre con dolce inclinazione a N.O. circa, si allarga, almeno in apparenza superficiale, nell'ampia e ramificata Val Prasola, adagiandosi sulla potente serie (del Miocene inferiore) arenacea ciottolifera (1) di S. Giulia, venendo ricoperta dalla serie (del Miocene medio) arenaceo-sabbioso-marnosa (con lenti ghiaiose, impronte di *Paleodyction*, ecc.) di Bric Ciampesquela.

Da questa regione, si potrebbe dire dal Bric Nissè, costituito appunto dagli strati suborizzontali delle marne a *Bathysiphon*, tale zona forma la cresta spartiacque tra l'Uzzone e la Bormida di Spigno sino alla regione di C. Langa, dove costituisce, per la sua speciale natura, una specie di piano ondulato o depresso (scelto quindi pel passaggio dello stradone di Cortemiglia-Bormida di Spigno), cui sovraincombe la potente massa arenacea (Miocene medio) di Costa del Boscaccio.

A proposito di altipiani accenno qui incidentalmente alla presenza (in queste regioni come in tante altre delle Langhe) di speciali piani-terrazze più o meno alti sull'attuale fondo dei prossimi torrenti e talora disposti in successive gradinate corrispondenti a varii momenti di erosione delle rispettive vallate. Ricordo, p. e., in queste regioni: verso la Bormida, le terrazzette di S. Maurizio sulla sinistra di Rio delle Forche, il Pian Castagne sulla destra di Rio d'Onasco, il piano di Lodisio ed il

(1) I ciottoli, anche di 20-30 cm. di diametro, sono specialmente di Gneiss appenninitici, Schisti verdi varii, Calceschisti, Micaschisti, Serpentine, Eufotidi, ecc.; inoltre veggonsi qua e là, sia sparsi sulla collina, sia ancora in posto tra le sabbie arenacee, grossi ciottoli (specialmente di Quarzo e di Gneiss) di oltre 1 m. ad 1 m. e mezzo di diametro.

Pian del Buto nell'alta Val Cagna; e verso l'Uzzone i piani più o meno elevati (ed ora smembrati, separati dall'erosione) di C. Valcreusa, C. Porcavio nell'alta Val Porcavio, di Pian Soave, C[ne] Resi, Cappellano, C. Pozzarini-Torre, e sottostante Villareto basso, C. Zebrin, ecc., nella Valle della Torre Uzzone, di Valentini superiore, di Brenci-Musso, di Arbarelli, ecc., sulla destra di Valle Uzzone, ecc.

Questi piani-terrazze sono assai interessanti, poichè corrispondono a varie fasi di erosione verificatesi, dal Plistocene in poi, per opera dei mille corsi d'acqua che, incidendo la potente serie terziaria delle Langhe (che fu già una regione appena ondulata al principio dell'epoca pliocenica), la ridussero alla complicata forma collinosa attuale.

Questo genere di ricerche estese sistematicamente a tutte le Langhe, coll'aiuto delle buone carte recenti al 25.000, dovrebbe attrarre qualche giovane studioso che ne potrebbe ricavare certamente interessanti deduzioni di indole speciale e generale sulle diverse e successive fasi, nonchè sulla intensità e profondità (anche di 100 a 200 m.) dell'erosione acquea verificatasi in queste regioni collinose durante il Quaternario, sul rapporto tra il terrazzamento delle vallate e la tettonica, essendo naturalmente l'erosione terrazzante molto più facile sul dorso degli strati poco inclinati, ecc.

Ritornando alla zona marnosa in questione, vediamo come essa, da Cagna (dove i tipici schisti filladici a *Bathysiphon* appaiono nettamente sotto detto paesello) verso Nord, si sviluppi regolarmente quasi come *substratum* della dorsale dividente la Val Bormida da Valle Uzzone, per cui, data la dolcissima pendenza degli strati verso Ovest all'incirca, detta formazione appare anche estesamente sull'alto dei valloni (p. es. Val della Torre e Val Rossana) scendenti all'Uzzone, mentre che verso Est essa appare solo in testata lungo i fianchi, costituendo però sproni avanzati più o meno espansi, a gradinate o pianori biancheggianti, come, p. esempio, quelli di Cagna, Villareto, Vagli, C[na] nuova di Brallo, C[na] Verama, ecc., originando anche caratteristici burroni e frane, come, p. es., al Bric Torrione a S.E. di Roccaverano.

In generale da Cagna verso Roccaverano la zona in esame diventa più marnoso-franosa, pur alternandovisi spesso colle

marne strati e straterelli arenacei; verso l'alto essa passa quasi insensibilmente alla serie arenacea dell'*Aquitaniano* medio per mezzo di ripetutissime alternanze di marne sabbiose-grigiastre con strati arenaceo-sabbiosi grigio-giallastri (per alterazione), che verso l'alto diventano sempre più potenti e prevalenti.

Però la zona delle marne calcaree, tipicamente scaglioso-filladiche a *Bathysiphon*, appare essenzialmente, qui come verso il Cevese, nella parte inferiore della serie marnosa in esame, sempre più avvicinandosi alla caratteristica base dell'*Aquitaniano*.

Così, p. es., ad Est di Serole vediamo affiorare tali marne fossili a metà circa tra C^{na} Verama e C^{na} Crese-Bazzi e già soggiacenti a strati arenacei ciottoliferi (1) che preludiano all'*Aquitaniano* inferiore.

Così pure ad Est di Roccaverano, dopo attraversata la potentissima serie degli strati e banchi sabbiosi ed arenacei grigio-giallastri del Miocene inferiore, appena inclinati di 5°-10° verso S.O. all'incirca, bisogna giungere sin quasi alla base della serie *aquitaniana*, poco sopra la C. Poggi, per ritrovare i tipici straterelli scagliosi marnoso-calcarei a *Bathysiphon*.

Senza continuare oltre nella descrizione della zona marnosa fin qui esaminata, diamo solo più la sezione dettagliata della regione ultima accennata sopra C. Poggi, regione che, per le sezioni artificiali che si stanno facendo per una strada nuova di comunicazione da Roccaverano alla Val Bormida di Spigno, risulta chiaramente così costituita d'alto in basso:

Potente serie sabbioso-arenacea spesso in banchi tanto compatti da potersi usare come materiale da costruzione.

Marne calcaree, scaglioso-filladiche, a *Bathysiphon* (circa 25 m.).

Marne grigie tenere.

Strato-lente calcareo-arenaceo.

Marne grigie un po' sabbiose.

Marne grigie tenere.

Banco-lente calcareo a Litotamni, grossi Pettini, ecc. (m. 1-0,40).

---

(1) Gli elementi ghiaioso-ciottolosi sono costituiti specialmente da Calceschisti, Micaschisti, Quarziti, Anageniti, Serpentine, Eufotidi, Ftaniti, ecc., indicando una derivazione essenzialmente dal prossimo Appennino.

Zona marnosa con numerosi Litotamni sparsi.

Strati-lenti di calcari biancastri organogenici (essenzialmente a Litotamni) intercalati a marne grigio-biancastre.

Marne grigie alternate con strati arenacei.

Arenarie verdastre fossilifere di passaggio dall'*Aquitaniano* allo *Stampiano.*

Marne calcaree grigiastre che passano inferiormente alla potentissima serie delle marne scaglioso-friabili grigie dello *Stampiano.*

La tinta verde delle suaccennate arenarie è prodotta da abbondantissima Glauconite che si presenta in piccolissimi granuli irregolari od in masserelle sferoidali subconcrezionate; oltre a granuli argillosi i minerali che accompagnano la Glauconite sono il Quarzo, varii Anfiboli di tipo Attinoto, in frammenti di sfaldatura, Glaucofane e Tremolite; inoltre Clorite, Mica bruna, Granato roseo, Epidoto verde giallastro, Tormalina e Zircone; in generale la fluitazione appare poco pronunciata; il cemento è un po' argilloso-calcareo-ferruginoso; nel trattamento coll'acido cloridrico si separa abbondante Fe_2O_3, CaC, MgO ed argilla inquinante.

È notevole che in questa regione l'*Aquitaniano* inferiore non presenta più zone ciottolose o ciottoli sparsi fra le arenarie, come si è notato verificarsi più a Sud, ma invece compaionvi i *calcari* a *Litotamni,* che sviluppansi poi ancora più estesamente verso Est; ciò che rappresenta un importante cangiamento di *facies* in rapporto probabilmente colla distanza della regione alpina e colla relativa fluitazione, con correnti marine, ecc., e quindi con diverse condizioni originarie della regione littoranea.

Riguardo all'età geologica della descritta zona marnosa a *Bathysiphon*, se facciamo il confronto del suo sviluppo attraverso le Langhe con quello del piano *Langhiano*, quale fu delineato nella carta al 100.000 del " Bacino terziario del Piemonte, 1889 ", risulta evidente che, malgrado la sua *facies langhiana*, essa è riferibile all'*Aquitaniano medio-inferiore.*

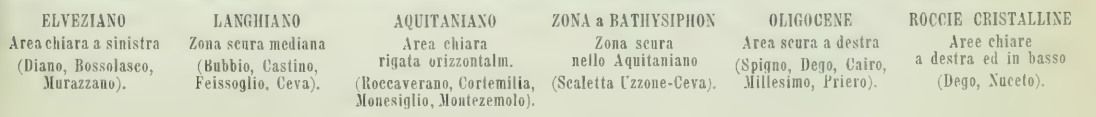
Fenomeni analoghi potei più volte già constatare altrove, in Piemonte, cioè l'apparsa anche ripetuta di marne grigie a *facies langhiana*, sia nell'*Elveziano* medio-inferiore, sia nell'*Aquitaniano*, per cui si rimane talora incerti sull'estensione del piano *langhiano*; ciò del resto è ben naturale, data la natura dei de-

positi a *facies* spesso alternanti, i loro graduali passaggi litologici e spesso anche paleontologici, e quindi la divisione talora alquanto arbitraria che fu fatta nella potentissima serie terziaria del Piemonte.

A questo proposito anzi possiamo ricordare il fatto che la formazione *langhiana*, quale fu interpretata dal grande Maestro del Terziario europeo, K. Mayer, mentre è tanto sviluppata dal Tortonese all'Acquese colla sua potente e caratteristica prevalenza marnosa, sembra andare rapidamente ingracilendosi attraverso le Langhe da Bubbio a Ceva, tanto da essere ridotta ad una zonula sottile come delineai nella Cartina al 100.000 del " Bacino Terziario del Piemonte, 1889 ".

Però tale fenomeno può in parte interpretarsi come effetto di un originario insabbiamento della zona *langhiana*, in rapporto con una certa vicinanza della regione alpina e sue relative notevoli fluitazioni, come sarebbe quella del miocenico pre-Tanaro, tant'è che vi compaiono anche zonule ghiaiose, finchè nel Monregalese la serie miocenica presenta addirittura frequenti e potenti intercalazioni ciottolose ad elementi anche grossissimi.

Quindi seguendo questo concetto credo che nella regione in esame la zona *langhiana* dovrebbe considerarsi più ampia di quanto io abbia segnato in detta Carta del 1889, cioè estendendola sino a Perleto sulla destra della Bormida di Millesimo ed ampliandola notevolmente sul versante sinistro di tale vallata fino alle colline Cevesi, ad occupare anche la stretta e lunga bottoniera di Val Belbo da Rocchetta Belbo sin sotto Serravalle delle Langhe.

Concludendo, dal sovraesposto si può dedurre che nella regione delle Langhe, mentre la zona sedimentaria corrispondente al piano *langhiano* (che generalmente è di tipo marnoso, corrispondendo a depositi di mare tranquillo e profondo) si presenta piuttosto sabbioso-arenacea che marnosa, invece nella serie sedimentaria dell'*Aquitaniano* medio-inferiore appare e si sviluppa assai una speciale zona marnosa *pseudo-langhiana*, di marne calcaree fissili scagliose, contenenti fossili di mare profondo, fra cui il tipico *Bathysiphon*.

ELVEZIANO
Area chiara a sinistra
(Diano, Bossolasco,
Murazzano).

LANGHIANO
Zona scura mediana
(Bubbio, Castino,
Feissoglio, Ceva).

AQUITANIANO
Area chiara
rigata orizzontalm.
(Roccaverano, Cortemilia,
Monesiglio, Montezemolo).

ZONA a BATHYSIPHON
Zona scura
nello Aquitaniano
(Scaletta Uzzone-Ceva).

OLIGOCENE
Area scura a destra
(Spigno, Dego, Cairo,
Millesimo, Priero).

ROCCIE CRISTALLINE
Aree chiare
a destra ed in basso
(Dego, Nuceto).

Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazî ad n dimensioni.

Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI, a Torino.

Premesse. — **1.** In una Nota precedente ci siamo occupati di fasci di reciprocità degeneri tra due spazî S_n, S'_n [1]; tratteremo ora di sistemi lineari qualunque di reciprocità degeneri, conservando le locuzioni e le notazioni allora introdotte.

Date $k+1$ reciprocità tra S_n ed S'_n:

$$R^{(l)} \equiv \Sigma\, a_{ij}^{(l)}\, x_i\, y_j = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, k;\ i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

se esse sono linearmente indipendenti (cioè se tali sono le forme bilineari $R^{(l)}$), l'equazione:

$$\lambda_0 R^{(0)} + \lambda_1 R^{(1)} + \cdots + \lambda_k R^{(k)} = 0 \tag{1}$$

rappresenta, al variare di $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, un *sistema lineare* ∞^k di reciprocità; una qualunque delle quali ha un'equazione del tipo:

$$\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, y_j = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

ove le a_{ij} sono forme lineari di $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$:

$$a_{ij} = \lambda_0\, a_{ij}^{(0)} + \lambda_1\, a_{ij}^{(1)} + \cdots + \lambda_k\, a_{ij}^{(k)}.$$

Se il determinante del 1° membro della (1) (determinante del sistema) ha, per valori generici di $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, la carat-

[1] Questi Atti (1916-17); i richiami a detta Nota saranno preceduti dalla lettera F.

teristica $n-h$ $(0 \leq h \leq n-1)$, la reciprocità generica del sistema è degenere di specie $h+1$, ed il sistema si dirà *di specie* $h+1$.

Un sistema lineare di specie $h+1$ si dirà *completo* quando non esiste un sistema lineare della stessa specie, e di dimensione maggiore, che lo contenga. Così il sistema [2], di dimensione n^2+2n, di tutte le reciprocità tra S_n, S'_n si può pensare come (l'unico) sistema completo di specie -1.

Per una reciprocità è una condizione lineare l'avere due punti dati come punti reciproci; equivale ad n condizioni lineari indipendenti il contenere come omologhi un punto ed un iperpiano dati; equivale ad $n+1$ condizioni lineari indipendenti l'avere un dato punto, di S_n ad es., come punto singolare. Perciò tutte le S_0-reciprocità che hanno in S_n un dato punto singolare formano un sistema lineare completo di 1ª specie e di dimensione $n(n+1)-1$; e così, tutte le S_h-reciprocità che hanno in S_n un dato S_h singolare formano un sistema lineare completo di specie $h+1$ e di dimensione $(n-h)(n+1)-1$. Tutte le reciprocità che a un dato S_m di S_n fanno corrispondere un dato S'_{n-m+h} di S'_n formano un sistema lineare completo di specie $h+1$ e di dimensione $n(n+1)-m(n-m+h)-(h+1)$.

2. Sono ovvie, o di dimostrazione immediata, le seguenti proprietà: Gli iperpiani omologhi d'un punto P di S_n nelle reciprocità d'un sistema lineare ∞^k formano, se P non è singolare per nessuna reciprocità del sistema, una stella ∞^k proiettiva al sistema; se invece P è singolare per l reciprocità del sistema lin. ind., quegli iperpiani formano una stella ∞^{k-l}, e viceversa. Perciò, se $k>n$, un punto generico di S_n è singolare per qualche reciprocità del sistema. Così, gli spazî omologhi d'un S_h, singolare per l reciprocità del sistema lin. ind., sono ∞^{k-l}. Se un punto è singolare per $k+1$ reciprocità lin. ind. d'un sistema lineare ∞^k, esso lo è per tutte.

Un sistema lineare ∞^k di specie $h+1$ sega sopra un S_p ed un S'_p un sistema lineare, la cui dimensione è uguale a quella del sistema dato, meno il numero delle reciprocità del sistema stesso, fra loro lin. ind., che ad S_p fanno corrispondere S'_p.

---

(2) Sottintenderemo talvolta l'aggettivo " lineare ".

Congiungendo un sistema lineare di S_h-reciprocità con uno di S_l-reciprocità, se $h+l \geq n$, si ottiene un sistema lineare di specie $h+l-n+1$ (almeno).

Le reciprocità prodotti di quelle d'un sistema lineare di specie $h+1$ per un'omografia non degenere tra S_n, S'_n formano un sistema lineare di specie $h+1$.

Sistemi completi di specie n. — **3.** Due reciprocità α, β, di specie rispett. n ed $h+1$, quando gli S_h, S'_h singolari di β sono in posizione generica rispetto agli S_{n-1}, S'_{n-1} singolari di α, dànno un fascio di specie h; infatti, se:

$$x_0 y_0 = 0, \qquad \Sigma a_{ij} x_i y_j = 0 \qquad (i, j = h+1, ..., n)$$

sono le equazioni di α, β, l'equazione del fascio $\alpha\beta$ sarà:

$$\lambda_1 x_0 y_0 + \lambda_2 \Sigma a_{ij} x_i y_j = 0,$$

da cui risulta che si tratta d'un fascio di specie h. Se invece S_h, ad es., giace in S_{n-1}, il fascio $\alpha\beta$ è di specie $h+1$: *Affinchè una* S_{n-1}*-reciprocità ed una* S_h*-reciprocità determinino un fascio di specie* $h+1$*, è necessario e sufficiente che, in uno almeno dei due spazî* S_n*,* S'_n*, i loro spazî singolari si appartengano.*

Per $h = n-1$, segue: *Affinchè due* S_{n-1}*-reciprocità diano un fascio di specie* n*, è necessario e sufficiente che coincidano i loro* S_{n-1} *singolari in uno almeno dei due spazî* S_n*,* S'_n (3). E quindi: *Si ha un solo tipo di sistemi lineari completi di* S_{n-1}*-reciprocità: costituito dalle* ∞^n *reciprocità aventi, in* S_n *ad es., un dato* S_{n-1} *singolare.* Il sistema è completamente definito da questo S_{n-1}; la sua equazione si può scrivere:

$$x_0 \Sigma a_i y_i = 0 \qquad (i = 0, 1, ..., n).$$

4. Se un sistema lineare ∞^{k+1} di specie $h+1$ contiene una S_{n-1}-reciprocità, α, di spazî singolari π, π', esso congiunge α con un sistema ω, ∞^k, di specie $h+1$, i cui spazî

---

(3) Ciò segue pure dal teor. F. n° 4.

singolari ad es. in S_n (esclusi quelli delle reciprocità di specie superiore contenute in ω) dovranno, per l'osservazione precedente, e per ragioni di continuità, appartenere tutti a π. Il sistema considerato si può quindi eventualmente ampliare, senza mutarne la specie, congiungendolo al sistema completo di specie n definito da π. Sia Ω il nuovo sistema lineare.

Se $x_0 = 0$ è l'equazione di π, e $|a_{ij}|$ il determinante della S_h-reciprocità generica β di ω, le a_{ij} saranno forme lineari di parametri $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$; e le equazioni dell'$S_h$ singolare di β saranno:

$$\sum_i a_{ij}\, x_i = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots, n);$$

volendo che esso stia in π, queste equazioni dovranno avere (per valori generici di $\lambda_0, \dots, \lambda_k$) $h+1$ soluzioni lin. ind. quando vi si ponga $x_0 = 0$, ossia la matrice dedotta da $|a_{ij}|$ sopprimendo la prima orizzontale deve avere la caratteristica $n - h - 1$. E poichè il determinante di Ω è:

$$\begin{vmatrix} a_{00} + \mu_0 & a_{01} + \mu_1 & \dots & a_{0n} + \mu_n \\ a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{in} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

si vede che, prendendo: $\mu_i = -a_{0i}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, risultan nulli *tutti* i minori d'ordine $n - h$. Si ottengono così delle S_{h+1}-reciprocità contenute in Ω, le quali formano, al variare di $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, e quindi delle a_{0i}, un sistema lineare ω_1; ed Ω si potrà anche costruire congiungendo ω_1 col sistema ∞^n di specie n definito da π [4]. *Se un sistema lineare completo di specie* $h+1$ *contiene una* S_{n-1}*-reciprocità, esso congiunge un sistema completo di specie* n *con un sistema completo di specie* $h+2$.

Se in un sistema completo di specie $h+1$ gli S_h singolari appartengono tutti ad un S_m, il sistema contiene $n - m$ sistemi completi di specie n lin. ind., definiti da altrettanti iperpiani di S_n,

---

[4] Rileviamo che, in S_n, gli S_{h+1} singolari delle reciprocità di ω_1 passano tutti per il punto fondam.le A_0. Se Ω è completo ed ω_1 no, qualunque sistema completo contenente ω_1 deve contenere elementi (formanti un sistema ∞^p, con $p < n$) del sistema ∞^n di specie n definito da π, perciò conterrà i sistemi completi di specie n definiti da $p+1$ iperpiani di S'_n lin. ind.

lin. ind., passanti per S_m. Ad esempio, il sistema di tutte le S_h-reciprocità in cui si corrispondono un S_m di S_n ed un S'_{n-m+h} di S'_n congiunge $n - m$ sistemi completi di specie n definiti da $n - m$ iperpiani di S_n, lin. ind., passanti per S_m, con $m - h$ sistemi definiti in modo analogo da iperpiani di S'_n passanti per S'_{n-m+h}.

Se un sistema completo di specie $h+1$ non contiene S_{n-1}-reciprocità, gli S_h e gli S'_h singolari delle sue reciprocità (anche escludendo quelle degeneri di specie superiore) formano due varietà *appartenenti* rispett. ad S_n, S'_n, che possono riempire tutto S_n od S'_n.

Sistemi completi di specie $n-1$. — 5. Una S_{n-2}-reciprocità equivale ad una proiettività tra due fasci d'iperpiani. Escludendo i sistemi lineari ∞^{2n+1} di tutte le S_{n-2}-reciprocità che hanno in S_n (od S'_n) lo stesso spazio singolare, e quelli ∞^{2n} delle S_{n-2}-reciprocità in cui si corrispondono due dati iperpiani, la reciprocità generica d'un sistema lineare di specie $n-1$ avrà due spazî singolari entrambi variabili; e due spazî singolari generici, sì in S_n che in S'_n, staranno in un iperpiano, pure variabile (F. n° 4). Ne segue che tutti gli S_{n-2} singolari passano per un S_{n-3}, e gli S'_{n-2} singolari per un S'_{n-3}; ed il dato sistema proietterà da quegli S_{n-3}, S'_{n-3} un sistema di 1ª specie tra due piani π, π'. Ora, un fascio generico f di quest'ultimo sistema stabilisce tra π, π' (come intersezione di tutte le sue reciprocità) una corrispondenza omografica (non degenere); e qualunque S_0-reciprocità tra π e π', che, congiunta con f, dia una rete di 1ª specie, dev'essere una di quelle definite da due fasci di rette (proiettivi ed) omologhi nell'omografia. Viceversa, l'insieme delle ∞^2 S_0-reciprocità così definite (e tra le quali vi son quelle di f) è una rete, perchè contiene il fascio di due qualunque dei suoi elementi. Perciò: *Si hanno tra* S_n, S'_n *tre tipi di sistemi lineari completi di* S_{n-2}-*reciprocità: 1° Sistema* ∞^{2n+1} *delle* S_{n-2}-*reciprocità aventi un dato spazio singolare in* S_n *od* S'_n*; 2° Sistema* ∞^{2n} *delle* S_{n-2}-*reciprocità in cui si corrispondono due iperpiani dati rispett. in* S_n *ed* S'_n*; 3° Rete delle* S_{n-2}-*reciprocità date dalle* ∞^2 *proiettività tra fasci di iperpiani che son contenute in un'omografia (non degenere) tra due stelle* (∞^2) *di centri* S_{n-3}, S'_{n-3}.

Le equazioni di questi sistemi si possono scrivere:

$$\begin{cases} x_0 \Sigma a_i y_i + x_1 \Sigma b_i y_i = 0 & (i = 0, 1, ..., n); \\ y_0 \Sigma a_i x_i + y_1 \Sigma b_i x_i = 0 & (i = 0, 1, ..., n); \end{cases}$$

$$a_0 x_0 y_0 + x_0 \Sigma a_i y_i + y_0 \Sigma b_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n);$$

$$a_0 (x_0 y_1 - x_1 y_0) + a_1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + a_2 (x_2 y_0 - x_0 y_2) = 0.$$

Nell'ultimo caso il determinante del sistema è il più generale determinante emisimmetrico di 3° ordine, orlato con $n - 2$ linee ed altrettante colonne di tutti zeri.

6. Per $n = 2$, il teor. precedente e quello del n° 3 dànno i sistemi lineari completi di reciprocità degeneri tra due piani π, π' [5]; essi si riducono ai quattro tipi seguenti: 1° Sistema ∞^2, di 2ª specie, delle reciprocità che hanno in π (o π') una data retta singolare; 2° Sistema ∞^5, di 1ª specie, delle reciprocità che hanno in π (o π') un dato punto singolare; 3° Sistema ∞^4, di 1ª specie, delle reciprocità in cui si corrispondono due rette date rispett. in π, π'; 4° Sistema ∞^2, di 1ª specie, definito, nel modo spiegato sopra, da un'omografia (non degenere) tra π, π' [6].

Rappresentazioni nello spazio di reciprocità. — 7. Assumendo gli $n^2 + 2n + 1$ coefficienti della (2) come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio ad $N = n^2 + 2n$ dimensioni, si rappresentano le reciprocità tra S_n, S'_n coi punti

---

(5) Tra due rette r, r' si hanno solo dei fasci di proiettività degeneri: costituiti da tutte le proiettività che hanno, su r od r', un dato punto singolare.

(6) La rete di S_0-reciprocità tra due piani qui considerata si trova già nella dissertazione di laurea della prof.ª T. Oneglio (F. nota (1)). Sistemi analoghi al 3° del teor. del n° 5 si costruiscono così: prese in S_n, S'_n due stelle di iperpiani di dimensione pari $2k$, di sostegni S_{n-2k-1}, S'_{n-2k-1}, le reciprocità prodotti di un'omografia generica tra le due stelle per le polarità nulle nella prima (ad es.) di esse, costituiscono un sistema lineare di reciprocità degeneri tra S_n, S'_n, di specie $n - 2k + 1$ e dimensione $k(2k + 1) - 1$. Scegliendo opportunamente i sistemi di coordinate in S_n ed S'_n, il determinante del sistema è il più generale determinante emisimmetrico d'ordine $2k + 1$, orlato con $n - 2k$ linee ed altrettante colonne di zeri.

d'un S_N (7). Alle reciprocità (connessi di punti) degeneri di 1ª specie corrispondono i punti d'una varietà $F^{(1)}$, di dimensione $N-1$ ed ordine $n+1$, la cui equazione è:

$$(3) \qquad A = |a_{ij}| = 0.$$

Alle reciprocità degeneri di specie $h+1$ corrispondono i punti d'una varietà $F^{(h+1)}$, di dimensione $n^2+2n-(h+1)^2$ e ordine noto, le cui equazioni si ottengono annullando in A tutti i minori di ordine $n-h+1$ (basta annullarne $(h+1)^2$), e la quale è luogo dei punti $(h+1)$-pli di $F^{(1)}$. In particolare, $F^{(n)}$ di dimensione $2n$ ed ordine $\binom{2n}{n}$, è luogo dei punti n-pli di $F^{(1)}$, ed è la varietà (di SEGRE) che rappresenta le coppie di iperpiani di S_n, S'_n.

Si sa che $F^{(h+1)}$ è luogo degli S_{n-h-1} $(n-h)$-seganti di $F^{(n)}$.

È pure noto che l'iperpiano π polare d'un punto generico P di S_N rispetto a $F^{(1)}$ è luogo dei punti immagini delle reciprocità che, come connessi di punti, sono armoniche a quella di immagine P, pensata come connesso d'iperpiani (8); per cui π si può assumere come immagine del connesso d'iperpiani definito dalla reciprocità di immagine P. Questa rappresentazione dei connessi bilineari d'iperpiani è duale della precedente; ai con-

---

(7) È una notissima rappresentazione, già studiata per $n=2$ dallo STÉPHANOS. Per n qualunque si veda: SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazî*, "Rend. Palermo", 5 (1891), pp. 192-204; *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, "Rend. Lincei", (5) 9_2 (1900), pp. 253-260, n° 2; *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, "Math. Ann.", 40 (1892), pp. 413-467. S. KANTOR, *Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^λ-Schaaren bilinearer Formen*, "München Sitzungsberichte", 27 (1897), pp. 367-381; *Theorie der Elementartheiler höherer Stufen*, "Monatshefte", 11 (1900), pp. 193-286, § 1. SCORZA, *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari*, "Mem. Soc. Ital. delle Sc. (dei XL)", (3) 19 (1916), pp. 139-183, a p. 153 e seguenti; *Le varietà di Veronese e le forme quadratiche definite*, "Rend. Acc. Napoli", (3) 21 (1915), pp. 297-305; *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*, "Rend. Palermo", 41 (1916), pp. 263-380, a p. 323 e seguenti.

(8) Date due reciprocità: $\Sigma a_{ij} x_i y_j = 0$, $\Sigma b_{ij} x_i y_j = 0$, se $\Sigma b_{ij} A_{ij} = 0$, si dice che la seconda come connesso di punti è armonica alla prima come connesso d'iperpiani.

nessi degeneri di 1ª specie corrispondono gli iperpiani d'una varietà $\Phi^{(1)}$; a quelli degeneri di specie $h+1$ gli iperpiani d'una varietà $\Phi^{(h+1)}$. Le relazioni tra le due serie di varietà: $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n)}$; $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(n)}$ sono state stabilite, per n qualunque, dallo SCORZA; si ha ad es. che $\Phi^{(1)}$ è formata dagli iperpiani tangenti di $F^{(n)}$.

Un sistema lineare ∞^k di S_h-reciprocità ha per immagine un S_k appartenente a $F^{(h+1)}$; se il sistema è completo, non esiste su $F^{(h+1)}$ uno spazio contenente S_k; diremo allora che S_k è uno *spazio completo* di $F^{(h+1)}$.

Congiungendo uno spazio di $F^{(h+1)}$ con uno di $F^{(l+1)}$, se $h+l \geq n$, si ottiene uno spazio di $F^{(h+l-n+1)}$.

8. Il teorema del nº 3 ci dà: *La varietà* $F^{(n)}$ *contiene, come spazî completi, due schiere di* S_n (9).

Due S_n della stessa schiera sono sghembi, e due di schiere diverse sono incidenti in un punto; gli S_n d'una schiera punteggiano omograficamente quelli dell'altra. S_n della stessa schiera lin. ind. sono immagini di sistemi completi di specie n definiti da iperpiani lin. ind. (di S_n od S'_n). Congiungendo $n-m$ S_n della prima schiera, lin. ind., con $m-h$ dell'altra schiera, pure lin. ind., si ottiene uno spazio, di dimensione $H = n(n+1) - m(n-m+h) - (h+1)$, giacente su $F^{(h+1)}$; proprietà che segue dal nº 4, o dal fatto che $F^{(h+1)}$ è luogo degli S_{n-h-1} $(n-h)$-seganti di $F^{(n)}$. Per $m=h$ si ha un $S_{(n-h)(n+1)-1}$ che sega $F^{(n)}$ nella varietà luogo degli S_{n-h-1} ottenuti congiungendo punti omologhi di $n-h$ S_n lin. ind. e proiettivi (varietà di SEGRE di 2ª specie e di indici $n, n-h-1$; secondo le locuzioni dello SCORZA).

9. Dal teor. 4 della nostra Nota sui fasci di S_h-reciprocità si ottiene: *Qualunque retta di* $F^{(h+1)}$ *appartiene allo spazio* S_H *che congiunge* $n-h$ S_n *di* $F^{(n)}$, *scelti fra le due schiere, e tali che quelli di essi che stanno in una stessa schiera siano linearmente indipendenti.*

I varî tipi di fasci di specie $h+1$ provengono anzitutto dai varî modi di ripartire fra le due schiere gli $n-h$ S_n di $F^{(n)}$,

(9) SCORZA, *Sulle varietà di Segre*, "Atti Acc. Torino", 45 (1909-10), pp. 119-131, § 5.

e poi dalle varie posizioni d'una retta entro S_H: una retta generica di S_H è immagine d'un fascio privo di reciprocità di specie superiore, mentre si avranno di tali reciprocità nei fasci le cui rette immagini sono incidenti, in uno o più punti (eventualmente anche coincidenti fra loro), alle intersezioni di S_H con $F^{(h+2)}$, $F^{(h+3)}$, ..., $F^{(n)}$.

10. Dal teorema del n° 5 segue: $F^{(n-1)}$ *contiene, come spazî completi: 1° gli* S_{2n+1} *che congiungono due* S_n *di* $F^{(n)}$ *della stessa schiera; 2° gli* S_{2n} *che congiungono due* S_n *di* $F^{(n)}$ *di schiere diverse (cioè gli* S_{2n} *tangenti di* $F^{(n)}$*); 3° dei piani.*

È facile vedere il legame di questi piani con $F^{(n)}$. Sia π uno di essi; ponendo sotto la forma data al n° 5 l'equazione della rete di S_{n-2}-reciprocità di immagine π, si vede che π sta sullo $\left[\frac{1}{2} n(n+1) - 1\right]$ [10] che rappresenta in S_N il sistema lineare di tutte le forme bilineari emisimmetriche. Ora, un tale spazio e lo $\left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1\right]$ che rappresenta le forme bilineari simmetriche sono gli spazî fondamentali di un'omografia involutoria di 2ª specie che muta $F^{(n)}$ in sè; e precisamente di quella definita dall'omografia: $\rho y_i = x_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$, tra S_n, S'_n [11]; si tratta perciò della più generale omografia involutoria di 2ª specie che muta in sè $F^{(n)}$.

Sistemi di data specie aventi la massima dimensione. — **11**. Per un punto semplice P di $F^{(1)}$, immagine d'una S_0-reciprocità, α, passano due $S_{n(n+1)-1}$, giacenti su $F^{(1)}$, immagini dei due sistemi completi di S_0-reciprocità che hanno in S_n (o rispett. in S'_n) lo stesso punto singolare di α; essi si segano in un $[n^2 - 1]$, immagine del sistema delle S_0-reciprocità con gli stessi punti singolari di α.

---

(10) Per comodità tipografiche, scriveremo talora, al modo di SCHUBERT, $[k]$ invece di S_k.

(11) SEGRE, 1° loc. cit. nella nota (7), n° 8; S. KANTOR, 2° loc. cit. nella nota (7), § XX a p. 238. Il teor. del n° 6 permette di concludere che tutti gli spazî (semplici e doppî) esistenti sulla V_7^3 di S_8 che rappresenta le reciprocità degeneri tra due piani sono quelli considerati dal prof. SEGRE nella sua Nota ora citata. Rileviamo che anche i sistemi lineari di cui è detto nella nota (6) hanno per immagini in S_N spazî di punti uniti per un'omografia involutoria di 2ª specie che muta in sè $F^{(n)}$.

Supponendo che le coordinate di P siano:

$$a_{00}=0; \quad a_{ii}=1 \text{ per } i=1,2,\ldots,n; \quad a_{ij}=0 \text{ per } i\neq j;$$

le equazioni dei due $S_{n(n+1)-1}$ sono rispett.:

$$(4) \quad a_{00}=a_{01}=a_{02}=\cdots=a_{0n}=0; \quad a_{00}=a_{10}=a_{20}=\cdots=a_{n0}=0.$$

Ora, uno spazio di $F^{(1)}$ passante per P sta nell'iperpiano tangente in P ad $F^{(1)}$ e sulla quadrica polare di P rispetto ad $F^{(1)}$, le cui equazioni, per la (3), sono rispett.:

$$a_{00}=0; \quad \Sigma \begin{vmatrix} a_{00} & a_{0s} \\ a_{s0} & a_{ss} \end{vmatrix} = 0 \quad (s=1,2,\ldots,n);$$

e la cui intersezione è il cono quadrico Γ:

$$(5) \quad a_{00}=a_{01}\,a_{10}+a_{02}\,a_{20}+\cdots+a_{0n}\,a_{n0}=0,$$

di vertice lo $[n^2-1]$:

$$a_{00}=a_{01}=a_{02}=\cdots=a_{0n}=a_{10}=a_{20}=\cdots=a_{n0}=0$$

(precisamente l'intersezione dei due $S_{n(n+1)-1}$, di equazioni (4)). Il cono Γ contiene, come spazî massimi, due schiere di $S_{n(n+1)-1}$, tra cui stanno rispett. i due $S_{n(n+1)-1}$ di $F^{(1)}$ passanti per P; ogni altro spazio di $F^{(1)}$ uscente da P sta in uno spazio massimo di Γ senza raggiungerne la dimensione, perchè le (5) portano di conseguenza l'annullarsi di $|a_{ij}|$ solo se sussistono le prime o le seconde delle (4). *Gli spazî completi di dimensione massima esistenti su* $F^{(1)}$ *sono degli* $S_{n(n+1)-1}$*; per ogni punto semplice* P *di* $F^{(1)}$ *ne passano due, che si segano in un* $[n^2-1]$, *e che sono spazî di dimensione massima anche per la quadrica polare di* P *rispetto ad* $F^{(1)}$.

12. Sia ora Ω uno spazio completo di $F^{(h+1)}$; per metterci nelle ipotesi più generali, supponiamo che Ω contenga l spazî S_n di $F^{(n)}$ $(0\leq l\leq n-h)$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ (lin. ind. quelli d'una stessa schiera); cioè che Ω congiunga questi l spazî con uno spazio completo, Ω_1, di $F^{(h+l+1)}$, non contenente più punti di $F^{(n)}$ (Se $l=0$, $\Omega_1\equiv\Omega$). Gli spazî $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ possono non appar-

tenere tutti alla stessa schiera; sostituendo eventualmente alcuni di essi, in modo da avere l spazî di $F^{(n)}$ tutti della stessa schiera (lin. ind.), e congiungendo questi ultimi con Ω_1, si trova uno spazio Ω_0 di $F^{(h+1)}$ la cui dimensione x è $\geq$ a quella di Ω. Congiungendo ora Ω_0 con altri h S_n generici di $F^{(n)}$ di quella medesima schiera, poichè non esistono punti comuni a questi e ad Ω_0, il nuovo spazio che si ottiene, e che sta su $F^{(1)}$, avrà la dimensione $x+hn+h$. Ne segue: $x+hn+h \leq n(n+1)-1$, e quindi: $x \leq (n-h)(n+1)-1$; relazione che dà un confine superiore per la dimensione d'uno spazio di $F^{(h+1)}$. Esso è raggiunto, perchè, come accade su $F^{(1)}$, per un punto generico P di $F^{(h+1)}$, immagine d'una S_h-reciprocità, α, passano due $S_{(n-h)(n+1)-1}$, giacenti su $F^{(h+1)}$, immagini dei due sistemi di S_h-reciprocità che hanno in S_n (o rispett. in S'_n) lo stesso spazio singolare di α; essi si segano in un $[(n-h)^2-1]$.

Non può però passarne un terzo, avente quella stessa dimensione. Infatti, supposto che questo contenga p S_n di $F^{(n)}$ (tutti della stessa schiera; se no, col procedimento di prima se ne potrebbe ampliare la dimensione) lin. ind. $(0 \leq p < n-h)$, congiungendolo con altri h S_n di $F^{(n)}$ di quella stessa schiera (lin. ind. fra loro e dai p precedenti), si otterrebbe uno spazio di $F^{(1)}$ di dimensione (massima) $n(n+1)-1$, e di tipo diverso da quelli del teor. precedente. Si conclude: *Gli spazî completi di dimensione massima esistenti su* $\mathrm{F}^{(h+1)}$ *sono degli* $\mathrm{S}_{(n-h)(n+1)-1}$; *per ogni punto di* $\mathrm{F}^{(h+1)}$ *(ma non di* $\mathrm{F}^{(h+2)}$*) ne passano due, che si segano in un* $[(\mathrm{n}-\mathrm{h})^2-1]$.

13. Ne segue: *La dimensione massima per un sistema lineare completo di* S_h*-reciprocità è* $(\mathrm{n}-\mathrm{h})(\mathrm{n}+1)-1$, *ed è raggiunta dal sistema di tutte le* S_h*-reciprocità che hanno lo stesso spazio singolare o in* S_n *o in* S'_n.

Sistemi completi $(1, n-1)_0$. — **14.** Per un sistema lineare di S_h-reciprocità ha importanza il tipo del fascio generico f in esso contenuto; se S_m, $S'_{m'}$ sono gli spazî d'immersione delle varietà costituite, in S_n ed S'_n, dagli spazî singolari delle reciprocità di f, indicheremo il sistema col simbolo $(m, m')_h$.

Ci occuperemo ora di sistemi $(1, n-1)_0$. Allora, per le formole viste in F. n° 8, il fascio f ha per immagine su $F^{(1)}$ una retta r, congiungente due punti A, B le cui coordinate si

può supporre che siano: per A ($a_{10} = a_{2n} = a_{3,n-1} = \dots = a_{n2} = 1$, e nulle le altre a_{ij}); per B ($a_{00} = a_{2,n-1} = a_{3,n-2} = \dots = a_{n1} = 1$, e nulle le altre a_{ij}).

Un S_k di $F^{(1)}$, immagine d'un sistema lineare ω, ∞^k, contenente f, passa per r, perciò sta nell'iperpiano tangente ad $F^{(1)}$ in un punto qualunque di r, la cui equazione è:

$$\lambda_1^n a_{01} - \lambda_1^{n-1} \lambda_2 (a_{02} + a_{11}) + \lambda_1^{n-2} \lambda_2^2 (a_{03} + a_{12}) - \cdots \\ \cdots + (-1)^n \lambda_2^n a_{1n} = 0 ;$$

le coordinate dei punti di S_k verificano quindi le $n+1$ equazioni:

$$(6) \qquad a_{01} = a_{02} + a_{11} = a_{03} + a_{12} = \cdots = a_{0n} + a_{1,n-1} = a_{1n} = 0.$$

Similmente, S_k sta sulla quadrica polare d'un punto qualunque di r rispetto ad $F^{(1)}$; se si scrive l'equazione di tale quadrica, la si semplifica tenendo conto delle (6), e si esprime che l'equazione ottenuta è identica rispetto a λ_1, λ_2, si trova che le coordinate dei punti di S_k verificano anche le n equazioni:

$$(7) \qquad \begin{array}{l} a_{n1} a_{02} + a_{n-1,1} a_{03} + \cdots + a_{21} a_{0n} = a_{00} a_{02} \qquad\qquad , \\ a_{n2} a_{02} + a_{n-1,2} a_{03} + \cdots + a_{22} a_{0n} = a_{00} a_{03} + a_{10} a_{02} , \\ a_{n3} a_{02} + a_{n-1,3} a_{03} + \cdots + a_{23} a_{0n} = a_{00} a_{04} + a_{10} a_{03} , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn} a_{02} + a_{n-1,n} a_{03} + \cdots + a_{2n} a_{0n} = \qquad\qquad a_{10} a_{0n} . \end{array}$$

Se ora moltiplichiamo le orizzontali di $|a_{ij}|$ rispett. per $-a_{10}$, a_{00}, a_{0n}, $a_{0,n-1}$, ..., a_{02}, e le sommiamo, tenendo conto delle (6), (7), troviamo come somme: $a_{n0} a_{02} + a_{n-1,0} a_{03} + \cdots + a_{20} a_{0n}$, 0, ..., 0. Di qui segue anzitutto che le (6), (7) e la:

$$(8) \qquad a_{n0} a_{02} + a_{n-1,0} a_{03} + \cdots + a_{20} a_{0n} = 0$$

portano di conseguenza l'annullarsi di $|a_{ij}|$. Segue pure che, viceversa, le coordinate dei punti di S_k verificano la (8). La cosa è evidente se i punti di S_k hanno tutti $a_{02} = \dots = a_{0n} = 0$. Nel caso opposto, se le coordinate di quei punti non verificassero la (8), esse dovrebbero annullare tutti i minori d'ordine n della matrice dedotta da $|a_{ij}|$ sopprimendo la prima verticale

(come si vede sostituendo i risultati delle somme sopra eseguite alle singole orizzontali di $|a_{ij}|$); ossia il punto singolare, in S'_n, della S_0-reciprocità generica del sistema ω (di immagine S_k) starebbe nell'iperpiano $\pi : y_0 = 0$ (v. n° 4), il quale ha per corrispondente una stessa retta m in tutte le reciprocità del fascio f. Ma allora, preso in ω un fascio g, avente un elemento α comune con f, e generico, il luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità di g sarebbe una C'^{n-1} entro $y_0 = 0$, per cui tutte le reciprocità di g (tra le quali α, che sta anche in f) dovrebbero a π far corrispondere la retta m; cioè ω sarebbe contenuto nel sistema di tutte le S_0-reciprocità che mutano m in π, la cui immagine su $F^{(1)}$ è precisamente lo spazio $a_{02} = \dots = a_{0n} = 0$. Perciò: Affinchè un S_k passante per A, B stia su $F^{(1)}$, è necessario e sufficiente che le coordinate dei suoi punti verifichino le (6), (7), (8).

Se si semplifica $|a_{ij}|$ mediante le (6), e si pone:

$$a'_{n1} = a_{n1} - a_{00}\,; \quad a'_{n2} = a_{n2} - a_{10}\,, \quad a'_{n-1,2} = a_{n-1,2} - a_{00}\,;$$
$$a'_{n-1,3} = a_{n-1,3} - a_{10}\,, \quad a'_{n-2,3} = a_{n-2,3} - a_{00}\,; \dots ; \quad a'_{2n} = a_{2n} - a_{10}$$

(riscrivendo poi delle a_{ij} senza accenti), si ha che: *Il determinante d'un sistema lineare* $(1, n-1)_0$ *di reciprocità è della forma:*

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & . & a_{0,n-1} & a_{0n} \\ a_{10} & -a_{02} & -a_{03} & . & -a_{0n} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & . & a_{2,n-1}+a_{00} & a_{2n}+a_{10} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1}+a_{00} & a_{n2}+a_{10} & . & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}\,;$$

ove siano verificate le condizioni:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &a_{n0}\,a_{02} + a_{n-1,0}\,a_{03} + \cdots + a_{20}\,a_{0n} = 0\,, \\ &a_{n1}\,a_{02} + a_{n-1,1}\,a_{03} + \cdots + a_{21}\,a_{0n} = 0\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{nn}\,a_{02} + a_{n-1,n}\,a_{03} + \cdots + a_{2n}\,a_{0n} = 0\,. \end{aligned}$$

15. Sostituiamo alle (10) delle equazioni lineari, supponendo $n > 2$ ([12]); una qualunque delle (10) rappresenta una V^2_{2n-4} di un S_{2n-3}, Q_r, sulla quale gli spazî massimi sono degli S_{n-2}, che si rappresentano ciascuno con $n-1$ equazioni lineari ind. Tra questi S_{n-2} vi sono i seguenti, tra loro sghembi: τ_r $(a_{02} = a_{03} = \dots = a_{0n} = 0)$, τ'_r $(a_{2r} = a_{3r} = \dots = a_{nr} = 0)$. Se dunque poniamo l equazioni lineari ind. tra $a_{02}, \dots, a_{0n}$, si dovranno aggiungere *altre* $n-l-1$ equazioni lineari per ciascuna delle (10) $(0 \leq l \leq n-1)$, e gli S_{n-2} ottenuti segheranno gli spazî τ_r in spazî S_{l-1} (per $l = n-1$ si ha τ_r). Le (10) si possono quindi sostituire con $(n+1)(n-l-1)+l$ equazioni lineari ind. (almeno); ottenendo così le equazioni di uno spazio di $F^{(1)}$, di dimensione $n(l+1)$ (o minore). Dimostreremo che, per gli n possibili valori di l, si hanno n tipi di spazî completi di $F^{(1)}$, ossia n tipi di sistemi lineari completi, Ω_l, di S_0-reciprocità; i sistemi minori in essi contenuti si hanno aggiungendo nuove equazioni lineari alle $(n+1)(n-l-1)+l$ precedenti.

Osserviamo perciò che, preso in S'_n un punto generico y_i, l'iperpiano che gli corrisponde in una S_0-reciprocità, il cui determinante abbia la forma (9), ha per coordinate:

$$(11)\quad \begin{aligned} \rho u_0 &= a_{00} y_0 + a_{02} y_2 + \cdots + a_{0,n-1} y_{n-1} + a_{0n} y_n ,\\ \rho u_1 &= a_{10} y_0 - a_{02} y_1 - a_{03} y_2 - \cdots - a_{0n} y_{n-1} ,\\ \rho u_2 &= a_{20} y_0 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + (a_{2,n-1} + a_{00}) y_{n-1} + \\ &\qquad + (a_{2n} + a_{10}) y_n ,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \rho u_n &= a_{n0} y_0 + (a_{n1} + a_{00}) y_1 + (a_{n2} + a_{10}) y_2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + a_{n,n-1} y_{n-1} + a_{nn} y_n ; \end{aligned}$$

tra le quali, per le (10), sussiste la relazione:

$$-a_{10} u_0 + a_{00} u_1 + a_{0n} u_2 + a_{0,n-1} u_3 + \cdots + a_{02} u_n = 0.$$

Dunque il punto singolare in S_n della reciprocità considerata è:

$$(12)\qquad x_0 = -a_{10},\ x_1 = a_{00},\ x_2 = a_{0n},\ \dots,\ x_n = a_{02}.$$

([12]) Per $n = 2$, le (10) si riducono alle: $a_{20} a_{02} = a_{21} a_{02} = a_{22} a_{02} = 0$; e secondochè $a_{02} = 0$, oppure $a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0$, si ritrovano i tipi 3°, 4° del n° 6.

Ne segue che i punti singolari, in S_n, delle S_0-reciprocità di Ω_l riempiono un S_{n-l}, rappresentato dalle l equazioni lineari che avevamo posto tra $a_{02}, \ldots, a_{0n}$. Dunque Ω_l non può esser contenuto in $\Omega_{l-1}, \Omega_{l-2}, \ldots, \Omega_0$, che hanno dimensione minore, nè in $\Omega_{l+1}, \Omega_{l+2}, \ldots, \Omega_{n-1}$, perchè i punti singolari (in S_n) delle S_0-reciprocità di questi riempiono uno spazio minore di S_{n-l}; cioè Ω_l è completo: *Esistono* n *tipi di sistemi lineari completi* $(1, n-1)_0$ *di reciprocità:* $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$*; il sistema* Ω_l *è di dimensione* $n(l+1)$, *e i punti singolari in* S_n *delle sue reciprocità generiche riempiono un* S_{n-l}.

Si ha pure (n° 4) che Ω_l congiunge il sistema di tutte le S_{n-l}-reciprocità che hanno in S_n un dato S_{n-l} singolare, con un sistema ∞^{n-l} del tipo $(l+1, n-1)_l$.

16. Tratteniamoci sul sistema Ω_0, ∞^n, le cui reciprocità, per le (12), corrispondono omograficamente ai loro punti singolari in S_n. Siano:

$$\mu_{2i}^{(r)} a_{2r} + \cdots + \mu_{ni}^{(r)} a_{nr} = \nu_{i2}^{(r)} a_{02} + \cdots + \nu_{in}^{(r)} a_{0n} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

le equazioni d'un S_{n-2} della quadrica Q_r del n° 15. Se esso è sghembo con τ_r, tra le equazioni combinazioni lineari delle precedenti non ve n'è alcuna contenente solo $a_{02}, \ldots, a_{0n}$; cioè il determinante delle $\mu^{(r)}$ non è nullo. E viceversa; per cui le suddette equazioni si possono sostituire con altre del tipo:

$$(13) \quad a_{n-i+2,r} = l_{i2}^{(r)} a_{02} + l_{i3}^{(r)} a_{03} + \cdots + l_{in}^{(r)} a_{0n} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)\ [13].$$

Ponendo questi valori delle $a_{n-i+2,r}$ nell'equazione di Q_r, e richiedendo che essa diventi identica rispetto ad $a_{02}, \ldots, a_{0n}$, troviamo per le $l_{ij}^{(r)}$ le condizioni:

$$l_{ii}^{(r)} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n); \quad l_{ij}^{(r)} + l_{ji}^{(r)} = 0 \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n;\ i \neq j);$$

---

[13] Queste formole rappresentano un'omografia tra τ_r, τ'_r, che è degenere se l'S_{n-2} considerato su Q_r incontra τ'_r; e quell'S_{n-2} è incidente a tutte le rette che uniscono punti di τ_r, τ'_r omologhi nell'omografia. Per un S_{n-2} di Q_r incontrante τ_r e τ'_r l'omografia (degenere) tra τ_r, τ'_r sarebbe di tipo diverso da quelle di cui ci occupiamo (v. Del Prete, *Le corrispondenze proiettive degeneri*, "Rend. Ist. Lomb.", (2) 30 (1897), pp. 400-409 e 464-479; Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, nota (1) a p. 58).

cioè il determinante delle $l_{ij}^{(r)}$ dev'essere emisimmetrico. In tale ipotesi, le (13) sono le equazioni lineari da sostituire ora alle (10).

17. Le proprietà del sistema Ω_0 sono diverse secondochè n è pari o dispari; cerchiamo infatti il luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità di Ω_0. Le coordinate di uno di tali punti annullano i secondi membri delle (11); perciò, ponendo:

$$L_{ij} = l_{ij}^{(0)} y_0 + l_{ij}^{(1)} y_1 + \cdots + l_{ij}^{(n)} y_n \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n)$$

(anche il determinante delle L_{ij} sarà emisimmetrico), si trova che esse verificano le equazioni:

$$(14)\quad \begin{array}{l} a_{00} y_0 \qquad\qquad + a_{02} y_2 + \cdots + a_{0,n-1} y_{n-1} + a_{0n} y_n = 0, \\ a_{10} y_0 - a_{02} y_1 - a_{03} y_2 - \cdots - a_{0n} y_{n-1} \qquad\qquad = 0, \\ a_{00} y_{n-1} + a_{10} y_n + a_{02} L_{n2} + a_{03} L_{n3} + \cdots + a_{0n} L_{nn} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{00} y_1 \quad + a_{10} y_2 + a_{02} L_{22} + a_{03} L_{23} + \cdots + a_{0n} L_{2n} = 0. \end{array}$$

E se φ_{ij} sono i minori di 2° ordine della matrice: $\left\| \begin{matrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \end{matrix} \right\|$ (le cui colonne siano numerate da 2 ad n), e si eliminano a_{00}, a_{10} tra le due prime delle (14) combinate successivamente con ciascuna delle altre, risulta:

$$(15)\quad \begin{array}{l} \qquad\qquad a_{03}(y_0 L_{23} + \varphi_{23}) + \cdots + a_{0,n-1}(y_0 L_{2,n-1} + \varphi_{2,n-1}) + \\ \qquad\qquad\qquad + a_{0n}(y_0 L_{2n} + \varphi_{2n}) = 0 \\ a_{02}(y_0 L_{32} + \varphi_{32}) + \qquad \cdots + a_{0,n-1}(y_0 L_{3,n-1} + \varphi_{3,n-1}) + \\ \qquad\qquad\qquad + a_{0n}(y_0 L_{3n} + \varphi_{3n}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{02}(y_0 L_{n2} + \varphi_{n2}) + a_{03}(y_0 L_{n3} + \varphi_{n3}) + \cdots + a_{0,n-1}(y_0 L_{n,n-1} + \varphi_{n,n-1}) = 0. \end{array}$$

Il determinante Δ di questo sistema d'equazioni è emisimmetrico d'ordine $n - 1$. Perciò, se n è dispari ($n = 2m + 1$), e se i coefficienti delle forme lineari L_{ij} son generici, il luogo dei punti singolari in S'_n è la V_{n-1} di equazione: $\Delta = 0$. Per determinarne l'ordine, osserviamo che le φ_{ij}, per il modo come sono definite, son legate da equazioni analoghe a quelle che legano le coordinate di retta in un S_{n-2}; perciò il determinante ricavato da Δ ponendo $y_0 = 0$ ha nulli i minori principali

di 4° ordine, ossia ha la caratteristica 2 [14]. Se allora sviluppiamo Δ, ordinando per potenze decrescenti di y_0, nel risultato (che è un quadrato perfetto) verrà il fattor comune y_0^{2m-2}, e l'altro fattore sarà il quadrato d'una forma V di grado $m+1$. E precisamente, se P è la radice quadrata di $|L_{ij}|$, e P_{ij} sono le radici quadrate dei minori principali d'ordine $2m-2$ in $|L_{ij}|$, si trova, in base a proprietà note dei determinanti emisimmetrici [15]:

$$(16) \qquad V \equiv y_0 P + \frac{1}{2} \Sigma \varphi_{ij} P_{ij} = 0 \qquad (i, j = 2, 3, ..., n).$$

Se invece n è pari ($n = 2m$), Δ è nullo; e le (15), per valori generici delle $l_{ij}^{(r)}$, dànno le $a_{02}, a_{03}, ..., a_{0n}$ proporzionali alle radici quadrate $\Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$ dei minori principali di ordine $2m-2$ in Δ. Ciascuno di questi, per il ragionamento precedente, è il prodotto di y_0^{2m-4} per il quadrato d'una forma di grado m; chiamando $P_2, P_3, ..., P_n$ le radici quadrate dei minori principali d'ordine $2m-2$ in $|L_{ij}|$, e P_{sij} quelle dei minori principali d'ordine $2m-4$, risulta cioè:

$$\Delta_s = y_0^{m-2}\left(y_0 P_s + \frac{1}{2} \Sigma \varphi_{ij} P_{sij}\right) \qquad (s = 2, 3, ..., n)$$
$$(i, j = 2, ..., s-1, s+1, ..., n).$$

D'altra parte, moltiplicando le ultime $n-1$ delle (14) rispett. per $P_n, P_{n-1}, ..., P_2$, e sommandole, si trova:

$$a_{00}(y_1 P_2 + y_2 P_3 + \cdots + y_{n-1} P_n) + a_{10}(y_2 P_2 + y_3 P_3 + \cdots + y_n P_n) = 0;$$

da cui si ricava il rapporto di a_{00}, a_{10}. Si conclude che un punto generico di S'_n è singolare per *una* reciprocità di Ω_0; e se si dicono corrispondenti due punti, di S_n ed S'_n rispett.,

---

[14] Per un teor. di GRASSMANN e FROBENIUS; v. per es.: E. VON WEBER, *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem*, Leipzig, 1900, Kap. 1°, § 3.

[15] VIVANTI, *Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una equazione Pfaffiana*, " Rend. Palermo ", 12 (1898), pp. 1-20, § 2; CAZZANIGA, *Sopra i determinanti gobbi*, " Rend. Ist. Lomb. ", (2) 30 (1897), pp. 1303-1308; E. VON WEBER, loc. cit., Kap. 1°, § 2.

singolari per una stessa reciprocità di Ω_0, si ottiene tra S_n ed S'_n (per le (12)) la seguente trasformazione birazionale:

$$(17)\quad \begin{cases} \rho\, x_0 = y_1 P_2 + y_2 P_3 + \cdots + y_{n-1} P_n \\ \rho\, x_1 = y_2 P_2 + y_3 P_3 + \cdots + y_n P_n \\ \rho\, x_2 = y_0 P_n + \frac{1}{2} \Sigma\, \varphi_{ij} P_{nij} \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n-1) \\ \rho\, x_3 = y_0 P_{n-1} + \frac{1}{2} \Sigma\, \varphi_{ij} P_{n-1,ij} \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n-2, n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho\, x_n = y_0 P_2 + \frac{1}{2} \Sigma\, \varphi_{ij} P_{2ij} \qquad (i, j = 3, \ldots, n). \end{cases}$$

In questa trasformazione, ad una retta generica di S_n corrisponde in S'_n una C'^{n-1} (luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità d'un fascio generico di Ω_0); perciò si avrà in S_n un sistema omaloidico di ipersuperficie d'ordine $n-1$. Dunque: *Le reciprocità d'un sistema lineare* Ω_0 (∞^n) *corrispondono omograficamente ai loro punti singolari in* S_n. *Se* $n = 2m + 1$, *i punti singolari in* S'_n *formano, in generale, una* V_{2m}^{m+1} *razionale. Se* $n = 2m$, *i punti singolari in* S'_n *riempiono* S'_n, *e le coppie di punti singolari delle reciprocità di* Ω_0 *si corrispondono (in generale) in una trasformazione birazionale tra* S_n, S'_n, *la quale muta gli iperpiani di* S_n *ed* S'_n *in ipersuperficie razionali di ordini rispett.* m *e* $2m-1$.

Esempî. — 18. Riservandoci di approfondire lo studio dei sistemi $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$, portiamo alcuni esempî, che per ora esponiamo senza insistere sulle dimostrazioni.

Per $n = 3$, il sistema Ω_2, ∞^9, è costituito di tutte le S_0-reciprocità in cui si corrispondono una retta ed un piano, dati l'uno in S_3 e l'altro in S'_3; il sistema Ω_1, ∞^6, si ottiene congiungendo il sistema completo di 3ª specie definito da un piano generico di S_3 (od S'_3) con una rete completa di 2ª specie (v. nº 5).

Per il sistema Ω_0, V è una quadrica, perchè la (16) diviene:

$$V \equiv y_0 L_{23} + \varphi_{23} = 0.$$

Ω_0 contiene due fasci di S_1-reciprocità, per ciascun dei quali esiste in S_3 una retta singolare fissa, mentre in S'_3 le rette

singolari sono date dalle generatrici delle due schiere di V; ed il sistema ∞^3 congiunge due tali fasci. In particolare, V può essere un cono quadrico, ed allora i due fasci di 2^a specie anzidetti vengono a coincidere.

Tenendo conto poi dei n[i] 3, 5, 11 si hanno *tutti* i tipi di sistemi completi di reciprocità degeneri tra un S_3 ed un S'_3.

19. Per $n = 4$, il sistema omaloidico definito in S'_4 dal sistema Ω_0 risulta individuato dalle cinque quadriche:

$$(18)\quad \begin{array}{l} y_1 L_{34} + y_2 L_{42} + y_3 L_{23} = 0 ; \quad y_2 L_{34} + y_3 L_{42} + y_4 L_{23} = 0 ; \\ y_0 L_{34} + \varphi_{34} = 0 ; \quad y_0 L_{42} + \varphi_{42} = 0 ; \quad y_0 L_{23} + \varphi_{23} = 0 . \end{array}$$

Le ultime tre passano per la C^3 sghemba: $y_0 = \left\| \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\| = 0,$ e si segano perciò ancora in una C^5 di genere 1, situata anche sulle due prime (come si vede sommando le tre ultime delle (18) dopo averle moltiplicate rispett. per y_1, y_2, y_3, oppure per y_2, y_3, y_4); si ottiene cioè tra S_4, S'_4 una trasformazione nota ([16]). Le ∞^2 corde della C^5 sono singolari per altrettante S_1-reciprocità del sistema, le cui rette singolari in S_4 formano una rigata ellittica di 5° grado, base del sistema omaloidico di V_3^3 che si ha in S_4; e precisamente, ogni generatrice della rigata è singolare per ∞^1 reciprocità del sistema, formanti un fascio, le cui rette singolari in S'_4 son le generatrici d'una rigata cubica normale passante per C^5. Il sistema è completamente definito dalla curva C^5.

In particolare, le quadriche (18) possono passare per una stessa rigata cubica normale G; allora la trasformazione birazionale tra S_4, S'_4 degenera. Il sistema Ω_0 contiene in tal caso un fascio di S_1-reciprocità aventi tutte in S_4 la stessa retta singolare e le cui rette singolari in S'_4 son le generatrici di G, e contiene inoltre una rete di S_2-reciprocità aventi in S_4 un S_2 singolare fisso e i cui S'_2 singolari in S'_4 sono i piani delle ∞^2 coniche di G. Il sistema ∞^4 congiunge quel fascio con questa rete. Ecc.

([16]) Del Pezzo, *Alcuni sistemi omaloidici di quadriche nello spazio a quattro dimensioni*, " Rend. Acc. Napoli ", (3) 1 (1895), pp. 133-139, 3° esempio

20. Il sistema Ω_0 trovato per $n=3$, ed il caso speciale ora considerato per $n=4$, hanno l'analogo tra un S_n ed un S'_n. In S'_n, $\sigma+1$ stelle di S'_{n-1}, $\infty^{n-\sigma-1}$ e proiettive ($\sigma \leq n-2$, $2\sigma \geq n-1$), generano, come luogo degli $\infty^{n-\sigma-1}$ $S'_{n-\sigma-1}$, intersezioni di S'_{n-1} omologhi, una varietà M di dimensione $2(n-\sigma-1)$ ed ordine $\binom{\sigma+1}{n-\sigma-1}$; la quale ammette ∞^σ S'_σ *seganti* (che giacciono su di essa se $2\sigma=n-1$) [17]. Poichè le equazioni di questi $S'_{n-\sigma-1}$ ed S'_σ sono rispett.:

$$\lambda_1 u_{r1} + \lambda_2 u_{r2} + \cdots + \lambda_{n-\sigma} u_{r,n-\sigma} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,\sigma+1),$$
$$\mu_1 u_{1s} + \mu_2 u_{2s} + \cdots + \mu_{\sigma+1} u_{\sigma+1,s} = 0 \qquad (s=1,2,\ldots,n-\sigma),$$

(con le u_{rs} forme lineari delle y_i), si vede facilmente che gli $S'_{n-\sigma-1}$ sono gli spazî singolari in S'_n delle $S_{n-\sigma-1}$-reciprocità d'un sistema lineare ω_1, $\infty^{n-\sigma-1}$, aventi tutte in S_n uno stesso $S_{n-\sigma-1}$ singolare; e che gli S'_σ sono gli spazî singolari in S'_n delle S_σ-reciprocità d'un sistema lineare ω_2, ∞^σ, aventi in S_n lo stesso S_σ singolare. E poichè un $S'_{n-\sigma-1}$ ed un S'_σ generici sono incidenti in un punto, se l'$S_{n-\sigma-1}$ e l'S_σ di S_n sono sghembi, i sistemi ω_1, ω_2 sono congiunti da un sistema ∞^n di S_0-reciprocità che rientra nel tipo Ω_0.

Torino, 26 aprile 1917.

---

[17] Vedi F. nota [7].

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, De Sanctis, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Manno, Carle, S. E. Ruffini, Brondi e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 22 aprile u. s.

Il Socio Segretario Stampini presenta, a nome dell'autore che ne volle fare omaggio all'Accademia, il recentissimo volume del Socio corrispondente Camillo Montalcini, il quale ha per titolo *La Repubblica Cisalpina* e costituisce la prefazione del primo volume degli Atti delle *Assemblee della Repubblica Cisalpina*, la cui pubblicazione è fatta per cura della Commissione per gli Atti delle Assemblee costituzionali italiane nominata dalla R. Accademia dei Lincei. La Classe ringrazia il donatore e si compiace del notevole contributo che col suo volume viene recato alla storia delle assemblee costituzionali della Patria nostra.

Inoltre il Socio Stampini presenta, da parte dell'autore, quale omaggio all'Accademia, una nuova monografia del Pro-

fessore Ferruccio Calonghi, estratta dalla " Rivista di Filologia e d'Istruzione classica „ (Anno XLV, fasc. 1 e 2) e intitolata *Il codice Bresciano di Tibullo*, la quale si collega con l'altro studio pubblicato un anno addietro negli *Atti* della nostra Accademia col titolo *Il codice Beriano di Tibullo. Confronti e osservazioni*. Il Socio Stampini è lieto del nuovo importante contributo apportato dal Calonghi alla conoscenza della tradizione manoscritta Tibulliana, tanto più che si tratta di un codice finora trascurato ma tutt'altro che trascurabile, e ne trae ottimo auspicio per quella edizione critica, a cui il Calonghi da parecchio tempo attende, del Corpo Tibulliano, e che farà parte del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum*. La Classe ringrazia.

In fine il Socio Prato presenta una *Nota* manoscritta, che la Classe ammette alla pubblicazione negli *Atti*, del Prof. Dottore Roberto Cessi e intitolata *Il problema bancario a Venezia nel secolo XIV*.

LETTURE

Il problema bancario a Venezia nel secolo XIV.

Nota di ROBERTO CESSI.

L'età aurea dello sviluppo commerciale veneziano è certamente il dugento; nel corso di quel secolo si sviluppano gli istituti giuridici che ne disciplinano l'incremento e si fissano stabilmente le basi di un organismo, che, mutevole nei suoi particolari e complessi rapporti, trova in quelle una più che secolare resistenza di vitalità. Ed il grande lavoro di attiva creazione di lucro e guadagno, di preparazione ed incremento tecnico e sociale si compie in quel secolo, nel quale si formano veramente i capisaldi di una ricchezza, successivamente sfruttata senza creare una fonte nuova di nuovo ed ulteriore progresso economico attivo.

In poco tempo l'organizzazione economica dell'istituto sociale divenne assorbente, snodando a più vaste imprese l'associazione di capitale, che per secoli avea fruttificato nella più modesta forma della colleganza (1): e dalla forma sociale passiamo ad un più rapido e più frequente scambio internazionale, che ha riflessi sensibili sull'economia generale interna veneziana. Nella seconda metà del dugento, in pochi anni il traffico è senz'altro raddoppiato: le squadre mercantili, che fino al 1271 compievano una sola campagna marittima, nel 1293 esercitavano ormai due viaggi annui, che restarono poi consolidati per secoli (2). Ed il movimento di ricchezza fu tale che allora gli

(1) Cfr. *Note per la storia delle società commerciali in Italia nel medio evo,* in " Rivista ital. per le scienze giur. ", a. 1917, f. I.

(2) A. 1293, 25 aprile: ... *quia navigabatur cum navibus, que non faciebant nisi unum viaticum in anno, et modo navigatur cum galeis, que expediunt via-*

effetti di alcune oscillazioni nella circolazione monetaria si ripercossero sensibilmente sull'economia generale pel timore di uno squilibrio fra importazioni ed esportazioni.

Lo sviluppo dei traffici ed in Oriente ed in Occidente, con centro di scambio Venezia, sollevava, nei riguardi dell'economia della repubblica adriatica, il problema del mantenimento di questo equilibrio, perchè l'incremento della ricchezza nazionale non diventasse fittizio e fosse fondato soltanto e sopratutto sul credito, che al primo accenno di una congestione pletorica poteva esser scosso e produrre fatali conseguenze. Di qui la preoccupazione di mantenere il mercato monetario solido e di impedire ogni perturbamento della circolazione, sia combattendo la alterazione delle valute nazionali e straniere, sia frenando l'esodo della divisa nazionale, opportunamente restringendo le operazioni di cambio all'estero, che in certo momento avrebbero indotto un inasprimento in quelle interne, sia ancora impedendo l'esportazione dell'oro, dell'argento e dei preziosi, di cui si sentiva la necessità per costituire una interna riserva per difendersi contro i facili aumenti dei cambi esteri (1).

Il governo veneto si studiava di allontanare il pericolo di un eccessivo esodo della moneta non compensato da un reale ed attivo incremento della ricchezza nazionale: chè si pensava esser più dannoso che di vantaggio aumentare il traffico, se questo portava la ricchezza fuori anzichè in casa propria, creando sconcerti monetarii e crisi economiche assai pericolose, come succederà poco oltre quando le prudenti norme, che nel dugento aveano trovato retta applicazione sviluppando ed aumentando la ricchezza, furono facilmente oltrepassate dal desiderio di pericolose speculazioni. Ed allora il pericolo, che si era voluto evitare, si rese manifesto: nel primo ventennio del sec. XIV quasi

---

ticum in paucis mensibus... (Sacerdoti, *Le colleganze nella pratica degli affari e nella legislazione veneta*, in " Atti del R. Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti „, t. LIX, p. II, pp. 45). Ed a questo tempo deve riferirsi l'*antiquitus* del Bertaldo (*Splend. venet. civit. consuet.*, ed Schupfer, 1895, p. 26, c. I) e la glossa *In termino* allo Stat. Ven., I, 11, piuttosto che ad un'epoca anteriore, come vuole il Besta, *La cattura dei Veneziani in Oriente*, ecc., Feltre, 1900, p. 8.

(1) Si veggano in proposito le disposizioni relative al commercio col Ponente (Cfr. *Le relazioni commerciali tra Venezia e le Fiandre nel sec. XIV*, in " Nuovo Arch. Ven. „, N. S., vol. XXVII, pp. 9 sgg.).

una sfrenata libidine di guadagno riversa sulla piazza veneziana una valanga di merce, il mercato veneziano diventa pletorico, e l'esportazione non è più capace di coprire l'importazione, nè il consumo interno assorbe tutto ciò che di fuori è introdotto e non può esser riesportato nelle nuove piazze e sui nuovi mercati. Le giacenze aumentano, i magazzini sono pieni, e le riserve di ricchezza accumulate nel passato con sagace cura, grandi e piccole, sono impiegate tutte in imprese aleatorie, che minacciano convertirsi in una effettiva distruzione (1).

Si divulga infatti già nel principio del sec. XIV quella forma che l'Arcangeli chiama commenda locale (2), e più propriamente è una forma di prestito (3), la quale, per sfuggire alle sanzioni che colpiscono l'usura, deve mascherarsi nella partecipazione al rischio del negozio, se vuole essere fruttifero, o dichiararsi almeno apparentemente gratuito. Analogamente anche il deposito, in quanto non sia semplice custodia, ma rivesta il carattere di deposito irregolare, deve presupporre implicitamente la partecipazione al rischio, ed ogni patto esplicito che tenda ad escludere questa condizione fa ricadere il negozio in quella figura usuraria, che la legge vieta e punisce (4).

Attraverso questi negozi, anche fuori della convenzione sociale, si costituiscono i capitali che alimentano lo sviluppo delle aziende commerciali e dànno impulso al traffico, con un ritmo sempre più accelerato, che, abbandonato alla libera iniziativa individuale, non trova sempre quella corrispondente forza di equilibrio che molto spesso viene esercitata a mezzo dell'istituto bancario, il quale può servire bensì ad accentuare l'affanno della speculazione inconsiderata e letale, ma anche può servire a dirigere e frenare certe forme morbose, incrementando

(1) *L' " officium de navigantibus „ ed i sistemi della politica commerciale veneziana nel sec. XIV*, in " Nuovo Arch. Ven. „, N. S., vol. XXXII, pp. 106 sgg.

(2) Arcangeli, *La commenda a Venezia specialmente nel sec. XIV*, estr. dalla " Riv. ital. per le sc. giur. „, a. 1901, pp. 28 sgg.

(3) *Note per la storia delle società* cit.

(4) Nel 1340, 9 luglio, Matteo Trevisano è condannato avendo depositato nel banco di Donato Quintavalle campsor l. 400 con l'interesse di l. 14 p. per tre anni, *et officiales dicunt ipsum commisisse usuram cum speciali pacto habendi prode dictorum denariorum sine periculo vel risico alicuius tabule.*

lo sviluppo della buona speculazione e combattendo ed impedendo il fiorire di artificiose situazioni, che preparano il baratro ai loro stessi autori od ai meno cauti di loro.

Una siffatta funzione male si esplica nella prima organizzazione bancaria medioevale, e nell'economia veneziana. All'atto del suo costituirsi trovò ostacoli ben superiori a quelli di una incerta e mal definita legislazione in tale materia: tanto più che la preoccupazione dello stato fu richiamata sul lento e progressivo aggravarsi del problema monetario e circolatorio, che, nonostante i migliori sforzi, restò sempre refrattario alle empiriche cure del legislatore.

Ma prescindiamo per un momento da questo: studi recenti mi richiamano a considerare più attentamente il problema bancario nelle sue vicissitudini durante il più travagliato secolo della storia veneziana, nel suo splendore. Gli egregi autori, i Dott. M. Brunetti e G. Orlandini, di un volume sul *Banco Giro* di Venezia, a buon merito premiato, gentilmente mi comunicano le bozze del primo capitolo del loro lavoro, relativo al periodo così detto della libertà delle banche, o, come meglio direi, dell'esercizio privato dei banchi, tramontato al cader del sec. XVI tra successive prove di creazione di una banca di stato: la loro amichevole cortesia mi permette di raccogliere alcune osservazioni, che, estranee al loro còmpito, tuttavia riusciranno opportune ad integrare le acute indagini compiute tra gli atti dell'antica repubblica veneziana, da essi con tanta diligenza ed acume esplorati.

Alla domanda quando e come il banchiere si origini e si differenzi dal *campsor*, non è facile la risposta, sia perchè essa rientra in un ordine sociale non locale ma generale, sia anche e più perchè la compenetrazione delle due figure è tale che invano ricercheremo il momento cronologico della loro differenziazione, se pur è possibile fissare fra essi un carattere discretivo.

A Venezia, del resto come altrove, il *campsor*, se originariamente fu semplice cambiavalute, nel graduale e successivo sviluppo dell'economia locale e generale fu necessariamente tratto a funzioni più complesse, tanto più che alla figura del *campsor* si accoppiava anche quella del mercante. Il *campsor* in un primo periodo esercitò sopratutto il cambio interno delle

valute e degli ori ed argenti, come funzione di stato (1), mentre quello esterno era libero, e liberamente esercitato (2): era autorizzato ad accettare depositi (3). Poi come mercante poteva esercitare ogni altro negozio commerciale, salve le restrizioni comuni a tutti i mercanti, o quelle particolari in quanto si riconnettessero all'esercizio del cambio.

Tale sistema di controllo sulla vera e propria funzione del cambio nei banchi dei *campsores* non avea altro fine che di regolare con vigile attenzione la circolazione monetaria. ed impedire che la moneta diventasse oggetto di illecita speculazione, di impedire che la divisa nazionale esulasse da Venezia o subisse sconcerti per l'introduzione di valute contraffatte od alterate o illegali (4), e di impedire i forti aggi mantenendo il mercato interno fornito di oro ed argento col divieto dell'esportazione e con un sistema di prelazione a favore dello stato per la costituzione delle riserve metalliche di fronte alle divise estere (5).

(1) Il banco di cambio non poteva aprirsi che per concessione del governo (Cfr. 1342, 1° sett., *Grazie*, IX, 60). Avverto che i documenti qui riferiti saranno, più o meno integralmente, riprodotti dal Brunetti e dall'Orlandini in calce al loro studio, e che naturalmente ometto ciò che è ben detto ed assodato da questi due egregi studiosi, ai quali porgo vive grazie di concedermi l'esposizione di alcune osservazioni, che servono ad integrare le loro ricerche sotto altri punti di vista.

(2) Così nelle disposizioni relative al cambio col Ponente (*Le relazioni* cit., p. 10) ed in quelle relative alla casa fiorentina dei Medici (*Magg. Cons.*, *Presb.*, c. 82).

(3) Cfr. i doc. del sec. XIII riferiti dal Cecchetti, *Appunti per la storia delle finanze veneziane*, in "Arch. Ven.", XXXV, 41. Ed in relazione a questa funzione, quale garanzia, era imposto dal governo l'obbligo di una cauzione, prima di L. 3000, poi di L. 5000, della quale il Morosini nel 1374 affermò l'inutilità, quando propose l'istituzione del banco di stato, e la restituzione del campsor alla sola funzione di cambia valute: *Item ordinetur quod aliquis bancherius non teneatur vel debeat amplius dare pleçariam, quam dant, quia non erit necessarium* (*Senato Misti*, 34, 141).

(4) *Magg. Cons.*, *Comunis*, II, 129 - 1282, 3 maggio, relativo alle monete del re di Rascia contrafatte.

(5) Di qui l'obbligo ai mercanti, che accedevano a Venezia, di *ostendere argentum et monetas argenti, quas adduxerint*, ai massari della moneta, e se con questi non potevano accordarsi pel cambio, di commerciarli solo *ad cambium S.ti Marci* (*Magg. Cons.*, *Com.* II, 136 - 1268, 30 aprile), i cui banchi erano obbligati a versarne una percentuale proporzionale in zecca.

Ma non dimentichiamo che il *campsor* molto spesso era anche mercante: è vero che non esercitava il commercio come tale, ma è altrettanto vero che l'abbinamento nella medesima persona delle due funzioni dovea produrre un abbinamento delle due operazioni creando il vero e proprio banchiere, quello cioè che si interpone come mediatore fra capitale ed impiego di capitale, esercitando su tale movimento l'oggetto della sua speculazione.

Il *campsor* che arriva a tale sviluppo e compie tale evoluzione, senza perciò abbandonare il suo carattere primo, diventa banchiere (1), e trae forza dalle necessità pratiche del mercato monetario e commerciale, che automaticamente impongono l'uso di artifici e sistemi semplificatori o sostitutori, ovvero e l'uno e l'altro nello stesso tempo, secondo il caso. Colui che ha affidato i suoi capitali ad una casa commerciale, ad un commerciante, sotto condizione di partecipazione del rischio, attende la liquidazione dell'interesse, alla scadenza del prestito o del negozio, o secondo un tasso prefinito o secondo il tasso normale al momento della liquidazione (2). Chi è invece esso stesso mercante molto spesso si serve del banco di cambio per deposito di riserve o capitali da impiegare, lasciandone la libera disponibilità al *campsor* per un determinato periodo, salvo il diritto di cessione a terzi come titolo di pagamento dei suoi debiti.

E da questo sistema, sia per necessità di facilitare le operazioni di credito, sia anche e forse più per le contrazioni na-

---

(1) Cfr. Lattes, *La libertà delle banche a Venezia dal sec. XIII al XVII*, Milano, 1869, pp. 27 sgg.; Ferrara, *Gli antichi banchi di Venezia*, in " Nuova Antol. ", XVI, 183 sg. Il nome di *bancherius de scripta* comparisce solo nella seconda metà del sec. XIV (Lattes, op. cit., p. 34, doc. VIII), ma in realtà non si fa distinzione nella terminologia fra *bancherius* e *campsor*, tanto che nel 1356 si parla dei *bancha cambiorum Rivoalti*, e più tardi, nel 1374, di *bancherius vel campsor qui teneat banchum de scripta* e di *bancha cambiorum a scripta*. Da ciò si deduce che si ha il *campsor* che continua ad esercitare soltanto il cambio, ed il *campsor* (conosciuto molto più tardi col solo nome di *bancherius*) che, oltre il cambio, esercita le altre operazioni identificate nella formula *a scripta*.

(2) *Note per la storia delle società* cit.; Arcangeli, op. cit., p. 28 sgg.; Cecchetti, op. cit., p. 41.

scenti sul mercato finanziario in seguito alla scarsezza delle valute, si generalizzò l'uso nei *campsores*, accettanti depositi di terzi in nome proprio, di eseguire per conto dei depositanti quel giro di partita, dal quale nella seconda metà del secolo XIV sorse anche il nome di *campsores vel bancherii de scripta*. Ma se l'introduzione in Venezia del giro di partita nei banchi veneziani risale solo alla prima metà del sec. XIV, questo trova un precedente immediato e necessario nel *campsor* che accetta depositi, di cui si ha notizia anche anteriormente, ed è possibile solo quando il *campsor* sia anche mercante.

Il banchiere nasce gradualmente dalla fusione di tutti questi elementi, e se ad un certo momento il suo distacco dal *campsor* appare più visibile, gli è perchè alla funzione ordinaria si è sovrapposta quella accessoria con uno sviluppo decisamente assorbente. Ed è perciò vano ogni tentativo di fissarne cronologicamente la genesi, chè, quando cade sotto le sanzioni del diritto positivo, la sua figura è già pienamente formata e la sua funzione è da molto tempo in esercizio immedesimata in un sistema economico, del quale risente danni e vantaggi.

I vantaggi si compendiano in una maggior larghezza di attività; i danni risultano da un complesso di cause che turbano la vita economica e più particolarmente lo sviluppo commerciale del mercato veneziano, la cui meravigliosa attività si svolge tra un succedersi di crisi violente e penose, che sollevano nell'azione di governo teoriche e pratiche opposte, nella speranza che l'adozione di un sistema meglio di un altro valga a sanare la malattia che turba il regolare funzionamento dell'organismo sociale (1). Non si può dire che il rimedio architettato dalla mente del legislatore sotto la pressione dell'interesse particolare raggiunga lo scopo, sia per vizio d'origine perchè preoccupato da un preconcetto unilaterale e parziale, sia pel presupposto empirico da cui muove: ma anche se il rimedio, forse anche per difficoltà intrinseche alla natura del male, non risulta nei suoi effetti buono ed efficace, all'intuito del legislatore non sfugge la vera causa del male, lo squilibrio cioè prodotto da una inordinata speculazione, che non riesce a coordinare le im-

---

(1) *L'“officium de navigantibus”*, cit., p. 122 sg.

portazioni colle esportazioni ed altera fortemente l'equilibrio del mercato monetario e della circolazione gravando la vita economica di una intollerante crisi.

Quando s'affaccia questo stato morboso le discussioni si accalorano e le maggiori pressioni si esercitano sul governo per trovare una via d'uscita ispirata dall'interesse di chi più sa pesare sulla bilancia dello stato. Ed il problema bancario nel corso di queste vicende più o meno direttamente era preso in esame, e diventava oggetto di studi e riforme non in sè e per sè, ma come complemento necessario ed integrante dello stato di crisi e più che come fattore quale effetto di questo.

Naturalmente esso si riconnetteva sopratutto al problema della circolazione, la cui gravità si avvisa più sensibilmente alla metà del sec. XIV, ma sarebbe erroneo credere che fosse subordinato esclusivamente a questo. Il difetto della circolazione aveva reso ogni giorno più difficile la condizione del mercato: ed il suo aggravarsi dopo il 1350 avea acuito il malessere che avviliva la piazza veneta (1). Dopo le esperienze, non liete, di anni anteriori, le discussioni fra liberisti e protezionisti si riproponevano di fronte ad uno stato di crisi almeno latente, che minava lentamente l'efficenza del mercato e intralciava l'elasticità degli scambi, mentre dalla piazza scompariva la moneta male compensata dalla pletora di importazione.

Prima che il principio di un estremo protezionismo, altre volte attuato, si riaffermi, vi ha una serie di tentativi per ristabilire l'instabile equilibrio del mercato investendo direttamente il problema monetario. E qui si affaccia il quesito di un miglior regime della funzione dei banchi, anzi si prospetta subito l'idea di rimediare ai difetti della circolazione con l'attuazione d'altra organizzazione, diretta a due fini principali: impedire l'esodo del contante, frenare l'aggio che necessariamente da questo nasceva pel frequente uso della partita di giro.

Giovanni Dolfin nel 1356 proponeva (2) la soluzione del problema così posto con l'istituzione di un banco *per comune*, il quale dovea, nella mente del proponente, esercitare nel mer-

---

(1) *L' " officium de navigantibus "*, cit., p. 123.

(2) *Senato Misti*, reg. 27, c. 102 sg.

cato codesta azione moderatrice, *cum ad bonum publicum nostrorumque mercatorum sit precipue vigilandum et in miliaribus fontici teutonicorum et in argento etiam modus incongruus teneatur.* Con ciò non si intendeva di sopprimere le funzioni dei banchi privati, e tanto meno di ridurle, impedendo ad essi l'esercizio di quei negozi bancari e commerciali, da cui traevano profitto, restituendoli alla sola funzione originaria di cambio-valute. Il Dolfin non pensava di toccare il regime esistente del banco, soltanto di esercitare una più sana azione moderatrice facendo intervenire lo stato nell'esercizio di identici negozii, parallelamente a quelli, col vantaggio che mancando ad esso la finalità di speculazione, poteva esercitare una benefica impressione sul mercato impedendo, quasi in concorrenza, l'artificioso rialzo dell'aggio.

Infatti agli ufficiali del nuovo banco, che dovea aprirsi *ad bancha cambiorum Ricoalti*, doveva esser obbligo *quod modo aliquo vel ingenio non recipiant nec teneant aliquam quantitatem pecunie vel aliquem denarium seu depositum super dicto bancho per se nec per alios sed solum teneantur facere scribi omnes solutiones que fient de persona ad personam*, percependo un tasso fisso di un soldo per parte onde sopperire alle spese del banco.

È evidente lo scopo che il legislatore si proponeva: riparare ai danni che si credevano provenire da una soverchia speculazione creando un organo concorrente capace di una funzione parallela, senza perciò turbare la funzionalità del banco privato nella sua attività commerciale. Quale poi potesse essere l'efficacia di un tale sistema difficilmente si può giudicare, perchè a noi sfuggono troppi elementi di una pratica attuale e di una situazione complessa, di cui non possediamo tutti i dati di fatto specifici: non possiamo nemmeno dire se sia stato stimato o troppo ardito o troppo mite, certo è che apparve inadeguato, sia per la sua unilaterale limitatezza, sia perchè i disagi della crisi attuale non aveano prodotto tutti i loro effetti e tali da indurre a rimedi preventivi radicali.

D'altra parte non sembra che il difetto della circolazione con tal sistema potesse esser sanato, perchè il problema monetario non era risoluto nei suoi mali principali, bensì soltanto incidentalmente e piuttosto in un suo effetto che in una causa.

La proposta del Dolfin era perciò viziata nella sua origine

dal difetto di quell'incertezza, che del resto turba la crisi latente nel commercio veneto di quegli anni: non fu perciò accolta, come non ebbe efficacia ogni altra proposta tendente a trovar piccoli rimedi a questo od a quello sconcerto, quando si facesse chiaro e palese, finchè la crisi non precipitò nell'estrema soluzione adottata alla fine del 1361 (1).

Pel momento si era cercato di alleviare la crisi con leggeri ritocchi legislativi: nel 1358 si lamentava che in Venezia si soffrisse di un *magnum incommodum denariorum contatorum quod inducit manifestum damnum in facto mercationum tam intus quam extra in facto navigandi, et hoc videatur esse occasione ducatorum, qui portantur extra terram* (2). Il problema si riproponeva nella sua più stringente realtà, ma la commissione dei savi, cui fu deferito l'esame *super facto auri et monetarum auri et super omnibus et singulis spectantibus ad praedicta, examinando etiam et providendo de banchis campsorum, tam in plegiariis, quam aliis pertinentibus ad dicta banca*, non riuscì a concretare una proposta che veramente corrispondesse alla premessa dell'iniziativa senatoriale. L'opera sua si esaurì nell'esame e nella riforma di materie secondarie, e, fra l'altro, i provvedimenti deliberati sull'argomento dei banchi non sono corrispondenti alla gravità della situazione enunciata nella decisione del senato di delegare ad una commissione speciale l'esame di tanta questione. Sembra che i savi non ritrovassero male più profondo di quello provocato dall'alterazione dell'intrinseco delle valute per la cattiva speculazione di *stronzar* la moneta, e perciò si limitavano a proporre, ed il senato approvava, che fosse fatto obbligo al *campsor* di tenere *omnes monetas, quas volet cambiare, sparsas super bancum nec possit cambiare de aliis monetis quam de illis que erant sparse super banco palam* (3). Più in là non si arrivava: provvedimenti radicali contro un male tanto profondo, anche considerato in sè, all'infuori della crisi generale del mercato, non si escogitavano, accettando il rimedio di piccole riforme che avevano il carattere di espedienti col miraggio di prolungare, piuttosto che risolvere, la crisi nella sua evoluzione.

---

(1) L'"*officium de navigantibus*" cit., p. 124.

(2) Lattes, op. cit., p. 30, doc. III.

(3) Lattes, op. cit., p. 31, doc. IV.

Naturalmente, rimanendo immutate le condizioni generali produttrici del malanno, questo presto o tardi dovea precipitare per fatalità in quella soluzione radicale, che non era stata prevenuta a tempo. Appartiene al dicembre del 1361 l'adozione dell'indirizzo protettivo nella politica economica e commerciale veneziana (1), come estremo e necessario rimedio ad una situazione ormai insostenibile: e pochi mesi avanti, perdendo di vista il problema generale, la discussione si era svolta senza alcun risultato attorno alla questione della circolazione.

Ancora una volta, nel settembre di quell'anno, il senato, lamentando che le *monete nostre auri et argenti videantur multum deffecisse et quottidie defficere, quod est in maximum sinistrum et impedimentum mercationum et totius terre*, delegava ad una nuova commissione di cinque savi di esaminare la questione, coordinatamente al problema bancario (2). Ancora una volta si era parlato allora della necessità di istituire uno o più banchi *per comune*, perchè si diceva che senza tale provvedimento *status mercationum est pro recipiendo maximum sinistrum*; ed ancora poco più di un mese dopo se ne parlava in quarantia (3), senza che alcuno si sentisse capace di trovare la formula risolutiva. Tante discussioni non arrivavano ad alcuna conclusione, chè questa era superata da una risoluzione più generale e comprensiva, che, nonostante i dibattiti, nonostante le opposizioni, si presentava matura: il sostanziale mutamento di indirizzo della politica commerciale ispirato a concetti protezionisti (4), nel quale implicitamente si credettero risolvere anche le difficoltà della circolazione ed il problema bancario, toccando il male nella sua radice, senza bisogno di dover alterare o turbare la funzione quotidiana di singoli istituti, le cui anormalità si sarebbero automaticamente eliminate alla prova dei fatti, come prodotto del protezionismo moderatore e coordinatore delle attività mercantili.

Se questa previsione si sia avverata, è difficile poter asserire: appena rileverò, chè l'argomento mi porterebbe in altro

---

(1) *L'"officium de navigantibus"* cit., p. 124 sgg.
(2) Lattes, op. cit., p. 32, doc. V.
(3) Lattes, op. cit., p. 32, doc. VI.
(4) *L'"officium de navigantibus"*, cit., p. 124.

più vasto campo, il pronunciarsi di un reale sensibile miglioramento nell'economia monetaria e nella circolazione; ma forse è da dubitare che il presunto ferreo protezionismo, che si voleva imposto al mercato veneziano, abbia raggiunto tutti i suoi fini. I vincoli e le restrizioni limitanti il libero scambio riuscirono a frenare lo squilibrio fra importazioni ed esportazioni, sollevando la piazza veneziana dalla congestione pletorica in cui era piombata: però favorirono lo sviluppo dei grandi mercanti a danno del medio commercio, che tuttavia aveva sì larga estensione. E ciò prova che la bontà di un sistema, il quale aveva trovato una tenace resistenza alla sua introduzione, fu meno apprezzata di quanto speravano i loro autori, appunto perchè si dubitava che l'accentramento delle operazioni di scambio potesse risolversi in un vantaggio generale di tutta l'economia veneziana.

Appena due anni resistette tale indirizzo alle critiche avversarie: nel 1363, dopo molteplici attenuazioni, si ritornava al sistema tradizionale equamente temperato da ciò che l'esperienza avea insegnato, proclamando bensì la libertà di scambio, rigorosamente però escludendo il prepotere del capitale straniero nel suo intervento diretto od in quello larvato attraverso la persona di terzi.

L'invadenza del grande capitale, il quale progressivamente tendeva a crearsi nell'attività degli scambi e sul mercato una posizione privilegiata ed arrivare quasi ad un monopolio, era temuta, e tuttavia non abbastanza combattuta. Il governo, nel valutare gli elementi in conflitto nella pratica quotidiana della vita economica, non traeva norma da un principio teorico assoluto e deciso; piuttosto cercava di stabilire fra le opposte tendenze condizioni di equilibrio, lasciando che nei contrasti stessi si risolvessero situazioni, si superassero crisi e si maturassero i bisogni da esser volta per volta legislativamente regolati con criterio equitativo, ma essenzialmente singolare ed unilaterale.

Il ritorno al liberismo perciò nel 1363 non è un semplice ritorno ad una tradizione teorica e pratica, ma è contemperato da criteri intesi a tutelare l'interesse degli avversari a siffatto indirizzo di governo. Il quale però non è consolidato in un regime sempre conseguente e capace di eliminare le cause di conflitti e contrasti opposti al vantaggio generale dell'economia privata.

Come non erano state prima eliminate le cause prime della crisi imminente, così persistettero anche dopo l'apparente passeggero sollievo prodotto da un momento di sosta. La sfrenata speculazione non fu arrestata, e le conseguenze, ch'essa apportava col lento e progressivo prevalere del grande mercantilismo, periodicamente si fecero sentire per molto tempo. Ed a questo partecipava, per immediato e necessario concatenamento, l'attività bancaria, il cui sviluppo era stato ed era parallelo alla formazione di grandi capitali investiti nei traffici esterni. Se mai, l'azione di governo, pel prevalere della tendenza liberista, fu piuttosto diretta contro questo accentramento, che si riteneva sinistramente operasse sull'equilibrio economico interno ed esterno, e determinasse quegli sconcerti di circolazione che in ultima analisi tratto tratto si manifestavano: ma provvedimenti radicali non furono tentati nè proposti se non quando il pericolo assunse carattere decisivo, e neppure allora tali da considerarsi veramente radicali.

Solo ad un decennio di distanza il problema bancario fu rimesso sul tappeto, ed ancora una volta a preludio di un tentativo di ritorno ad un indirizzo protezionista.

Nell'agosto del 1374 nell'assemblea senatoriale se ne riparlò: le condizioni del mercato erano ricadute in uno dei consueti stati periodici di crisi, paragonabile a quella del ventennio precedente, ed era necessità provvedere *pro bono terre nostre et mercatorum et mercationum etiam nostri communis super facto bancorum Ricoalti, que non possent stare in peiori termino eo quo sunt ad presens, consideratis damnis et incommodis, que fiunt toti terre* (1).

Ancora una volta si proponeva il quesito di una riforma dei banchi, e si chiedeva l'instaurazione di un *modus, ordo et regula in predictis, que sit secundum deum, honorem nostrum et bonum mercatorum et mercationum,* siccome uno degli elementi essenziali della vita mercantile veneziana, dal cui riassetto questa sarebbe sortita rinnovata e riequilibrata. Ed in questa occasione, a dir vero, il problema fu affrontato con maggior larghezza e con più ferma intenzione di risolverlo, sia perchè

---

(1) Lattes, op. cit., p. 33, doc. VII - 1374, 31 agosto.

l'evoluzione dell'economia generale dell'ultimo ventennio avea spostato molti valori, sia perchè si intuiva che strettamente si coordinava a questo problema quello più vasto dell'indirizzo generale della politica commerciale veneta, che per chiari sintomi si tentava trascinare nuovamente all'oppugnato regime protezionista.

Le diverse tendenze ebbero allora occasione di chiarirsi in seno alla commissione, cui fu deferito l'esame del problema (1), per sottoporlo più nettamente all'esame del senato in due risoluzioni ben definite, l'una favorevole alla soppressione dei banchi privati ed all'istituzione di un banco di stato, l'altra ispirata a concetti più liberali e meno radicali, ma informata a criteri restrittivi.

Michiel Morosini (2), uno dei cinque savi della commissione, con una fiera requisitoria avea sostenuto la prima soluzione, affermando che una lunga esperienza avea dimostrato, *quod bancha cambiorum a scripta male et pessime responderunt et cum notabilissimis damnis totius communitatis Venetiarum in tantum quod quilibet deberet spetialiter vigillare quod amplius terra non cadat in istos errores, consideratis malis et sinistris et onere et obprobrio que secuta sunt et sequerentur in posterum, nisi provideatur de claro et opportuno remedio superinde*, alludendo all'affanno della speculazione che avea agitato i banchi, sinistramente operando sulle condizioni del mercato, e trascinandone taluno in dissesti dolorosamente ripercossi per tutta la città. Il proponente era deciso ad annullare la funzione principale del banchiere interdicendogli l'esercizio commerciale e restituendo il banco di cambio al suo primo carattere, con divieto d'accettare depositi, autorizzando i camerari di comune a sostituirsi ad essi limitatamente agli stranieri *qui vellent facere depositum de suis argentis vel monetis vel aliis*, ad esclusione però di ogni figura di deposito fruttifero. E rimedio efficace dovea invece riuscire l'istituzione di un banco di stato, secondo i concetti poco meno che vent'anni prima sostenuti dal Dolfin, con questa differenza che mentre questi non era arrivato alla conseguenza estrema di vietare la funzione normale del

(1) Lattes, op. cit., p. 33, doc. VII – 1374, 31 agosto.
(2) *Senato Misti*, reg. 34, c. 141 – 1374, 18 ottobre.

banco privato, il Morosini voleva fosse creato un monopolio per ogni operazione di credito a favore del banco di stato, la cui attività era sempre limitata a *scribere scriptas vel pagamenta que fient de persona ad personam*, con divieto di accettar depositi ed operare su questi.

Ed erano queste le prime prove di resistenza contro i tentativi di un ritorno ad un protezionismo ad oltranza, dei cui vantaggi e svantaggi si era ripetutamente fatta chiara esperienza.

Si temeva l'azione di un banco *nimium potens*, e non si voleva che alcun istituto raggiungesse tale sviluppo di potenzialità finanziaria ed economica, da diventare poi strumento di dominio sopra il medio commercio, condannandolo all'inevitabile sorte dell'assorbimento. Chiaramente lo disse nella sua proposta Zaccaria Contarini (1), affermando che l'esperienza dimostrava *non esse bonum nec utile quod in Venetiis sit aliquod banchum nimium potens*, ma egli non poteva aderire al concetto di un protezionismo a rovescio, perchè riteneva che *privare in totum, quod non sit aliqua bancha a scripta in Veneciis, posset verti in magnum damnum totius terre et comunitatis Veneciarum*, e piuttosto pensava che bastasse l'applicazione di una concezione limitatrice delle funzioni commerciali e finanziarie del banco privato. sottoponendolo al controllo dello Stato.

Sostanzialmente il fine era identico: restringere l'influenza ed il dominio del grosso capitale, mentre già si levavano voci contrarie reclamanti l'adozione di un sistema protettivo. Differenziavano però i mezzi per attuarlo, fra il monopolio di Stato e l'esercizio libero, sia pure debitamente moderato. E certamente il liberismo veneziano minacciava contraddirsi se respingendo ogni concetto protettivo dall'esterno, si fosse risoluto in un protezionismo inverso all'interno: il principio fondamentale della libertà commerciale era troppo caro, perchè potesse subire radicali mutilazioni, anche se suscettibile di restrizioni. Perciò. se la proposta del Morosini urtava direttamente contro questo, anche quella differenzialmente opposta apparve troppo rigida e severa, più che nelle sue premesse, nelle conseguenze colla

(1) *Senato Misti*, reg. 34, c. 142 – 1374, 18 ottobre.

limitazione delle operazioni di credito a ducati 200 e delle operazioni di cambio e partite di giro a duc. 100 al giorno per persona, col vincolo di un permanente controllo. Invece il senato accoglieva una soluzione molto più temperata (1) di vietare ai banchieri il mercato diretto o per interposte persone od in partecipazione sociale di argento, rame, stagno, ferro, piombo, ecc., insomma dei principali oggetti, particolarmente metalli, di commercio e quelli più lucrosi, concedendo, contrariamente alla proposta del Contarini, il libero commercio delle monete d'oro, e l'uso dei contratti a termine su oro ed argento.

A conclusione del dibattito dunque si poneva un principio di parziale riforma nella libertà d'esercizio dei negozi bancari e più in rapporto al problema della circolazione, che non all'equilibrio generale del commercio: chè le restrizioni adottate tendevano ad impedire l'accaparramento sopratutto dell'argento, come quello che in deficenza della divisa aurea serviva a mantenere l'equilibrio del mercato interno. Non solo: nel sistema vigente, e reso obbligatorio, di scambi in natura fra importatori ed esportatori, i preziosi ed i metalli, oltre che alcune merci di provenienza orientale, servivano a combattere lo squilibrio degli aggi creati dalla deficenza delle monete, e perciò si intende l'obbiettivo di impedirne l'accaparramento e l'incetta, che gli istituti bancari per la loro potenzialità finanziaria meglio potevano esercitare.

E una tale riforma era già troppo gravosa, perchè più si potesse chiedere all'azione di governo, quando si pensi alla forza di resistenza della tendenza opposta, che a due anni di distanza tenterà riproporre un ritorno a vecchi concetti e falliti indirizzi protezionisti (2).

Il tentativo nuovo fallì ancora, ma il gravame imposto alla funzionalità dei banchi dalle meno arrischiate riforme del 1374 fu tuttavia non senza conseguenze dolorose, di cui il governo non poteva non preoccuparsi. Chè le stesse finanze dello Stato, alimentate da un regime tutt'altro che organico ed equamente distribuito, nei troppo frequenti artifici escogitati, non potevano prescindere dall'aiuto fornito dai banchi. Non crediamo che i

---

(1) Lattes, op. cit., p. 34, doc. VIII - 1374, 28 settembre.

(2) *L'"officium de navigantibus"* cit., p. 132 sg.

larghi prestiti aperti allo Stato dai banchi privati diventassero la causa preminente del loro malessere: il sistema finanziario veneziano si ripercuoteva non favorevolmente sull'economia nazionale, sia perchè il continuo aumento dei debiti interni come di quelli esterni contribuiva ad alterare l'equilibrio della circolazione, sia anche perchè il regime dei prestiti forzati, col loro carattere essenzialmente fiscale, faceva emigrare il capitale fuori del mercato veneto. Ma nei riguardi dell'economia bancaria tale condizione di cose non esercitava una pressione maggiore che su ogni altra attività dell'economia nazionale. Lo Stato però dovea preoccuparsi, anche sotto questo punto di vista, che la capacità funzionale bancaria non fosse completamente annullata, e perciò ad un certo momento, quando più difficili si manifestarono le condizioni del mercato, la necessità di una deroga fu non solo equa, ma anche imperativa. Nel 1387 i Soranzo (1) lamentavano che per le restrizioni imposte nel 1374 i banchi privati subissero gravi oscillazioni *propter modicam utilitatem et parvam quantitatem auri, que Venetias conducitur, et propter mutationem maximam lagiorum.* La grande variabilità del mercato monetario presentava pei banchi un'alea troppo grave, tanto più che le negoziazioni sull'oro, per la sua scarsezza, erano altrettanto difficili per il progressivo inasprimento dell'aggio che esso avea prodotto. In difetto dell'oro, i metalli, e sopratutto l'argento, nel mercato servivano a frenare i forti sbilanci del cambio, ed è per questo che si cercava di impedirne la speculazione col farne oggetto immediato di commercio. Alla domanda dei Soranzo d'esser esonerati dalla restrizione del 1374 era stato obbiettato che i supplicanti potevano trarne motivo per *ponere argentum in gabella videlicet emere tantam quantitatem et revendere*, provocando un artificiale aumento di aggio nel mercato, mentr'essi affermavano di chiedere soltanto tale facoltà per poter *navigare id quod ement pro contentatione omnium*, per poter cioè avere una disponibilità per l'esercizio dei negozi per conto proprio e non di terzi.

E tuttavia le diffidenze non furono piccole, nè facilmente superabili: alla prima richiesta, il senato, favorevole in tutto,

---

(1) Lattes, op. cit., p. 39, doc. IX - 1387, 4 febbraio.

non accedette nei riguardi dell'argento e del rame (1), mantenendoli obbligati ai vigenti divieti, e solo dopo reiterate istanze accordava nell'agosto (2) che potessero acquistare duc. 4000 d'argento all'anno per impiegarlo esclusivamente nei loro traffici di mare, sotto garanzia *quod dictum argentum sit suum et emptum de suis denariis* e con divieto di esercitare su esso alcun atto di speculazione di compra-vendita.

E fu ciò un bene od un male? Il Lattes (op. cit., p. 44) in proposito osserva che anche Venezia " sotto specie di frenare l'abuso (della circolazione fiduciaria), lo favorì conscia od inconscia a suo vantaggio, non senza gravissimo danno e delle banche e de' deponenti ", per la diminuzione di garanzie offerte o da riserva sonante o da giacenze di merci, e per l'aumento di rischi.

Ma l'appunto non sembra in tutto esatto, chè se sotto questo punto di vista tale restrizione rappresentava per lo sviluppo dell'attività bancaria un danno reale ed inceppante, considerata invece in relazione all'obbiettivo di mantenere l'equilibrio del mercato contro le oscillazioni prodotte da una eccessiva speculazione ed una conseguente perturbazione della circolazione, riusciva spiegabile, se non interamente adeguata.

Forse non era ancora stato inteso nella sua pienezza il valore della funzione bancaria sulla bilancia del mercato interno ed esterno, e forse non si era inteso che gli sbilanci del movimento commerciale erano dovuti a ben altre cause che non al diretto intervento delle banche: il loro cattivo funzionamento e l'audacia di speculazioni pagate a caro prezzo aveano però prodotto panico e fermento e diffidenza ed aveano radicato la convinzione, più volte e variamente manifestata e progressivamente attuata nel corso di cinquant'anni, che il diretto intervento delle banche nell'esercizio commerciale di scambio esercitasse un'azione corruttrice e dannosa e favorisse solo l'illecita speculazione generatrice di dolorosi dissesti.

Ed allora non soppressione dei banchi privati e creazione di monopolio di Stato, perchè il male non sarebbe stato in tal

---

(1) Lattes, op. cit., p. 40, doc. IX - 1387, 4 febbraio.

(2) Lattes, op. cit., p. 41, doc. X - 1387, 30 agosto.

guisa eliminato, ma una violenta coartazione sull'esercizio della funzione commerciale, portata, su questo terreno, alle sue estreme e, se vogliamo, logiche conseguenze colla legge del 1403 (1), che vietava al banchiere l'esercizio del commercio internazionale, *nisi de tanto de quanto fecerit imprestita nostro comuni et de medietate plus*, vale a dire di una volta e mezza del capitale personale del titolare, escludendo l'impiego di ogni altro capitale, reale o fiduciario, dell'azienda bancaria.

(1) Lattes, op. cit., p. 44 sg., doc. XII - 1403, 21 novembre.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSI UNITE

Adunanza del 13 Maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, e Stampini in funzione di Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 19 novembre 1916.

Il Presidente invita il Socio Tesoriere Einaudi a leggere il Conto consuntivo dell'esercizio 1916, già approvato dal Consiglio d'Amministrazione nella sua adunanza del 7 maggio corr. L'Accademia approva, a sua volta, con voti unanimi il detto Conto consuntivo, il cui riassunto è consegnato nel processo verbale della indicata adunanza del Consiglio d'Amministrazione. Pure ad unanimità è approvata la gestione dei Premi Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri. È finalmente approvato, senza osservazioni, il Bilancio preventivo per l'anno 1917, il cui riassunto è indicato nel citato processo verbale del Consiglio

d'Amministrazione. Il Presidente ringrazia, a nome dell'Accademia, il Tesoriere Einaudi per il diligentissimo lavoro.

Si passa all'esame delle quattro *Relazioni*, in bozze di stampa, della Commissione per lo *Studio dei problemi connessi allo stato di guerra e del dopo guerra*, precedute da un breve cenno del Socio Parona, Segretario della Commissione, sui lavori della Commissione stessa, cioè:

O. Mattirolo, *Proposte per un progetto di Legge sulla protezione delle piante medicinali.*

C. Guidi, *Come possa meglio tutelarsi l'incolumità delle popolazioni e l'integrità dei fondi a valle delle alte dighe di sbarramento per la formazione dei laghi artificiali.*

I. Guareschi, *Relazione su alcune questioni riguardanti la alimentazione attuale e dopo la guerra.*

G. P. Chironi, *Sull'ordinamento intorno le miniere di combustibili fossili, olii minerali e gas idro-carburati.* D. L. 7 gennaio 1917.

L'Accademia, dopo breve discussione, approva le quattro *Relazioni*, che saranno pubblicate negli *Atti*.

COMMISSIONE

PER LO

Studio dei problemi connessi allo stato di guerra e del dopo guerra.

PRIMA SERIE DI RELAZIONI

Nell'adunanza tenuta il 24 dicembre 1916 dalla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, il Vice-Presidente Senatore Chironi fece appello alla scienza e al patriottismo dei colleghi perchè vedessero se nelle contingenze presenti, nelle quali ognuno, per quanto gli appartiene, deve concorrere ad agevolare ed assistere l'opera del Governo, suggerendo provvedimenti nuovi o mostrando il difetto di quelli già ordinati, non debba l'Accademia nostra volgere a tal fine una parte dell'attività sua.

Nell'adunanza stessa la Classe accolse con pieno consenso la proposta, e così pure fu accolta dalla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali in seguito a comunicazione fattale dal Presidente Senatore Camerano nell'adunanza del 14 gennaio 1917.

Nell'intento di attuare ed esplicare in tutte le sue parti il programma prospettato dal Vice-Presidente, ed al quale aderivano con plauso le loro Eccellenze Boselli e Ruffini, le due Classi si accordarono per la nomina di una Commissione, che risultò costituita dal Presidente, dal Vice-Presidente, dai Soci Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Brondi, Einaudi, Vidari, Prato e dai Soci Segretari delle due Classi Stampini e Parona.

La Commissione tenne otto riunioni, nelle quali con ampia discussione si esaminarono alcuni punti del largo tema affidato al suo studio. Nella prima seduta del 2 febbraio 1917, il Socio

PRATO, dopo di aver ricordato che il Vice-Presidente CHIRONI, incitando l'Accademia ad occuparsi dei problemi connessi allo stato di guerra, aveva giustamente detto, che accogliendo la proposta essa obbedirebbe alle proprie tradizioni, rammentò, a conferma e schiarimento, i deliberati antichi dell'Accademia nostra in ordine a problemi urgenti determinati da speciali e gravi contingenze del tempo. Infatti gli Atti accademici registrano deliberazioni sulla politica economica dello Stato, sulla illuminazione pubblica, sui quesiti riferentisi all'arte tintoria, alla conservazione dei vini, al problema forestale, ai combustibili fossili, alle applicazioni economiche per l'industria e l'agricoltura. Parve al Socio PRATO opportuno di menzionarli, trovandovi motivo di incitamento per la Commissione all'inizio dei suoi lavori.

La Commissione si attenne particolarmente ad un programma diretto ad interessi futuri, in considerazione del fatto che agli urgenti bisogni del momento provvedono le ordinanze governative.

Nell'ultima sua adunanza del 30 aprile approvò quattro relazioni preparate rispettivamente dai Soci MATTIROLO, GUARESCHI, GUIDI e CHIRONI, deliberando di presentarle stampate (in bozze) all'esame e alle deliberazioni dell'Accademia, convocata a Classi Unite (1).

Con queste relazioni la Commissione non ha esaurito il suo còmpito. Essa continuerà ad attendere allo studio già iniziato e da iniziarsi di altri problemi, intorno ai quali verranno a suo tempo presentate le rispettive relazioni.

Il Segretario della Commissione
C. F. PARONA.

---

(1) Relazioni discusse ed approvate nell'adunanza del 13 maggio 1917:

O. MATTIROLO, *Proposte per un progetto di Legge sulla protezione delle piante medicinali.*

C. GUIDI, *Come possa meglio tutelarsi l'incolumità delle popolazioni e l'integrità dei fondi a valle delle alte dighe di sbarramento per la formazione dei laghi artificiali.*

I. GUARESCHI, *Relazione su alcune questioni riguardanti la alimentazione attuale e dopo la guerra.*

G. P. CHIRONI, *Sull'ordinamento intorno le miniere di combustibili fossili, olii minerali e gas idrocarburati.*

Proposte per un progetto di Legge sulla protezione delle piante medicinali.

La guerra, ponendo gli Italiani nella condizione di dover fare assegnamento sulla sola produzione nazionale delle piante usate per la preparazione dei rimedi, li ha posti di fronte ad un problema di altissima importanza, che occorre risolvere al più presto, affinchè l'Italia non rimanga schiava della industria straniera.

La mancanza di protezione alle piante officinali e aromatiche, ha rovesciato in questi ultimi anni sul nostro suolo la folla degli incettatori esteri, i quali, non potendo far raccogliere in grandi masse le piante officinali e aromatiche nei loro paesi, perchè ivi tutelate da provvide leggi, le hanno invece fatte raccogliere senza riguardo dai nostri erboristi, visto che noi non pensavamo a porre ostacoli alla furia di distruzione.

Molte delle piante officinali, per colpa di case germaniche che operavano in Italia, sono quasi scomparse dalle nostre vallate alpine; e noi siamo ora costretti ad acquistare a prezzi onerosissimi quegli stessi materiali, che abbiamo inconsultamente ceduti a prezzi quasi irrisorii allo stato di piante secche.

La libertà sconfinata, la bramosia di un guadagno immediato, ci hanno posto in condizioni che non possiamo tollerare si facciano peggiori, e più onerose di quelle che già sono oggidì.

È quindi indispensabile avvisare ai rimedi che valgano a proteggere il capitale vivente che ancora possediamo, e a rifare quello perduto.

Il Governo, ancorchè messo in guardia dai voti dei Congressi competenti, sino dall'anno 1882 (1), non si curò mai di

(1) " Congresso Orticolo Nazionale, Torino, 1882 ". — Tema VIII: *La Ricchezza delle Alpi considerata sotto l'aspetto della Flora ornamentale ed officinale.* Relatore Prof. O. Mattirolo.

Proposta IV (approvata all'unanimità dal Congresso e trasmessa al Ministero): " Invitare il Governo ad esercitare una attiva, legale sorveglianza sul commercio di Erboristeria ".

una questione, alla quale dovrà ora accordare la massima attenzione.

La necessità di un controllo di Stato sul commercio delle erbe officinali, anche per ovviare alle sofisticazioni, è evidente; come è evidente la necessità della proibizione, entro certi limiti, della esportazione delle piante officinali, *crescenti spontaneamente.*

Gli esami di pratica per ottenere la patente di *Esercizio di erboristeria* e quella di *Raccoglitore* (le quali, istituite fin dal XIII secolo per opera della Scuola Salernitana, erano rimaste in vigore sino al 1858 presso la R. Università di Torino) appaiono disposizioni indispensabili per riuscire a disciplinare la raccolta delle varie specie, con criterii rispondenti al loro particolar modo di sviluppo, per ottenere il massimo rendimento, colla conservazione delle piante, ed impedire sofisticazioni e sostituzioni.

Con questi criterii, raccomandati dal *Congresso nazionale Orticolo, 1882*; reclamati dal C. A. I.; dalla Scuola di Farmacia della R. Università di Torino nella Adunanza 13 luglio 1914; senza che il Paese abbia a subire oneri finanziarii, anzi traendone un certo vantaggio, l'Accademia ritiene si possa riuscire nell'intento desiderato di ripopolare i nostri terreni di piante officinali, così da assicurare il materiale necessario, adatto alla industria dei medicinali.

L'entusiamo col quale la *Società Botanica italiana*, la *Federazione Pro Montibus*, i singoli *R. Orti Botanici* del Regno, gli *Industriali* stessi, ecc. vanno raccomandando la coltivazione delle piante officinali, incoraggiandola con i più nobili sforzi, ci fanno ritenere che oramai la necessità di provvedere è entrata nella coscienza del pubblico.

Se la libertà male intesa ha rovinato l'industria delle piante officinali, potrà invece una protezione illuminata arrestare l'opera di distruzione, e col sussidio di opportune colture emancipare l'Italia dai mercati stranieri.

Per ovviare ai danni gravissimi che derivano dalla ignoranza e dalla mancanza di competenza di coloro che si dedicano al negozio delle piante officinali e aromatiche; proteggerle, regolarne la raccolta (oggi esercitata col metodo della distru-

zione), impedire le sofisticazioni e le sostituzioni, l'Accademia propone:

1° Sia ristabilito e reso obbligatorio l'esame pratico sulle piante officinali ed aromatiche, per coloro i quali intendono dedicarsi alla ricerca ed al commercio di dette piante, richiamando in vigore il disposto delle RR. Patenti 16 marzo 1839, ove all'art. 99 è detto: *che nessuno potrà esercitare tale professione senza essere approvato in un esame sulle cognizioni dei Semplici e sul modo di essiccarli e conservarli.*

2° Sia ristabilita la visita annuale alle merci raccolte nei magazzini dei commercianti di Erboristeria, e regolati con opportune disposizioni (certificati d'origine) i permessi di esportazione; e ciò per le sole piante officinali ed aromatiche crescenti *spontaneamente* sul nostro suolo, quali vengono designate in apposito elenco.

3° L'incarico delle visite sia affidato a persone competenti, quali i Direttori dei R. Orti Botanici. — I diritti di visita siano a carico dei negozianti.

4° La vigilanza sui raccoglitori e sugli incettatori sia affidata agli Agenti forestali, alle Guardie daziarie, doganali e comunali, che potranno elevare contravvenzioni contro coloro i quali, senza autorizzazione o senza documenti giustificativi, metteranno in vendita quantità di piante officinali od aromatiche, designate in apposito elenco, superiori ai 25 Kg.

Le eventuali multe, previa confisca della merce, derivanti dalle contravvenzioni stesse, saranno devolute ai suddetti agenti. In caso di recidiva, le multe saranno triplicate, e la patente di esercizio revocata.

5° È proibita la distillazione delle piante officinali ed aromatiche, di cui nell'elenco, se non negli stabilimenti a tale uopo autorizzati.

Torino, 30 aprile 1917.

O. Mattirolo.

Come possa meglio tutelarsi l'incolumità delle popolazioni e l'integrità dei fondi a valle delle alte dighe di sbarramento per la formazione dei laghi artificiali.

L'utilizzazione delle acque della nostra Italia, che in confronto di altre nazioni ne possiede ancora in abbondanza, è uno dei problemi più importanti del momento. Sia che vengano impiegate per l'agricoltura e più ancora per la produzione di energia meccanica ed elettrica, esse rimpiazzano i combustibili fossili di cui difettiamo, e ci emancipano in tal modo dall'importazione di questi materiali dall'estero. È in sostanza il cosidetto carbone bianco, che deve urgentemente sostituire quello nero.

Ora è noto che uno dei mezzi più frequenti per raggiungere lo scopo è quello di sbarrare le gole delle valli montanine con traverse o dighe, creando così dei bacini nei quali le acque raccogliendosi vengono a formare laghi artificiali, da cui poi, secondo i bisogni, viene erogata l'acqua. Se, in massima, la soluzione sembra perfetta, funzionando queste raccolte d'acqua come volanti di un meccanismo, contenendo cioè le acque torrentizie nei periodi di pioggia e di scioglimento di nevi, che cagionano spesso gravi danni, e ridandole moderatamente secondo i bisogni, anche e tanto più nei periodi di siccità, essa nell'attuazione pratica non va esente da gravi difficoltà e pericoli.

La storia di queste dighe per la formazione di laghi artificiali si perde nella più remota antichità, e venendo fino ai giorni nostri se ne sono costruite in terra, in scogliera, in muratura, in cemento armato ed anche in ferro; ma nessuno di questi diversi tipi di costruzione può avere il vanto di non essere stato causa di disastri. O che la roccia di fondazione e dei fianchi della gola non fosse assolutamente impermeabile e resistente alle azioni distruttive degli agenti atmosferici e del-

l'acqua, o che la costruzione non fosse progettata, ovvero eseguita, secondo le migliori regole d'arte, o che, come successe più volte, per impetuose piene e per insufficienza di regolari sfioratori, l'acqua tracimasse dalla diga, e, precipitando impetuosamente a valle, sconvolgesse il terreno di fondazione, il fatto sta che la storia è piena di queste catastrofi, che il più delle volte sono state causa di numerose vittime umane e di danni materiali rilevantissimi, e ciò nonostante che dopo alcune più recenti rovine la scienza e la tecnica, col concorso delle menti più preclare e degl'ingegneri più provetti, abbiano collaborato alla ricerca del tipo di diga più razionale ed alle modalità di esecuzione più perfette.

Di molti dei disastri più remoti si è trovata la ragione negli irrazionali tipi adottati da costruttori che non potevano avere, a quei tempi, concetti giusti sul regime di forze da cui il manufatto veniva sollecitato; ma, come si è detto, anche dopo i perfezionamenti apportati dalla scienza e dalla tecnica, i disastri, sebbene più rari, non sono disgraziatamente scomparsi del tutto. Da una ventina d'anni a questa parte poi, cioè da quando hanno preso sviluppo gl'impianti idroelettrici, si è moltiplicata presso tutti i paesi la costruzione di queste dighe, e specialmente negli Stati Uniti d'America, dove hanno trovato applicazione anche tipi nuovi ed ardimentosi, che sono stati causa di svariati disastri.

Senza risalire ad epoche troppo remote, ricorderemo che

nel 1881 rovinava la diga in muratura dell'Habra (Algeri) producendo circa 400 vittime,

nel 1889 veniva travolta la diga in terra presso Johnstown (Pennsilvania) con circa 10.000 vittime,

nel 1895 rovinava la diga di Bouzey (Francia) producendo 86 vittime e danni enormi alle proprietà,

nel 1900 fu travolta una diga del Texas (America),

nel 1908 rovinava la diga d'acciaio sul Missuri (America), fortunatamente senza vittime, perchè situata in località deserta,

nel 1911 rovinava la diga d'Austin (Pennsilvania); un villaggio rimase distrutto con circa cento annegati,

nello stesso anno altre due dighe americane nel Wisconsin furono travolte con gravi danni materiali, ma senza vittime,

nel 1914 in gennaio rovinava la diga americana in béton

armato sul torrente Stony (Virginia occidentale) dopo 6 mesi dalla costruzione, senza vittime, perchè in località deserta,

a pochi giorni di distanza da quest'ultima catastrofe anche la diga in terra di Horse Creek (Colorado) veniva travolta.

Queste poche citazioni mostrano abbastanza quanto grande sia ancora al giorno d'oggi il pericolo di una catastrofe derivante da queste costruzioni, ed il pericolo è tanto più fondato nel momento attuale per la fretta, sotto un certo aspetto giustificata, della esecuzione di queste opere, per la qualità men buona dei materiali impiegati, per la mancanza o scarsità di mano d'opera adatta. Queste opere sono una *spada di Damocle* sospesa sulle popolazioni a valle e sui loro beni, contro la quale non dev'essere trascurata qualsiasi misura preventiva di difesa.

Sembrerebbe perciò equo e liberale che le popolazioni ed i proprietarî dei fondi a valle di queste costruzioni, per l'incolumità delle loro persone e dei loro averi, potessero da loro stessi accertarsi nel modo più ampio dell'assoluta sicurezza delle progettate dighe, e fare eventualmente le loro osservazioni in proposito, il che sarebbe attuabile se si desse ai progetti di tali opere, ancor prima della loro approvazione, la più larga diffusione, ed una volta approvati se ne garantisse nel modo più assoluto la perfetta esecuzione.

È per raggiungere questo fine doveroso ed umanitario che si propone di accentuare più esplicitamente nel Regolamento concernente le derivazioni d'acque pubbliche quelle misure precauzionali che valgano a rimuovere ogni possibilità di rinnovamento di simili sciagure.

Ecco le proposte:

Il progetto esecutivo di una diga di sbarramento destinata alla formazione di un lago artificiale dev'essere presentato a stampa, e firmato da un ingegnere.

Esso dev'essere redatto secondo le norme prescritte da speciale Regolamento.

Di esso sarà depositato presso il locale Ufficio del Genio Civile un sufficiente numero di copie, perchè venga distribuito, oltre che al Ministero dei LL. PP., alla Provincia ed ai Comuni interessati.

Nel detto invio la Provincia ed i Comuni vengono richiesti

delle loro eventuali osservazioni, e questi ultimi terranno esposto al pubblico nell'albo pretorio ed in una sala del Comune il suddetto progetto per la durata di un mese, raccogliendo e trasmettendo al detto Ufficio le osservazioni dei privati.

Spetta al Consiglio Superiore delle acque l'approvazione del progetto, tenuto conto delle osservazioni trasmessegli dall'Ufficio del Genio Civile, delle controsservazioni del progettista, e sentito il parere del R. Ufficio Geologico.

La costruzione di tali opere non può essere concessa che a Ditte le quali comprovino la loro idoneità con certificati rilasciati a norma dell'art. 2 del Capitolato generale per i lavori dello Stato.

Durante tutto il periodo della costruzione, le qualità e proprietà dei materiali saranno comprovate da certificati rilasciati da laboratori ufficiali, e l'esecuzione verrà sorvegliata da un funzionario del Genio Civile.

Se la diga viene costruita in cemento armato, vanno rispettate le *Prescrizioni normali per l'esecuzione delle opere in cemento armato* (D. M. 10 gennaio 1907).

Compiuti i lavori, l'opera verrà collaudata da un ufficiale del Genio Civile, ed entrata che sia in servizio, verrà vigilata da guardiani patentati, e per la durata di due anni si rileveranno a cura del locale Ufficio del Genio Civile, con istrumenti geodetici di precisione, le deformazioni elastiche subìte dalla costruzione corrispondentemente a diverse altezze di ritenuta ed a diverse temperature. Qualora il risultato di tali osservazioni corrisponda alle previsioni teoriche, e da un nuovo esame dettagliato della costruzione nelle varie sue parti essa risulti integra ed in tutto conforme al progetto, la diga s'intenderà collaudata definitivamente.

Ogni tre anni la costruzione verrà minutamente ispezionata da un funzionario del Genio Civile.

Le norme costruttive vengono dettate da speciale Regolamento.

Torino, 30 aprile 1917.

C. Guidi.

Relazione su alcune questioni riguardanti la alimentazione attuale e dopo la guerra.

È inutile premettere che l'importanza delle questioni relative all'alimentazione fu riconosciuta in tutti i tempi e lo è tanto più ora in particolar modo, causa la immane guerra che tormenta l'umanità. Il problema dell'alimentazione è ora uno de' più urgenti che direttamente interessano la nostra guerra. Il primo nostro pensiero deve essere volto al nostro soldato. Fa d'uopo che tutti i cittadini siano persuasi che col fare dei sacrifici, siano pure piccoli o grandi, e continuati, si reca del bene alla Patria nostra e nel contempo si dimostra quella fortezza e bontà d'animo che deve essere l'orgoglio di noi italiani.

La Commissione nominata dall'Accademia delle Scienze ha, dopo animata discussione, deliberato di inviare al Governo le proposte e raccomandazioni seguenti, che riguardano l'alimentazione nostra attuale e anche dopo la guerra:

1° Essere rigorosi nel fare adottare la farina di frumento alla resa del 90 %, tanto per il pane quanto per le paste alimentari.

Il pane preparato con questa farina, se ben lievitato, salato, e sovratutto ben cotto, è un pane buonissimo e nutritivo sotto tutti gli aspetti.

Se si tengono in considerazione, come si dovrebbe, tutt'i migliori criteri relativi alla chimica e alla fisiologia della nutrizione ed alle numerose esperienze fatte, si arriva alla conclusione certa che il pane preparato con farine contenenti buona parte de' tegumenti esterni del grano, è molto più sano e nutriente che non il pane bianchissimo.

Ciò risulta da numerosissime esperienze ed osservazioni fatte già dal 1886 al 1914 da chimici, da fisiologi, da chimici-fisiologi e da medici pratici, anche nei paesi fuori d'Europa.

Dopo la guerra dovrà avere maggior diffusione l'uso del pane bigio o casalingo con farine da 80 a 90 %, anzichè il pane bianchissimo.

2° Prima dell'attuale guerra mondiale, nelle principali nazioni europee si aveva una deficiente produzione di frumento. L'Inghilterra, un tempo tanto rinomata per la sua florida agricoltura, doveva negli ultimi anni importare quasi il 75 % del frumento che consuma; la Francia, l'Italia, la Germania dovevano pure importarne molto. In seguito alla guerra il *deficit* del raccolto è aumentato. La produzione mondiale in questi due ultimi anni è diminuita di più che 200 milioni di ettolitri.

A cagione della deficienza di uomini, di animali, di concimi e di macchine, la coltivazione del suolo è ora resa più difficile. Ciò nondimeno, se noi abbiamo il dovere di predicare la limitazione de' consumi, non è un male, anzi è bene, predicare anche per l'aumento della produzione di ciò che è la base dell'alimentazione, cioè dei cereali, ed in particolare del frumento.

Saranno quindi da tenersi in considerazione tutte quelle pratiche raccomandate recentemente dalla Commissione nominata dalla nostra R. Accademia di Agricoltura e che in gran parte sono quei metodi culturali già tanto raccomandati dal nostro illustre agronomo Gaetano Cantoni sino dal 1871 e principalmente:

Scelta di una buona varietà di frumento,
Preparazione del terreno,
Seminagione precoce,
Semina in linea,
Sarchiatura ed altre lavorazioni moderne,
Concimazione razionale chimica ed abbondante,
Semina a piccola profondità,
Raccolta precoce,

e, come raccomandava il Cantoni, si deve ricorrere a questi fattori contemporaneamente e non isolatamente.

Nè sono da trascurarsi la segala e l'orzo, le cui farine possono essere mescolate in determinate proporzioni colla farina di frumento e fornire un ottimo pane. Sulle nostre Alpi si prepara del buon pane anche di pura segala. La composizione chimica di questo grano è molto somigliante a quella del frumento.

La produzione mondiale della segala raggiunse nel 1910 circa 500.000.000 di quintali, dei quali l'Italia solamente 1.400.000. La farina di frumento può essere mescolata con 15 a 25 % di farine d'orzo, di segala, di mais, di riso (e in Francia anche di grano saraceno) e fornire un buon pane.

È da raccomandare che le cattedre ambulanti di agricoltura, le quali sono già tanto benemerite della nostra agricoltura, si facciano sempre più attive propagandiste delle buone idee moderne sui metodi di coltivazione, specialmente de' cereali e dei legumi; ed a questo scopo si fa voti affinchè siano a queste cattedre ampliati i mezzi materiali ed aumentato il personale insegnante addetto alle cattedre stesse.

3° Ciò che si è detto pel frumento e pel pane troppo bianco con farine al 60-65 %, vale pure per il riso. È da condannarsi l'uso del riso *brillato* e specialmente quello *completamente brillato.* Oggi è dimostrato in modo evidente che il riso svestito, naturale, è molto più nutritivo che non il riso brillato. I fosfati, le vitamine, i fosfatidi, i lipoidi, i fermenti, ecc., vale a dire le sostanze indispensabili alla nutrizione, e particolarmente alla nutrizione del sistema nervoso, si eliminano completamente colla *brillatura*, perchè queste sostanze trovansi solamente o quasi solamente negli involucri esterni del grano. Gli animali, e l'uomo, alimentati unicamente, o prevalentemente, con riso brillato, si ammalano e muoiono.

Abbandonando l'uso del riso brillato si risparmierebbe più di un milione di quintali di buon riso all'anno.

La R. Accademia di Agricoltura ha accolto unanime anche questo voto, questa proposta fatta, in seduta 22 aprile 1917. È troppo evidente la differenza di composizione chimica, già fatta notare anche da competenti chimici francesi, tra il riso svestito naturale e il riso brillato.

L'uomo, nella sua smania di modernità, o di moda, ha in questo ultimo mezzo secolo gettato via, dandolo agli animali, una grande quantità di materiale nutritivo, che doveva invece conservare per sè.

La brillatura è una operazione che rende più apparentemente bello il riso, ma lo spoglia di parti utilissime: il riso non brillato è più saporito e più nutritivo.

I saggi in grande di panificazione con frumento e riso,

fatti nella provincia di Novara, e specialmente nel circondario di Vercelli, hanno dato ottimi risultati. La miscela di 80 parti di farina di frumento e 20 parti di farina di riso, non brillato, ha fornito un pane molto buono e che quasi non si distingueva affatto dal pane di puro frumento. L'uso del riso nella panificazione, specialmente quando vi è deficienza di frumento, dovrebbe essere incoraggiato, tanto più se si usa, come si deve, il riso svestito come è stato adoprato nelle prove in grande fatte sino ad ora.

4° In Italia abbiamo una produzione media di grano che raggiunge appena forse 11 ettolitri per ettaro. E con una così debole produzione di grano, si sono favorite delle industrie che producevano cibi non necessari, non indispensabili alla vita umana, e delle industrie che hanno contribuito allo sciupìo ed al consumo di cibi necessari e non necessari, e ciò solamente per il godimento materiale.

La Commissione raccomanda che siano incoraggiate quelle industrie che sono di diretta utilità per l'agricoltura, affinchè in breve volger di tempo si possa raggiungere una produzione media annua di almeno 14 a 16 ettolitri di grano per ettaro. Occorrono buone macchine e ottimi ed abbondanti concimi, venduti a prezzi convenienti, onesti; fare in modo che gli industriali abbiano un guadagno sì, ma onesto e nulla più.

È doveroso far cessare con severe disposizioni lo scandalo di industriali i quali tendono a far rialzare in modo straordinario il prezzo dei concimi chimici e rendono così impossibile una razionale ed abbondante concimazione dei campi.

Applicando le norme sovra indicate, si potrebbe in molti casi quasi raddoppiare la produzione del grano. Si potrebbe stabilire dei premi per quegli agricoltori che più razionalmente coltivassero i loro terreni a grano.

Anche dei fisici e chimici illustri, quali il William Crookes, avevano sino dal 1898, notisi bene sino dal 1898, preveduto che se non si favoriva di più l'agricoltura e non si regolava meglio il consumo delle farine troppo abburattate, si sarebbe arrivati ad un momento critico, tanto più in vista di una guerra. Il Crookes, per l'Inghilterra specialmente, fu un vero profeta.

5° La Commissione fa voti affinchè sia dato un più ampio sviluppo all'insegnamento ed alla pratica dell'*apicoltura*, che ci

fornisce la *cera* ed il *miele*; ed il miele è un utilissimo succedaneo dello zucchero, anzi l'unico vero surrogato dello zucchero. Il miele contiene molto destrosio e levalosio (zucchero invertito) e poco saccarosio. Il levalosio ha un sapore dolce che è circa 2 volte e mezzo quello del saccarosio. Inoltre il miele contiene altre sostanze che contribuiscono alla nutrizione, quali: delle materie azotate, delle materie organiche non zuccherine, dell'acido fosforico, ecc. Egli è quindi da lodarsi l'impulso che si dà ora a Torino all'insegnamento dell'apicoltura.

6° La Commissione raccomanda un minor consumo della *carne*, e ciò anche in base alle ricerche moderne sul ricambio materiale, le quali dimostrano che specialmente per chi lavora poco, vi ha poco bisogno di carne. Per i non combattenti la carne può essere convenientemente sostituita con legumi, formaggi, uova.

I legumi in particolar modo dovrebbero essere coltivati su maggior scala, e specialmente le lenticchie e la soja. Le lenticchie sono molto ricche di materiali nutritivi e sono di una digeribilità più facile degli altri legumi. La *soja* poi dovrebbe essere molto coltivata anche da noi, perchè è ricca di materie albuminoidi, di grassi, di carboidrati e di fosfati; tutti principii utilissimi all'organismo. Colla soja si prepara un ottimo formaggio, ed ora in Francia la si mescola con farina di frumento per preparare un pane detto *pane di soja*.

7° Ora, e anche dopo la guerra, è da vivamente raccomandare un più severo freno al consumo delle bevande alcoliche, essendo l'alcol un vero veleno, per quanto, a dose molto moderata, come gli altri veleni, non possa talora riescire dannoso. Fa d'uopo essere molto rigorosi riguardo l'applicazione della legge sugli *spacci delle bevande alcoliche*.

Le questioni qui accennate riguardano non tanto lo stato attuale di guerra, quanto e forse più il periodo dopo la guerra.

8° La Commissione fa viva raccomandazione che assolutamente sia ora impedita ogni esportazione di materie alimentari, di qualunque natura esse siano, e particolarmente del riso, dei legumi e delle patate.

Si deve proibire in modo assoluto, severo, il consumo di farine di grano per focaccie o pani con frutta o in forma che non sia di pane. Ed in conseguenza limitare molto o proibire

la fabbricazione di tante varietà di biscotti dolci, i quali non sono che dolciumi mascherati.

9° Per ragioni di conforto al nostro soldato, l'Accademia fa voti che non sia mai sostituita la razione giornaliera del caffè e zucchero con altre materie alimentari, quali poche castagne o noci, ecc. Se vi è scarsezza di zucchero puro, sia unicamente riserbato al soldato, ai malati ed ai bambini lattanti; vale a dire diminuire in generale il consumo dello zucchero e riserbare questo edulcorante agli usi sovraindicati, incoraggiando invece la coltivazione dei cereali.

Nella preparazione di sciroppi (non medicinali), di liquori, di vini-liquori, ecc. si adoperi la saccarina; anzi è da raccomandarsi che sia assai diminuita la fabbricazione di liquori ed altri prodotti che importano grande consumo e sciupìo di zucchero. Salvo a sostituire lo zucchero con saccarina. Ma in ogni caso ne sia frenato l'uso quali bevande alcoliche.

I. Guareschi.

Sull'ordinamento intorno le miniere di combustibili fossili, olii minerali e gas idrocarburati.

D. L. 7 gennaio 1917.

L'ordinamento che la legislazione di guerra dà intorno le " miniere di combustibili fossili, ecc. ", due novità presenta, e ragguardevoli assai. Una, la meno notabile in rispetto ai concetti giuridici fermati nella legge comune e nei principî tradizionali, ma notabile invece nei riguardi della economia generale del paese, è l'instituire un collegio speciale unico, al cui giudizio è deferito il permettere la esplorazione dei luoghi dove par che esista il minerale cercato, e la concessione dell'esercizio delle miniere nei luoghi esplorati: ordinamento di convenienza non poca, quando si pensi alla sollecitudine con la quale un solo magistrato può provvedere in materia di così grave interesse pubblico. Nè a dimostrare quale e quanta tale gravità sia, occorrono argomenti

molti: basta guardarsi attorno: e pôr mente alla preoccupazione che in ogni maniera di attività industriale e nella economia domestica stessa, venne eccitata dal mancato approvvigionamento della normale quantità di combustibile fossile. Ond'è che dei benefici morali ch'è lecito attendere da tanta guerra combattuta per l'esistenza e la dignità del paese, pur questo è a segnalare: il riflettere noi sulla necessità di provvedere fin che si possa a noi stessi: e quindi il dover di conoscere quali forze naturali esistano nel territorio nostro onde la generale economia possa vantaggiarsi: e conosciute, e determinate che siano, trarne ogni e miglior giovamento, impedendo che capitali e intelligenze di fuori facciano, con danno e vergogna nostra, ciò che a noi è e dev'essere còmpito supremo di lavoro, e ragion di utile e di ricchezza.

Ben venga dunque il provvedimento. Lo Stato di fronte a tanta cagione di generale interesse, qual'è questa del ricercare quali e quanti giacimenti di combustibile fossile esistano nel sottosuolo nazionale, e ricercati che siano metterli convenientemente a profitto, non ha esitato nel dire e affermare la funzione naturale sua; asserisce a sè il poter di consentire la ricerca, di concedere l'esercizio della ricerca utilmente fatta, e di vigilarlo così da determinarne la revoca se male sia tenuto, o se venga in contradizione col pubblico giovamento: e a conseguir meglio questa, che dello Stato è ragion perenne di vita, si asserisce pure la facoltà di curare con mezzi diretti l'esercizio della miniera scoperta. Facoltà giustamente ristretta, quasi a modo di eccezione: troppi argomenti, e vecchi e del tempo presente, stanno a dimostrare che se le provvisioni e gli uomini non soccorrono, lo Stato, e più quando sia retto con ordinamenti democratici, manca di ogni attitudine a farsi gestore di imprese industriali.

Nessun dubbio quindi intorno la opportunità dei provvedimenti ordinati nel decreto luogotenenziale: le considerazioni economiche brevemente esposte ne dànno ampia dimostrazione. Ma tale giustificazione abbisogna di altra giustificazione a sua volta: che è tutta giuridica nella sostanza sua: e consta di un concetto, non espressamente detto, è vero, ma ch'è il necessario informatore degli ordinamenti dati. Concetto che legalmente determina, misura la “ proprietà del sottosuolo „.

Perchè è ben facile domandarsi come e a ragion di quale poter giuridico suo lo Stato disponga della ricerca, della concessione di esercizio di miniere di combustibili fossili, consentendo al proprietario del suolo la sola facoltà di domandare la precedenza nel caso sia tale concessione chiesta da più, e senza mantenergli (salvo un'eccezione alla quale si accennerà in seguito) partecipazione veruna per titolo di corrispettivo di una qualche ragion reale sua; e la risposta alla domanda non può essere altra da questa, che una diversa maniera di comporre la " *proprietà del sottosuolo* ", o meglio di scomporre la " *proprietà del suolo* ", com'è stata fin qui intesa, accenna a penetrare negli ordinamenti legislativi. Il quale movimento, a ben coordinarlo con l'altro sollecitato da una recente provvisione in materia di acque, segnala l'avviarsi del concetto di " demanialità " verso idee non nuove, ma verso applicazioni nuove dell'idea fondamentale ch'è ragion dell'istituto: il dominio a favor della universalità di cose che per la destinazione sociale loro non possono sopportare l'esclusiva signoria del singolo: l'utile generale, la generale economia ne patirebbero altrimenti danno e turbamento nocevolissimi.

Sul quale concetto verrebbe voglia di toccar qui, sia pur brevemente, delle dispute insorte tempo è, e non del tutto finite, intorno alla condizione dello Stato rispetto ai beni avvolti dal carattere di " demanialità "; ne sarà egli il titolare? e la universalità dei singoli avrà su di essi come una ragion di servitù? o ne sarà titolare la stessa universalità, rappresentata peraltro dallo Stato, o anche dalla Provincia o dal Comune se la demanialità sia provinciale o comunale? Attardarsi a dire qui di una costruzione che ha rilevanza quasi puramente teorica, non è il caso: ma lo sviluppo e l'estensione che al concetto della " demanialità " vengono dallo sviluppo nuovo e dal nuovo estendersi della *universalità dei consociati*, dai bisogni nuovi e quindi dalle necessità nuove che a tale sviluppo dell'ente si riferiscono, mostrano come in effetto l'asserire l'*universalità* quale soggetto titolare del suo " dominio ", sia concezione giuridicamente più giustificabile, più legittima d'ogni altra.

Ma lasciamo da parte ogni disquisizione teorica su questo argomento: e teniam soltanto il concetto della *demanialità* come fra i più saldamente acquistati al diritto dalla coscienza e dalla

tradizione giuridica. Or se il concetto è vecchio, ed è già meravigliosamente posto negli ordinamenti giuridici romani, e non importa se abbia nel suo cammino ricevuti turbamenti non lievi dall'identificarsi della persona del principe nella persona dell'universalità statale, nell'esplicazione mutò: e i mutamenti si riferiscono ai vari periodi della vita della consociazione: così, che di fronte ai bisogni dell'universalità, beni prima tenuti per appropriabili dai singoli, essendone l'utilità abbandonata al criterio loro, ben si può in seguito restituirli alla destinazione data dalla natural composizione che li distingue, e metterli fuor di commercio. Perchè, badisi, altro è dire che la demanialità deve comprendere ogni qualità di beni, quante volte a giudizio dello Stato sia necessario includerveli: questo non è puro e giusto adattamento del concetto di " demanialità ", è estenderlo obbiettivamente: e il processo che rendesse così demaniali beni di proprietà privata, sarebbe, se fatto senza corrispettivo, mala spogliazione. Ma quando beni che per la natural composizione oro, per la destinazione che in tal natura è, dovrebbero spettare all'universalità, e pur son lasciati più che all'uso alla signoria di singoli, fossero, per nuova e giusta valutazione dei bisogni generali, richiamati dalla legge alla loro natural funzione, non s'avrebbe veramente nè spogliazione, nè espropriazione: la legge pensa a pôr termine ad uno stato non rispondente alla natura stessa delle cose: sebbene l'equità imponga un giusto modo di conciliare la nuova ragion pubblica con l'interesse privato che dinanzi a quella si piega.

Or in riguardo al " sottosuolo " questo avvenne: che ne fu attribuita la proprietà piena al proprietario del suolo, e il diritto comune lo fece e lo disse nella maniera più iperbolica. Vero (e il concetto della demanialità è in sostanza la ragion dell'istituzione) che i giacimenti di metalli n'erano esclusi, e la ricerca e la concessione delle miniere venne ritenuta quale appartenenza della sovranità, quale funzione di Stato, a ragion dell'utile generale ch'è nella natura e nella destinazione economica della cosa; vero che più tardi la dottrina stessa, meglio fissando i termini della ragion di proprietà del suolo, e componendola in connessione all' " interesse " che di ogni diritto è fondamento primo, limitò la signoria comprendente il sottosuolo ristringendola a ciò ch'è necessario alla destinazione della su-

perficie secondo la coltura attuale o come può esser fatta giusta la natura sua, e che il concetto venne pur applicato a proposito del soprasuolo esteso prima *ad sidera*; vero tutto ciò: ma vero pure che per alcune miniere le leggi speciali (e in Italia pur troppo si hanno della materia tanti ordinamenti quanti erano i vecchi Stati) attribuiscono al proprietario del suolo, oltre all'indennità pei danni dati a lui in tal qualità, una partecipazione sul valor dei prodotti ricavati dal sottosuolo, quasi a riconoscimento di un suo diritto su di esso.

L'ordinamento attuale sui combustibili fossili mutò strada, o accenna a mutar strada col diritto che riconosce allo Stato: e bene: e i concetti sulla " demanialità " e le dottrine ricevute sulla misura per cui la proprietà del suolo si può estendere al sottosuolo, giustificano appieno l'atteggiamento nuovo. Il quale consente l'augurio che l'opera legislativa si svolga in coerenza intera alle applicazioni nuove dell'idea tradizionale e costante di " demanialità ", ch'è modo di porre in giusta armonia l'utilità pubblica e la privata. Cosa può infatti, e cosa deve comprendere la proprietà del suolo in rispetto al sottosuolo? La risoluzione giuridica ha per sua base la risoluzione economica: perchè il diritto nella sostanza sua patrimoniale è valutazione e misura di un fatto, di un rapporto economico d'interesse. La signoria del suolo intesa così nella comprensione sua, si estende al sottosuolo in quella parte che n'è naturale e necessario compimento: o fondamento, se così vogliam dire: ma questa relazione dev'essere certa, e nella entità sua si può determinarla considerando la destinazione che attualmente o che in seguito, secondo la natura sua, il suolo possa avere.

E accolto questo concetto, ch'è tratto dalla sostanza stessa del " diritto ", è agevole l'inferirne che ogni cosa sia contenuta nel sottosuolo e disforme per natura sua da ogni necessaria relazione col suolo, non cade nella proprietà riferentesi a questo: come non vi cade la cosa che, pur essendo in tale relazione, la eccede, non potendosi per sè ristringere alla utilità del suolo in ragion della destinazione che gli è data o gli può essere data. Ond'è, che si potrebbe discutere sull'ordinamento intorno la proprietà del tesoro sotterrato nel suolo: ordinamento tradizionale, in più maniere giustificato. e nessuna resistente alle obbiezioni critiche: apparentemente più idonea fra tutte, questa della pro-

babilità che appartenesse ad un antico proprietario del suolo, il quale ve l'avesse nascosto; ed essendo stato così unito al terreno, pur nello smarrimento di ogni certa memoria della proprietà, il terreno lo ha conservato, lo ha come serrato in sè, in modo che la signoria del suolo lo comprende nell'azione giuridica sua. Ragionamento fallace: e per quanti altri ragionamenti si facciano, il concetto sul quale riposa l'attribuzione del tesoro com'è fatto dalla legge, è questo del diritto del proprietario del suolo a ciò che sotto il suolo è, e ch'è intero se lo scopritore è lui, e meno pieno se altri ne sia stato l'inventore.

Accogliamo pure, e come non farlo?, il criterio di ragion morale e giuridica che un premio sia dovuto allo scopritore, alla cui azione si deve il ricupero di un valore non conosciuto prima, e sottratto all'attività umana; e se la natura e la destinazione dell'oggetto ritrovato lo consente, dia pur la legge in premio una parte di esso. Ma del diritto del proprietario del suolo, soltanto per tale stato giuridico suo, molto è a dire, molto a dubitare: e il dubbio è opposizione netta, quando il ragionamento mova da ciò ch'è veramente la condizione giuridica del sottosuolo in rispetto alla proprietà del suolo. Perchè, secondo quanto s'è detto, chi è titolare di questa signoria, ha poter di estenderla in profondità ed in altezza a quanto *necessariamente* si connette alla possibilità di utile del terreno, secondo la natura sua attuale o futura consente: vi è dunque fra il terreno e quanto è giù o sopra una relazione necessaria di convenienza, che dà la misura di siffatta estensione: con parola tecnicamente non propria, ma assai figurativa, si potrebbe dire che il rapporto è come di accessione.

E quanto ne è fuori, non entra perciò nel poter di dominio del proprietario del suolo: è fuori dello *ius soli*: sebbene il proprietario abbia diritto di vietare che altri nel suo terreno s'introduca facendovi atti che ne ledano la signoria, e abbia in conseguenza ragion di risarcimento pei danni reali infertigli. E si dica pure che, se non per lo *ius soli*, per via dell'occupazione ha il proprietario del suolo diritto a cosa che il sottosuolo rinserra. Ma questi modi di poter giuridico non gli possono spettare in riguardo a quelle cose che per la natura loro contengono in sè tale utilità, e tale possibilità di utile che si riferisce ed estende alla collettività: *utilità* detta qui nel signi-

ficato più largo che la voce può avere, e che perciò comprende pur la *necessità* generale, comune. Cosicchè, se quanto nel sottosuolo è non è col suolo nella relazione descritta, così da doversi dire che all'utile della superficie sia esso necessario, certo la proprietà del suolo non può comprenderlo; e quando essa abbia entità tale, o per la natura sua stessa o pel modo col quale è considerata pei bisogni pur non materiali della collettività, da doversi riferire all'utile di quest'ultima, la collettività, e per essa gli organi che la esprimono, vi ha manifesto e intero diritto. Perciò ben s'intende la demanialità delle acque, quando queste abbiano tale natura ed economica entità da doversi dire di generale utilità; e bene gli ultimi provvedimenti legislativi (D. L. 20 nov. 1916) questo hanno dichiarato; non egualmente bene s'intende il diritto del proprietario su quei materiali interessanti al sommo la coltura scientifica e artistica del paese, che al sottosuolo il tempo o gli uomini abbiano affidato; nessuna ragione giustifica tale attribuzione, o può limitare il diritto della collettività a farne ricerca, e apprenderli. Ma egualmente bene queste provvisioni sulla ricerca e concessione di miniere di combustibili fossili, hanno asserito le ragioni superiori della collettività sui depositi di stromenti così necessari all'economia generale, giacenti nel sottosuolo: la destinazione naturale ne fa beni di utile pubblico.

Certo, se il proprietario del suolo dai lavori inerenti alla ricerca od alla concessione patisse ingiusto danno, dev'essere risarcito: è il suo diritto vero che qui sarebbe leso. Certo è pure, che in considerazione sia dell'evitar tali danni, sia pel fatto ch'egli è titolare del suolo, la legge può anche avergli, nel darne la *concessione*, uno speciale riguardo: e questo provvedimento sui combustibili fossili, lo fa. Certo è ancora, come dianzi s'è accennato, che, quando per concessione avuta o per altra ragion di acquisto possibile secondo le leggi, il titolare del suolo abbia già dedotto nella speciale utilità sua, cosa che per la propria natura vien richiamata alla destinazione che ha in sè del comune uso, e vien resa demaniale sotto il governo degli enti per cui la collettività manifesta l'esser suo, un compenso è giusto sia dato: e i provvedimenti ricordati sulla derivazione delle acque, così fanno nel disciplinare la concessione dell'uso di questa nazional ricchezza. Ma ciò nulla toglie alla

verità del principio che la dottrina e la storia della legge ampiamente suffragano: e che apparisce sostanzialmente negli ordinamenti di cui s'è dato notizia.

Provvedimenti ben giustificati. E perciò è da augurarsi che il principio al quale sono informate le speciali risoluzioni, sia posto e dichiarato nella maggior generalità sua; e che, come s'è fatto ora, ugualmente si operi pel demanio scientifico e artistico o di coltura, in riguardo dei materiali così preziosi agli studi di archeologia e di paleontologia. Ma anche è da augurarsi, pei beni ch'entrano nel provvedimento sui combustibili fossili, che la legge non lasci sussistere traccia della diversità fra la nuova formazione giuridica del sottosuolo e gli ordinamenti antichi: diversità che il provvedimento mantiene. Non è idea giusta, nè in modo veruno giustificabile; com'è pur giusto l'invocare che una legge sola sulle miniere, informata nell'interezza sua alle nuove e corrette concezioni giuridiche, governi il paese, sostituendosi ai molti ordinamenti regionali che male ancor sussistono.

G. P. Chironi.

Gli Accademici Segretari

Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Parona Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Guareschi una Nota del Dr. S. Dezani, *Su una reazione sensibilissima dei nitrili.*

Il Socio Peano due Note: una del Prof. C. Burali-Forti, *Equivalenti omografiche delle Formole di Frenet — Linee e superficie parallele*, e l'altra della D.ª Rosetta Frisone, *Una teoria semplice dei logaritmi.*

LETTURE

Su una reazione sensibilissima dei nitrili.

Nota di S. DEZANI.

Per la prosecuzione delle ricerche che io da tempo vado compiendo sulla genesi dell'acido solfocianico negli animali (1), io fui costretto a ricercare una reazione generale e sensibile per i nitrili, sia per studiare e risolvere definitivamente la questione del destino di questi corpi introdotti ad arte nell'organismo animale, sia per ricercare più tardi se nitrili — capaci di dare acido solfocianico nell'organismo — si formino nel metabolismo cellulare.

Di reazioni generali dei nitrili se ne conoscono parecchie: trasformazione nelle amidi corrispondenti, saponificazione negli acidi corrispondenti ed in ammoniaca, riduzione nelle corrispondenti amine, ecc.; ma certo nessuna di queste reazioni può prestarsi alla ricerca di pochi milligrammi o frazioni di milligramma di questi corpi quando la ricerca debba portarsi su liquidi organici (sangue, urina, ecc.) in cui sono sempre presenti sia gli acidi corrispondenti ai nitrili più studiati dal lato fisiologico (aceto-propio-benzonitrile, ecc.) che l'altro prodotto della loro trasformazione: l'ammoniaca.

In una reazione generale dei composti nitrilici indicata da I. Guareschi io ho trovato però quanto cercavo. La reazione consiste nel distacco da questi composti del gruppo — CN, con conseguente formazione di acido cianidrico, per azione degli ossidanti (2).

(1) " Archivio di Farmacol. sperim. ", vol. XXIII, Note I e II.

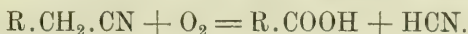
(2) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", XXVII, 1892 e *passim* fino al 1907.

Le cianacetilamine ad es. col permanganato potassico si ossidano secondo l'equazione:

$$R.NH.CO.CH_2.CN + O_2 = HCN + R.NH.CO.COOH,$$

accanto ad acido cianidrico si formano così degli acidi ossamici sostituiti.

I nitrili invece si ossidano formando accanto ad acido cianidrico gli acidi omologhi inferiori dei nitrili adoperati secondo l'equazione (1):

$$R.CH_2.CN + O_2 = R.COOH + HCN.$$

Alcune cianacetilamine vengono pure scomposte nell'organismo con formazione di acido cianidrico (2).

Poichè per l'acido cianidrico noi possediamo reattivi molto sensibili, atti a svelare la sua presenza anche in quantità piccolissime, io ho fatto ricorso a questa reazione indicata dal Guareschi come a quella adatta a permettermi di raggiungere il mio scopo.

Però il permanganato potassico — ed altri ossidanti da me provati (acido nitrico, acido cromico) per questa reazione — non mi diedero buoni risultati quando si trattò di operare su piccolissime quantità di nitrili, poichè la comparsa dell'acido cianidrico non poteva allora venire svelata. Ottimi risultati invece io ottenni dall'impiego del *perossido di idrogeno in presenza di un sale ferrico ed in soluzione leggermente acida.*

Per quanto è a mia conoscenza, l'azione dell'acqua ossigenata sui nitrili non è stata finora oggetto che di pochi studi.

Il Radziszewski (3) nel 1885 studiò l'azione dell'acqua ossigenata in soluzione alcalina sul benzonitrile: osservò come questo composto andasse lentamente trasformandosi in una massa cristallina che egli riconobbe costituita da benzamide. Il Giacosa (4) aveva già del resto osservato un fatto analogo abban-

---

(1) Guareschi, " Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ", 1895, pag. 666, ed " Enciclopedia chimica ", vol. VI.

(2) Benedicenti, *Sul comportamento delle cianacetilamine nell'organismo*, Camerino, 1903.

(3) *Ber. d. d. Chem. Ges.*, 18, pag. 355.

(4) " Rivista di chimica medica e farmaceutica ", fasc. I e II, 1884.

donando semplicemente il benzonitrile in presenza di una soluzione diluita di idrato sodico alla temperatura di +40° durante parecchie ore, o più semplicemente per azione dell'ossidulo di rame e dell'ossigeno atmosferico sul benzonitrile stesso alla temperatura del laboratorio.

Il perossido di idrogeno invece in soluzione debolmente acida ed in presenza di un sale ferrico ossida il benzonitrile, come gli altri nitrili grassi od aromatici, con contemporanea formazione di acido cianidrico.

Ecco come io opero.

Alla soluzione di un nitrile (1-5 cm^3 in tubo da saggio) si aggiunga l'ugual volume di acqua ossigenata (12 vol. $^0/_0$ di ossigeno) e II-III goccie di soluzione 5 $^0/_0$ di cloruro o solfato ferrico (l'acidità dell'acqua ossigenata del commercio è sufficiente per creare condizioni favorevoli all'avvenire della reazione). Se si chiude il tubo con tappo di sughero o di gomma attraversato da un piccolo foro per dare sfogo al vapore acqueo ed ai gas che si sviluppano nella reazione, si sospende al tappo una cartina picro-sodata preparata secondo Guignard (1) e si scalda all'ebollizione, si osserverà quasi istantaneamente o tutt'alpiù nello spazio di 2-3 minuti, a seconda della quantità di nitrile presente, la formazione di acido cianidrico. Questo potrà essere riconosciuto già all'odore ed alla sua trasformazione in bleu di Prussia se il nitrile presente è in discreta quantità, o sarà solamente svelato dalla colorazione rosea, rossa o rosso-bruna assunta dalla cartina se la quantità di nitrile che si trova nella soluzione è assai piccola.

La reazione si osserva sia operando con nitrili della serie grassa che con nitrili della serie aromatica.

Se si guidano i gas della reazione nell'acqua di calce o di barite si può notare in essa un intorbidamento più o meno forte, dovuto al comparire di minuscoli granuli microscopici che si sciolgono con effervescenza negli acidi, dimostrandosi costituiti da $CaCO_3$ o da $BaCO_3$.

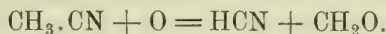
---

(1) *C. R.*, 142, pag. 545. La cartina si prepara bagnando delle striscie di carta da filtro in una soluzione di acido picrico all'1 $^0/_0$, e, dopo essiccamento, immergendola in una soluzione di carbonato sodico al 10 $^0/_0$.

L'azione dell'acqua ossigenata sui nitrili può venire spiegata supponendo in un primo tempo un distacco di acido cianidrico con formazione dell'aldeide omologa inferiore del nitrile adoperato, aldeide che in un secondo tempo verrebbe ulteriormente ossidata in anidride carbonica ed acqua.

Così la scomposizione dell'acetonitrile potrebbe essere rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$CH_3.CN + O = HCN + CH_2O.$$

$$CH_2O + O_2 = CO_2 + H_2O.$$

La reazione dei nitrili con l'acqua ossigenata nelle condizioni descritte è squisitamente sensibile. Io ho preparate soluzioni di acetonitrile, di propionitrile, ecc. equivalenti ad un contenuto dell'1 % di HCN, ed ho saggiate varie soluzioni più diluite ottenute dalle soluzioni precedenti; io ho ottenuto ancora netta colorazione rosea della cartina picro-sodata operando su 1 cm^3 di una soluzione all'1 : 50000 di nitrile (espresso in HCN), vale a dire che con la reazione si possono svelare gr. 0,00002 di nitrile (sempre espresso in funzione dell'HCN che esso può teoricamente fornire). Per diluizioni maggiori la reazione talora è ancora positiva, talora manca: tuttavia se si opera, invece che su 1 cm^3, su 2 cm^3 della soluzione da saggiare essa si manifesta nuovamente: la reazione è ad es. ancora sicura su 2 cm^3 di una soluzione all'1 : 100000 di nitrile, contenenti cioè gr. 0,00002 di nitrile espresso in HCN.

Qui farò osservare che la cartina anche in assenza di acido cianidrico, e per ragioni che non ho saputo spiegarmi, assume talora un colore brunastro che può sino ad un certo punto simulare quello provocato su essa dall'acido prussico: ma se si lasciano qualche ora le prove in riposo, mentre la colorazione vera data dall'HCN tende ancora ad intensificarsi od almeno non s'indebolisce, la colorazione brunastra sospetta scompare facilmente, e lo scambio fra le due tonalità di colore non è possibile ad occhio un po' esercitato.

La trasformazione del nitrile in acido cianidrico è quantitativa? Io non posso per ora rispondere a questa domanda con sicurezza (presentando anche la cosa per i miei studi un'importanza secondaria). Io ho tentato di dosare l'HCN formatosi nella

reazione: per questo operavo la trasformazione su una quantità nota di nitrile in apparecchio a ricadere per evitare il disperdimento dell'HCN e del nitrile stesso: ma ho sempre dovuto constatare una rapida scomparsa dell'acido cianidrico prodottosi, sia che esso venga alla sua volta direttamente ossidato dall'acqua ossigenata, sia che esso venga anzitutto saponificato dall'acido solforico presente nella soluzione del perossido di idrogeno, per poi venire ulteriormente bruciato.

Io credo tuttavia di non essere lontano dal vero ritenendo che la suddetta trasformazione avvenga quantitativamente. Il Guignard ha dimostrato che la sensibilità della cartina picro-sodata per l'acido cianidrico è limitata ad una quantità di quest'acido pari a gr. 0,00002: ora quando la reazione da me indicata venga praticata su una quantità di nitrile capace di fornire teoricamente gr. 0,00002 di acido cianidrico, essa potrà solo riuscire positiva nel caso in cui la trasformazione del nitrile sia quantitativa: se questo non fosse, non colorandosi la cartina picro-sodata per quantità di acido prussico minori di quelle indicate, la reazione dovrebbe mancare. In realtà, come ho dimostrato, la reazione in questo caso è positiva; i limiti di sensibilità della cartina picro-sodata per l'acido cianidrico coincidono, sia che il composto preesista già in soluzione, sia che esso si formi dal nitrile: la trasformazione di quest'ultimo deve quindi avvenire in senso quantitativo.

***

Stabilita così la tecnica e la sensibilità della reazione, io sono passato a studiare la sua applicabilità alla ricerca di nitrili introdotti ad arte nei liquidi dell'organismo e specialmente nell'urina.

Naturalmente occorreva prima saggiare questi liquidi per vedere se già di per sè contenessero elementi capaci di dare questa reazione. Io ho prima saggiate isolatamente molte delle sostanze che normalmente od in condizioni patologiche entrano a costituire questi liquidi. Tra le sostanze azotate saggiate, mi hanno fornita questa reazione la *glicocolla*, l'*acido aspartico*, la *leucina*, l'*istidina*, la *lisina*, la *arginina*, la *tirosina*, l'*acido ip-*

purico, il *peptone* (Witte); non mi hanno data la reazione la *creatina*, l'*urea*, l'*acido urico*, le *proteine del sangue*, l'*albumina d'uovo*.

Ma pure in quei casi in cui la reazione è positiva essa non si manifesta che operando su gr. 0,05-0,10 di sostanza: ed anche allora essa è sempre assai debole: il che ci testifica come l'acido cianidrico che si forma in queste condizioni non rappresenta che una piccola frazione dei prodotti della reazione. Il fatto era già stato del resto osservato dall'Aders Plimmer (1) il quale ossidando ad es. le sostanze proteiche, il peptone Witte, la leucina, ecc. con acido solforico + acido nitrico aveva da essi solo ottenuto quantità di acido cianidrico pari al 0,5 %-1 % della sostanza impiegata.

Per cui, dato che le sostanze su ricordate capaci di dare acido cianidrico non compaiono che eccezionalmente nell'urina in quantità tali da poter essere eventualmente prese in considerazione, si poteva già prevedere che se la reazione si fosse dimostrata positiva in questo liquido, la sostanza o le sostanze cianogeniche dovevano essere ricercate altrove che tra i composti su ricordati.

Ora esiste in realtà un corpo nella maggior parte delle urine per cui esse saggiate direttamente dànno netta reazione con l'acqua ossigenata: l'*acido solfocianico*, composto questo il quale fornisce per ossidazione acido cianidrico in modo altrettanto squisito che i nitrili.

L'urina umana ed il siero di sangue umano mi hanno costantemente fornita in misura più o meno forte la reazione sulla cartina *picro-sodata*: le urine dei cani ora reagirono positivamente, ora negativamente. La reazione sull'urina va praticata addizionando tanto sale ferrico che, dopo aver precipitati i fosfati, di esso rimanga un piccolo eccesso in soluzione.

Io ho provato ad eliminare l'acido solfocianico dalle urine mediante precipitazione con nitrato d'argento, ma senza risultato: operando sull'urina tale e quale, non acidificata cioè con acido nitrico (l'introduzione di questo composto è da evitarsi ai fini della reazione), la precipitazione dell'acido solfocianico non

---

(1) Aders Plimmer, *Jahresb. f. Tierchem.*, 34, 17.

appare completa dacchè il filtrato continua a reagire con l'acqua ossigenata.

Io ho tentato allora di eliminare dall'urina l'acido solfocianico — od eventualmente le altre sostanze capaci di dare acido cianidrico — mediante distillazione. Questa operazione non conduce però allo scopo, se si opera sull'urina normalmente acida, perchè una parte dei solfocianati viene per reazione coi fosfati acidi decomposta, e nel distillato si ritrovano allora piccole quantità sia di quest'acido che del suo prodotto di decomposizione, l'acido cianidrico. Ma se si ha cura di alcalinizzare con idrato sodico dil. l'urina fino ad aversi *leggera colorazione rosea* colla fenolftaleina, allora si ottiene un distillato, a reazione debolmente alcalina per ammoniaca, il quale non reagisce più affatto con il perossido di idrogeno.

Io raccoglievo le prime 25 p. $^0/_0$ di distillato e saggiavo questo distillato (5 cm^3) o tale e quale, o diluito al volume primitivo dell'urina, sia da solo (assenza di HCN), sia con acqua ossigenata (assenza di composti capaci di dare HCN), naturalmente dopo acidulazione del distillato con acido solforico in modo che il liquido si conservasse limpido anche all'ebollizione.

Poichè dopo somministrazione di nitrili agli animali compare riccamente acido solfocianico nell'urina, così io ho voluto ancora controllare se, aggiungendo all'urina normale acido solfocianico, potessero allora ritrovarsi piccole quantità di questo composto nel distillato anche dopo leggera alcalinizzazione dell'urina: i risultati però furono negativi.

Se ora all'urina si addizionano anche solo piccole quantità di un nitrile, e si distilla, si nota allora nel distillato — sia il nitrile già volatile di per sè a + 100°, venga esso trascinato dal vapore acqueo — la presenza di un corpo che reagisce facilmente con l'acqua ossigenata colorando in rosso più o meno intenso la cartina picrosodata.

Io riporto qui i dati di una sola delle numerose esperienze da me fatte con acetonitrile, con propionitrile, con butironitrile e con benzonitrile.

La quantità del nitrile aggiunto è al solito espressa in funzione dell' HCN che esso può dare:

a) = risultato della reaz. pratic. su 5 cm^3 di distillato tale e quale (25 % dell'urina).
b) = " " " " " riportato al volume primitivo dell'urina.

Urina normale	*a)*	reazione	negativa
	b)	"	negativa
Urina contenente l'1:1000 di acetonitrile	*a)*	"	intensa
	b)	"	intensa
" " l'1:10000 " "	*a)*	"	intensa
	b)	"	intensa
" " l'1:20000 " "	*a)*	"	intensa
	b)	"	netta
" " l'1:25000 " "	*a)*	"	netta
	b)	"	debole
" " l'1:30000 " "	*a)*	"	netta
	b)	"	dubbia
" " l'1:40000 " "	*a)*	"	netta
	b)	"	negativa
" " l'1:50000 " "	*a)*	"	debole
	b)	"	negativa
" " l'1:100000 " "	*a)*	"	dubbia
	b)	"	negativa

Da queste esperienze si può dedurre che la reazione dell'acqua ossigenata sui nitrili fornita dal distillato dell'urina contenente un nitrile è meno sensibile della stessa reazione praticata direttamente sul nitrile in soluzione semplicemente acquosa. Non saprei indicare le cause di questo fatto: è probabile però che una parte del nitrile venga saponificata durante la distillazione dal leggero eccesso di idrossilioni esistenti nell'urina alcalinizzata alla fenolftaleina.

In complesso mediante la reazione da me indicata si possono svelare sicuramente traccie di nitrili nell'urina (fino a gr. 0,0002 in 5 cm^3 del distillato di questo liquido), sia che questi nitrili siano stati introdotti direttamente nell'urina, sia che essi siano stati introdotti per via orale o per iniezione nell'organismo animale: poichè, come dimostrerò in altra mia prossima nota, l'animale elimina in parte inalterati per l'urina i nitrili che esso ha ricevuto

Laboratorio di Materia medica e Jatrochimica dell'Università.
Torino, febbraio 1917.

Equivalenti omografiche delle formule di Frenet. Linee e superficie parallèle.

Nota di C. BURALI-FORTI.

Stabilite le equivalenti omografiche, non ancora note, delle formule di Frenet, le applico alle superficie canali che ottengo come luogo delle linee parallele ai loro assi. Stabilisco pure alcune formule fondamentali necessarie per lo studio, senza coordinate, delle superfici parallele. Le formule di Frenet sotto forma omografica sono suscettibili di notevoli applicazioni (*).

Equivalenti omografiche delle formule di Frenet.

1. Per la linea descritta dal punto P siano s, ρ, τ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ i soliti elementi [cfr. *b)*, *c)*] per i quali valgono le note formule vettoriali

$$(1)\qquad \frac{dP}{ds}=\boldsymbol{t},\quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b},$$

delle quali le ultime *tre* dànno, sotto forma geometrica assoluta, le ordinarie *nove* formule con i *nove* coseni direttori rispetto all'inutile sistema cartesiano di riferimento.

Spesso occorre fare uso delle derivate degli elementi ora considerati, non rispetto all'arco s della linea, ma rispetto allo

---

(*) Citerò i lavori seguenti. C. Burali-Forti e R. Marcolongo: *a) Analyse vectorielle générale*, vol. I (Mattei, Pavia, 1912); *b) Éléments de calcul vectoriel* (A. Hermann, Paris, 1910); C. Burali-Forti: *c) Corso di Geometria Analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912); *d) Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie* (" Rend. Palermo ", tomo XXXIII).

stesso punto P [cfr. *a)*] del quale sono funzioni dirette. Si hanno le formule

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dP} = \boldsymbol{t} \times \\ \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dP} = \dfrac{1}{\rho} \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{H}\left(\boldsymbol{t}, \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right), \quad \dfrac{d\boldsymbol{b}}{dP} = \dfrac{1}{\tau} \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{H}\left(\boldsymbol{t}, \dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right), \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{dP} = -\dfrac{1}{\rho} \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) - \dfrac{1}{\tau} \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{H}\left(\boldsymbol{t}, \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right). \end{cases}$$

Queste formule si dimostrano facilmente. — Dalla prima delle (1) si ha $dP = \boldsymbol{t} ds$ e quindi $\boldsymbol{t} \times dP = ds$; allora si ha subito la prima delle (2) ed inoltre

$$d\boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{n} ds = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{n} \, . \, \boldsymbol{t} \times dP = \frac{1}{\rho} \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})\, dP$$

che dimostra la seconda delle (2); e in modo analogo per le altre.

2. Alle ultime tre delle (2) può darsi un'altra forma introducendo il vettore

$$(3)\qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{b} - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{t}$$

parallelo alla generatrice della *rettificante* della linea P che passa per P. Mediante tale vettore $\boldsymbol{u}$ le (1) divengono

$$(4)\qquad \frac{dP}{ds} = \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{b}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}$$

e in conseguenza [cfr. *a)*] le ultime tre delle (2) assumono le forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dP} = \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{dP} = \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}) \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{dP} = \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}). \end{cases}$$

Dalle formule precedenti se ne ottengono molte altre, tra le quali segnaliamo queste:

$$\text{grad}\, s = \boldsymbol{t}$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{b}, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{n} = \frac{1}{\tau} \boldsymbol{n}, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{b} = \frac{1}{\tau} \boldsymbol{b}$$

$$\text{div}\, \boldsymbol{t} = 0, \quad \text{div}\, \boldsymbol{n} = -\frac{1}{\rho}, \quad \text{div}\, \boldsymbol{b} = 0$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{t}, \quad \text{rot}\, \boldsymbol{b} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{u}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = \text{H}\left(\text{grad} \frac{1}{\rho}, \boldsymbol{b}\right) - \text{H}\left(\text{grad} \frac{1}{\tau}, \boldsymbol{t}\right)$$

$$\text{grad} \frac{1}{\rho} = \left(\text{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) \boldsymbol{b}, \quad \text{grad} \frac{1}{\tau} = -\left(\text{K} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) \boldsymbol{t}.$$

Linee parallele.

3. Il punto P descriva una linea. Il punto Q descrive una *linea parallela* alla linea P quando le due linee hanno nei punti corrispondenti P, Q, il piano normale a comune e le tangenti parallele. Dunque, affinchè il punto Q descriva una linea parallela a quella descritta dal punto P è necessario e basta che

$$(6) \qquad Q = P + x\boldsymbol{n} + y\boldsymbol{b}, \quad \text{con} \quad Q' \wedge \boldsymbol{t} = 0,$$

indicandosi con gli apici le derivate rispetto ad s. Osservando che

$$(a) \qquad Q' = \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) \boldsymbol{t} + \left(x' + \frac{y}{\tau}\right) \boldsymbol{n} + \left(y' - \frac{x}{\tau}\right) \boldsymbol{b}$$

si soddisfa alla seconda condizione (6) ponendo $y = -\tau x'$, $x = \tau y'$, dalle quali condizioni eliminando τ si ha $xx' + yy' = 0$, cioè $x^2 + y^2 = \text{cost.}$, la quale prova che la distanza di P da Q deve essere costante. Detta r questa distanza costante, arbitraria, e posto $x = r \cos\theta$, $y = r\, \text{sen}\, \theta$, da $y = -\tau x'$ si ricava $\theta'\tau = 1$ e quindi per la espressione generale del punto Q si ha

$$(7) \qquad Q = P + r \{ \cos(\varphi + u)\, \boldsymbol{n} + \text{sen}\,(\varphi + u)\, \boldsymbol{b} \}$$

$$\text{con } \varphi = \int_0 ds/\tau \text{ e } r, u \text{ costanti.}$$

4. Se per brevità di scrittura poniamo

$$\lambda = 1 - r\cos(\varphi + u)/\rho, \tag{8}$$

osserviamo che nella (a) i coefficienti di $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ sono nulli e che $x = r\cos(\varphi + u)$ si ha subito

$$Q' = \lambda \boldsymbol{t}. \tag{9}$$

Da questa, derivando due volte rispetto ad s, si ha

$$Q'' = \lambda' \boldsymbol{t} + \frac{\lambda}{\rho}\boldsymbol{n}, \quad Q''' = \lambda'' \boldsymbol{t} + \frac{\lambda'}{\rho}\boldsymbol{n} + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)' \boldsymbol{n} - \frac{\lambda}{\rho^2}\boldsymbol{t} - \frac{\lambda}{\rho\tau}\boldsymbol{b}$$

$$Q' \wedge Q'' = \frac{\lambda^2}{\rho}\boldsymbol{b}, \quad Q' \wedge Q'' \times Q''' = -\frac{\lambda^3}{\rho\tau},$$

e quindi, indicando con s_1, ρ_1, τ_1, $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ i soliti elementi della linea Q si ha [cfr. $b)$, $c)$]

$$\left\{ \begin{array}{lll} ds_1 = (\operatorname{mod}\lambda)\, ds, & \rho_1 = (\operatorname{mod}\lambda)\,\rho, & \tau_1 = \lambda\tau \\ \boldsymbol{t}_1 = (\lambda/\operatorname{mod}\lambda)\,\boldsymbol{t}, & \boldsymbol{n}_1 = (\lambda/\operatorname{mod}\lambda)\,\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} \end{array} \right. \tag{10}$$

che esprimono notevoli proprietà di posizione delle linee parallele. Ad es., risulta che le linee parallele di un'*elica* relativa ad una direzione $\boldsymbol{k}$ [cfr. $c)$] è pure un'elica relativa alla stessa direzione.

5. La rigata descritta da PQ è sviluppabile perchè i piani tangenti nei punti distinti P, Q coincidono. Lo spigolo di regresso è descritto dal punto [cfr. $c)$]

$$R = P + x(Q - P) \quad \text{con} \quad R' \wedge (Q - P) = 0,$$

e poichè $R' = x'(Q - P) + (1 + \lambda x - x)\boldsymbol{t}$ ne segue che deve essere $x = 1/(1 - \lambda) = \rho/(r\cos(\varphi + u))$, cioè

$$R = P + \rho\boldsymbol{n} + \rho \operatorname{tg}(\varphi + u)\,\boldsymbol{b}, \tag{11}$$

vale a dire, le linee R sono tutte e sole (col variare di u) le *evolute* della linea P [cfr. $c)$] e quindi R è l'intersezione della retta PQ con la generatrice corrispondente della sviluppabile polare della linea P. Notevole il caso particolare P linea piana.

Superficie canale.

6. Dato ad r un valore fisso, il punto Q risulta funzione delle due variabili indipendenti s, u e descrive una superficie, che è luogo delle linee parallele a P alla distanza r; una *superficie canale* di asse la linea P. Posto

$$(12) \qquad \boldsymbol{N} = (Q - P)/r = \cos(\varphi + u)\,\boldsymbol{n} + \operatorname{sen}(\varphi + u)\,\boldsymbol{b}$$

si ha subito

$$(13) \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = r\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{N}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial s} = \lambda \boldsymbol{t},$$

e quindi $\boldsymbol{N}$ dà la direzione della normale in Q alla superficie descritta da Q funzione di s e di u.

Le linee $u =$ cost. sono le linee parallele alla linea P e alla distanza r; le linee $s =$ cost. sono circonferenze di centro P raggio r nei piani normali a P; per le (13) i due sistemi di linee si tagliano ortogonalmente, e poichè le rigate descritte da PQ, variando Q nell'una o nell'altra linea, sono sviluppabili [cfr. n. 5], ne segue che le linee $u =$ cost., $s =$ cost. sono le *linee di curvatura* della superficie descritta da Q, e che le *direzioni principali* in Q sono appunto date dai vettori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{N}$.

7. Il punto P è funzione di Q, non però viceversa, e si possono quindi considerare le derivate di P ed $\boldsymbol{N}$ rispetto a Q. Si ha

$$(14) \qquad \frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}), \qquad \sigma = \frac{d\boldsymbol{N}}{dQ} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})\right\}.$$

Infatti dalle (13) si ha

$$dQ = \lambda \boldsymbol{t}\,ds + r\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{N} du, \qquad dQ \times \boldsymbol{t} = \lambda\,ds,$$
$$dP = \boldsymbol{t}\,ds = \frac{1}{\lambda}\,dQ \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})\,dQ$$

che dimostra la prima; la seconda si ottiene derivando la (12) rispetto a Q ed applicando la prima.

Per la curvatura *media* ($I_1 \sigma$) e *totale* ($I_2 \sigma$) in Q [cfr. *d)*] si ha subito [cfr. *a)*]

$$(15) \qquad I_1 \sigma = \frac{2\lambda - 1}{r\lambda}, \qquad I_2 \sigma = \frac{\lambda - 1}{r^2 \lambda}.$$

Si ha $I_2 \sigma < 0$, punti iperbolici, solamente quando $\lambda^2 - \lambda < 0$, cioè solamente quando $0 < \lambda < 1$, del che dovremo tener conto in seguito per le assintotiche.

Possono formare oggetto di studio interessante e semplice le linee speciali della superficie canale lungo le quali la curvatura totale è nulla, $I_2 \sigma = 0$, cioè $\lambda = 1$, o le linee lungo le quali è nulla la curvatura media, $I_1 \sigma = 0$, cioè $\lambda = 1/2$.

Ci occuperemo in generale delle tre curvature in una direzione arbitraria. Ora dalle (15) possiamo ricavare subito le due *curvature normali principali*, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, per le quali è noto [cfr. *d)*] che

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 = I_1 \sigma, \qquad \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 = I_2 \sigma;$$

da queste si ricava subito

$$(16) \quad r_1 = \frac{1}{\mathfrak{N}_1} = \frac{r\lambda}{\lambda - 1} = r - \frac{\rho}{\cos(\varphi + u)}, \qquad r_2 = \frac{1}{\mathfrak{N}_2} = r.$$

La direzione principale corrispondente ad $\mathfrak{N}_1$ [cfr. *d)*, n. 27, (3)] è

$$\sigma \boldsymbol{t} - \mathfrak{N}_2 \boldsymbol{t} = \frac{1}{r}\left(\boldsymbol{t} - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{t}\right) - \frac{1}{r}\boldsymbol{t} = -\frac{1}{r\lambda}\boldsymbol{t},$$

cioè $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, sono, rispettivamente, le curvature normali nelle direzioni $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{t}$, cioè per le linee $u = \text{cost.}$, $s = \text{cost.}$; come è evidente per le $s = \text{cost.}$ che sono circonferenze di raggio r.

Le due falde della *evoluta* della superficie canale sono descritte dai punti

$$M_1 = Q - r_1 \boldsymbol{N} = P + \frac{\rho}{\cos(\varphi + u)} \boldsymbol{N}, \qquad M_2 = Q - r_2 \boldsymbol{N} = P;$$

come è ben noto, la falda M_2 si riduce alla linea P, mentre la falda M_1 è la *sviluppabile polare* di P perchè

$$M_2 - (P + \rho \boldsymbol{n}) = \frac{\rho}{\cos(\varphi + u)} \{ \boldsymbol{N} - \cos(\varphi + u) \boldsymbol{n} \} = \rho \operatorname{tg}(\varphi + u) \,.\, \boldsymbol{b}.$$

8. Si consideri il vettore unitario

$$x = \cos\theta \,.\, t + \operatorname{sen}\theta \,.\, N \wedge t \tag{17}$$

normale ad N. Applicando ad esso la σ, data dalla (14), si ha

$$\sigma x = \frac{1}{r} \left\{ x - \frac{\cos\theta}{\lambda} t \right\}. \tag{18}$$

Allora, per la *curvatura normale*, $\mathcal{N}_x$, e per la *torsione geodetica*, $\mathcal{T}_x$, nella direzione del vettore x si ha subito [cfr. *d)*, n. 18, (1)]

$$\mathcal{N}_x = (\sigma x) \times x = \frac{1}{r\lambda} (\lambda - \cos^2\theta). \tag{19}$$

$$\mathcal{T}_x = x \wedge (\sigma x) \times N = \frac{1}{r\lambda} \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \tag{20}$$

Nelle direzioni *principali* deve essere $\mathcal{T}_x = 0$ e la (20) dice appunto che le direzioni principali si hanno per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, cioè sono quelle di t ed $N \wedge t$. Per questi valori particolari di θ la (19) dà i valori (16).

Nelle direzioni *assintotiche* deve essere $\mathcal{N}_x = 0$, cioè per la (19), $\cos^2\theta = \lambda$ e [cfr. n. 7] si hanno appunto due direzioni assintotiche, $\cos\theta = \pm\sqrt{\lambda}$, per $I_2\sigma < 0$.

L'equazione differenziale delle assintotiche è [cfr. *d)*] $dQ \times \sigma dQ = 0$ che per la seconda delle (14) e la seguente espressione di $dQ \times t$ assume subito la forma

$$r du = \pm\sqrt{\lambda - \lambda^2}\, ds$$

reale quando $I_2\sigma < 0$.

9. Per le *curvature geodetiche* occorrono le formule

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dt}{dQ} = \frac{1}{\lambda}\frac{dt}{dP}, \quad \frac{dn}{dQ} = \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{dP}, \quad \frac{db}{dQ} = \frac{1}{\lambda}\frac{db}{dP}, \\ &\frac{d(N \wedge t)}{dQ} = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi + u)}{\lambda\rho} \mathrm{H}(t, t) - t \wedge \sigma. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Queste si deducono dalle (2), così:

$$\frac{dt}{dQ} = \frac{dt}{dP}\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\rho\lambda}\,\mathrm{H}\,(t, n)\,\mathrm{H}\,(t, t) = \frac{1}{\rho\lambda}\,\mathrm{H}\,(t, n) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{dt}{dP}$$

e analogamente per la seconda e terza; per la quarta si ha

$$\frac{d\,(N \wedge t)}{dQ} = N \wedge \frac{dt}{dQ} - t \wedge \sigma = \frac{1}{\lambda\rho}\,N \wedge \mathrm{H}\,(t, n) - t \wedge \sigma = \text{ecc.}$$

Per le *curvature geodetiche* $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ nelle direzioni principali t, $N \wedge t$ si ha [cfr. *d)*, n. 18, (1)]

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ \frac{d\,(N \wedge t)}{dQ}\,t \right\} \times t = \left\{ -\frac{\operatorname{sen}(\varphi + u)}{\lambda\rho}\,t - t \wedge \sigma t \right\} \times t,$$

$$\mathcal{G}_2 = -\left\{ \frac{dt}{dQ}\,(N \wedge t) \right\} \times N \wedge t = -\frac{1}{\lambda\rho}\left\{ \mathrm{H}\,(t, n)\,(N \wedge t) \right\} \times N \wedge t$$

e quindi

$$\mathcal{G}_1 = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi + u)}{\lambda\rho}, \qquad \mathcal{G}_2 = 0; \tag{22}$$

cioè le linee $s =$ cost. sono geodetiche della sup. canale.

Essendo x il vettore unitario normale ad N considerato nel n. 8, per la curvatura geodetica $\mathcal{G}_x$ nella direzione x si ha [cfr. *d)*, n. 24, (2)]

$$\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_1 \cos\theta - x \times \mathrm{Grad}_Q\,\theta = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi + u)\cos\theta}{\lambda\rho} - x \times \mathrm{Grad}_Q\,\theta. \tag{23}$$

Per il calcolo diretto di $\mathcal{G}_x$ occorre la derivata di $N \wedge x$ rispetto a Q. Dalle (17), (21) si ha con calcolo semplicissimo [cfr. *a)*]

$$\frac{dx}{dQ} = \mathrm{H}\,(\mathrm{grad}_Q\,\theta, N \wedge x) - \operatorname{sen}\theta \,.\, t \wedge \sigma + \frac{1}{\lambda\rho}\,\mathrm{H}\,\{ t, \cos\theta\, n - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\varphi + u)\, t \}, \tag{24}$$

da cui cambiando x, θ in $N \wedge x$, $\pi/2 + \theta$ si ha

$$\frac{d\,(N \wedge x)}{dQ} = -\,\mathrm{H}\,(\mathrm{grad}_Q\,\theta, x) - \cos\theta \,.\, t \wedge \sigma - \frac{1}{\lambda\rho}\,\mathrm{H}\,\{ t, \operatorname{sen}\theta\, n + \cos\theta \operatorname{sen}(\varphi + u)\, t \}. \tag{25}$$

Applicando la (25) alla formula generale

$$\mathcal{G}_x = \left\{ \frac{d(\boldsymbol{N} \wedge x)}{dQ} x \right\} \times x$$

si ritrova la (23) e in particolare le (22).

Per mezzo delle (24), (25) si può calcolare la rotazionale e la divergenza (rot, div) di x e $\boldsymbol{N} \wedge x$ e collegare queste con le $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$ [cfr. *d)*, n. 22].

Avendo θ il precedente significato l'equazione differenziale delle geodetiche ($\mathcal{G} = 0$) assume la forma semplicissima [cfr. *d)*, n. 37, (1)]

$$d\theta = -\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{t} \times d\boldsymbol{t} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n} \,.\, ds = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{b} \,.\, ds$$

e per la (17)

$$(26) \qquad d\theta = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi + u)}{\rho} ds, \quad \text{ovvero} \quad d\theta = \lambda \mathcal{G}_1 ds.$$

10. Se nella espressione (7) di Q si considera anche r variabile, allora Q risulta funzione delle tre variabili indipendenti s, u, r e si ha un sistema triplo di superficie, $s =$ cost., $u =$ cost., $r =$ cost., che è ortogonale poichè insieme alle (13) si ha, essendo per la (12) $Q = P + r\boldsymbol{N}$, $\partial Q / \partial r = \boldsymbol{N}$ e le direzioni $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{N}$ formano un sistema ortogonale.

Le superficie $s =$ cost. sono i *piani normali* della linea P; le superficie $u =$ cost. sono le *sviluppabili osculatrici delle evolute* della linea P [cfr. n. 5]; le superficie $r =$ cost. sono le *superficie canali* aventi per asse la linea P e sono tutte parallele tra loro.

Per ogni punto Q dello spazio passano tre delle superficie ora considerate, che, due a due, si tagliano secondo tre linee; la $u =$ cost., $r =$ cost., che è una delle linee parallele alla P; la $r =$ cost., $s =$ cost., che è la circonferenza, ecc.; $s =$ cost., $u =$ cost. che è la retta PQ. Queste linee sono ortogonali due a due e sono linee di curvatura per le tre superficie del sistema.

Superficie parallele.

11. La superficie Σ sia descritta dal punto M e sia $\boldsymbol{N}$ un vettore unitario funzione di M parallelo alla normale $a\Sigma$ in M. Il punto M', funzione di M, descrive una superficie Σ' *parallela* a Σ quando la retta MM' è normale comune a Σ e Σ'. Si deve dunque avere $M' = M + a\boldsymbol{N}$ con $dM' \times \boldsymbol{N} = 0$ per qualunque spostamento; ma $dM' \times \boldsymbol{N} = (dM + ad\boldsymbol{N} + da\,.\,\boldsymbol{N}) \times \boldsymbol{N} = da$, quindi deve essere $a = \text{cost.}$, cioè tutte le superficie Σ' parallele a Σ sono descritte dal punto $M' = M + a\boldsymbol{N}$ con a costante arbitraria.

Per ciò che segue poniamo

$$M' = M + a\boldsymbol{N}, \quad M = M' - a\boldsymbol{N}, \text{ con } a \text{ costante} \tag{1}$$

$$\sigma = \frac{d\boldsymbol{N}}{dM}, \quad \sigma' = \frac{d\boldsymbol{N}}{dM'} \tag{2}$$

e si passa da Σ' a Σ cambiando a in $-a$ e lasciando $\boldsymbol{N}$ invariato.

Si hanno le due formule

$$\frac{dM'}{dM} = 1 + a\sigma, \quad \frac{dM}{dM'} = 1 - a\sigma', \tag{3}$$

le quali provano che le omografie $1 + a\sigma$, $1 - a\sigma'$ sono l'una inversa dell'altra.

Indicando con h l'invariante terzo di $1 + a\sigma$ si ha

$$\left\{ \begin{aligned} h &= \mathrm{I}_3(1 + a\sigma) = 1 + a\mathrm{I}_1\sigma + a^2\mathrm{I}_2\sigma \\ 1/h &= \mathrm{I}_3(1 - a\sigma') = 1 - a\mathrm{I}_1\sigma' + a^2\mathrm{I}_2\sigma'. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Si può esprimere σ' in funzione di σ

$$\sigma' = \sigma(1 + a\sigma)^{-1} = \{\sigma\,.\,\mathrm{R}(1 + a\sigma)\}/h \tag{5}$$

$$h\sigma' = \sigma + a\mathrm{I}_2\sigma\{1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})\} \tag{5'}$$

e le analoghe per σ in funzione di σ' cambiando a in $-a$. La (5) si ottiene osservando [cfr. *a)*, p. 38] che

$$\sigma' = \frac{dN}{dM'} = \frac{dN}{dM}\frac{dM}{dM'} = \sigma . (1 + a\sigma)^{-1}$$

e la seconda osservando che [cfr. *a)*]

$$\mathrm{R}(1 + a\sigma) = 1 + a\mathrm{I}_1\sigma - a\sigma + a^2\mathrm{R}\sigma$$

e tenendo conto [cfr. *d)*, n. 5, (5), (6)] delle note espressioni di σ^2 ed $\mathrm{R}\sigma$.

Applicando R ai due membri della (5) si ha subito

$$\mathrm{R}\sigma' = (\mathrm{R}\sigma)/h \tag{6}$$

dalla quale, operando con I_1 nei due membri [cfr. *d)*, p. 40]

$$\mathrm{I}_2\sigma' = (\mathrm{I}_2\sigma)/h, \tag{7}$$

come pure operando con I_1 nei due membri della (5′), si ha

$$\mathrm{I}_1\sigma' = (\mathrm{I}_1\sigma + 2a\mathrm{I}_2\sigma)/h. \tag{8}$$

12. Le formule precedenti, dalle quali molte altre ne possono esser dedotte, sono fondamentali per lo studio delle superfici Σ' parallele a Σ. Ne diamo qualche esempio.

La (7) stabilisce la relazione tra gli elementi di area in M ed M'. Esprime pure che Σ' è sviluppabile solamente quando Σ è sviluppabile.

L'equazione differenziale delle linee di curvatura in Σ' è $dM' \wedge dN = 0$; ma $dM' \wedge dN = (dM + a\,dN) \wedge dN = dM \wedge dN$ e quindi alle linee di curvatura di Σ corrispondono in Σ' le linee di curvatura.

Esprimendo mediante M le condizioni

$$dM' \times dN = 0\,, \qquad dM' \wedge d^2M' \times N = 0$$

si hanno le equazioni differenziali delle linee di Σ cui corrispondono in Σ' le assintotiche e le geodetiche.

Dalle (7), (8) si ha

$$I_1\sigma'/I_2\sigma' = I_1\sigma/I_2\sigma + a$$

che prova, ad es., che " se in ogni punto di Σ la somma dei raggi principali di curvatura normale è costante, lo stesso avviene per Σ' ", " se Σ è tale che la somma dei raggi principali di curvatura normale è costante in ogni suo punto, allora essa è superficie parallela di una superficie di area minima ".

Se $\boldsymbol{u}$ è vettore unitario normale ad $\boldsymbol{N}$ allora dalla (5') si ha

$$h\sigma'\boldsymbol{u} = \sigma\boldsymbol{u} + a I_2\sigma \,.\, \boldsymbol{u}$$

e quindi per le tre curvature $\mathcal{N}_u'$, $\mathcal{T}_u'$, $\mathcal{G}_u'$ nel punto M' di Σ' per la direzione $\boldsymbol{u}$ si ha [cfr. *d)*, n. 18, (1)]

$$\mathcal{N}_u' = \frac{\mathcal{N}_u + a I_2\sigma}{h}, \qquad \mathcal{T}_u' = \frac{\mathcal{T}_u}{h},$$

$$\mathcal{G}_u' = \frac{1 + a I_1\sigma}{h}\mathcal{G}_u - \frac{a}{h}\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{N} \times \frac{d\boldsymbol{u}}{dM}\sigma\boldsymbol{u}.$$

In particolare se $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ sono le curvature normali nelle direzioni principali in M si ha

$$h = (1 + a\mathcal{N}_1)(1 + a\mathcal{N}_2),$$

perchè $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = I_1\sigma$, $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 = I_2\sigma$ e quindi

$$1/\mathcal{N}_1' = 1/\mathcal{N}_1 + a, \qquad 1/\mathcal{N}_2' = 1/\mathcal{N}_2 + a.$$

Se i vettori unitari $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ sono paralleli alle direzioni principali in M, allora

$$\sigma\boldsymbol{x} = \mathcal{N}_1\boldsymbol{x}, \quad \sigma\boldsymbol{y} = \mathcal{N}_2\boldsymbol{y}, \quad \sigma'\boldsymbol{x} = \mathcal{N}_1'\boldsymbol{x}, \quad \sigma'\boldsymbol{y} = \mathcal{N}_2'\boldsymbol{y},$$

ed osservando che si può sempre porre

$$\boldsymbol{u} = \cos\varphi \,.\, \boldsymbol{x} + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \boldsymbol{y}$$

e che si ha quindi

$$\sigma u = \mathfrak{N}_1 \cos\varphi \,.\, x + \mathfrak{N}_2 \operatorname{sen}\varphi \,.\, y\,,$$
$$\sigma' u = \mathfrak{N}_1' \cos\varphi \,.\, x + \mathfrak{N}_2' \operatorname{sen}\varphi \,.\, y\,,$$

si possono stabilire relazioni tra u, σu, tra direzioni coniugate, direzioni assintotiche, ecc., con la massima semplicità e sempre sotto forma assoluta.

Una teoria semplice dei logaritmi.

Nota della Dr. ROSETTA FRISONE
(R. Scuola normale di Torino).

In quanto segue, Log a, che si legge " Logaritmo di a „, indica il logaritmo, con tre cifre decimali, in base dieci, del numero a.

Le proposizioni che seguono sono scritte in simboli di Logica matematica, e sono tradotte in linguaggio ordinario.

$$a, b \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset.$$

1. $$\operatorname{ord} a = \max \mathrm{n} \cap x \ni (\mathrm{X}^x \leqq a) \qquad \text{Def.}$$

" Le lettere a, b, in quanto segue, indicano quantità numeriche, cioè numeri reali positivi. Allora ord a, che si legge " l'ordine di a „, vale, per definizione, il massimo numero intero, positivo o nullo o negativo, x tale che 10^x sia minore o eguale ad a „.

Se ord $a \geqq 0$, allora esso è il numero delle cifre precedenti quella delle unità, di a.

2. $$\operatorname{ord} a \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\, \mathrm{X}^{\operatorname{ord} a} \leqq a < \mathrm{X}^{\operatorname{ord} a + 1}.$$

Ne risulta che ord a è un numero intero, determinato, e che a è compreso fra le potenze ord a e ord $a + 1$ di 10. Viceversa:

3. $$x \,\epsilon\, \mathrm{n} \,.\, \mathrm{X}^x \leqq a < \mathrm{X}^{x+1} \,.\, \supset \,.\, x = \operatorname{ord} a.$$

" Se x è un intero, e se a è compreso fra le potenze x ed $x+1$ di 10, la prima inclusa e la seconda esclusa, sarà x l'ordine di a ".

Le proposizioni 2 e 3 sono equivalenti alla definizione 1, e si ottengono da questa sostituendo alla parola " massimo ", o simbolo " max ", la sua definizione.

4. $$\text{ord}\,(a \times b)\ \epsilon\ \text{ord}\,a + \text{ord}\,b + 0 \cdots 1.$$

" L'ordine del prodotto $a \times b$ di due quantità numeriche vale $\text{ord}\,a + \text{ord}\,b$, ovvero vale $\text{ord}\,a + \text{ord}\,b + 1$ ".

Infatti dalla 2 si ha:

$$X^{\text{ord}\,a} \leqq a < X^{\text{ord}\,a+1}, \qquad \text{e} \qquad X^{\text{ord}\,b} \leqq b < X^{\text{ord}\,b+1},$$

moltiplico

$$X^{\text{ord}\,a + \text{ord}\,b} \leqq a \times b < X^{\text{ord}\,a + \text{ord}\,b + 2},$$

da cui, e dalla proposizione 3, si ha la nostra proposizione.

Ciò premesso, passo alla definizione di logaritmo.

5. $$\text{Log}\,a = (\text{ord}\,a^{1000})/1000 \qquad \text{Def.}$$

" $\text{Log}\,a$ vale l'ordine della potenza 1000 di a, il quale sia diviso per 1000 ".

6. $$\text{Log}\,1 = 0.$$

Infatti: $1^{1000} = 1$, onde $\text{ord}\,(1^{1000}) = 0$ e dividendo per 1000 si ha zero.

7. $$\text{Log}\,10 = 1.$$

Infatti: $\text{Log}\,10 = (\text{ord}\,10^{1000})/1000 = 1000/1000 = 1$.

8. $$x\ \epsilon\ \text{n}\,.\,\supset\,.\ \text{Log}\,10^x = x.$$

Poichè $\text{Log}\,10^x = (\text{ord}\,10^{x\,1000})/1000 = x\,1000/1000 = x$.

9. $$\text{Log}\,(a \times b)\ \epsilon\ \text{Log}\,a + \text{Log}\,b + (0 \cdots 1)\,X^{-3}.$$

" Il logaritmo del prodotto di due numeri vale la somma dei loro logaritmi, o questa somma aumentata di un'unità dell'ultimo ordine decimale ".

Infatti, per la 5:

$$\mathrm{Log}\,(a\times b) = [\mathrm{ord}\,(a\times b)^{1000}\ 1000] = [\mathrm{ord}\,(a^{1000}\times b^{1000})]\ 1000$$

e per la proposizione 4 si ha:

$$\mathrm{Log}\,(a\times b)\ \epsilon\ [\mathrm{ord}\,a^{1000} + \mathrm{ord}\,b^{1000} + 0\cdots 1]/1000,$$

ossia: $$\mathrm{Log}\,(a\times b)\ \epsilon\ \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b + (0\cdots 1)\,X^{-3}.$$

10. $$\mathrm{Log}\,(a/b)\ \epsilon\ \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b - (0\cdots 1)\,X^{-3}.$$

“ Il logaritmo del quoto vale la differenza dei logaritmi dei termini, oppure questa differenza diminuita di una unità dell'ultimo ordine decimale „.

Infatti, si ha:

$$a = (a/b)\times b;$$

prendendo i logaritmi

$$\mathrm{Log}\,a\ \epsilon\ \mathrm{Log}\,(a/b) + \mathrm{Log}\,b + (0\cdots 1)\,X^{-3},$$

da cui si ricava:

$$\mathrm{Log}\,(a/b)\ \epsilon\ \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b - (0\cdots 1)\,X^{-3}.$$

11. $$m\ \epsilon\ N\ .\supset .\ \mathrm{Log}\,(a^m)\ \epsilon\ m\times \mathrm{Log}\,a + [0\cdots(m-1)]\,X^{-3}.$$

“ Se m è un numero intero positivo, il logaritmo di una potenza vale l'esponente moltiplicato per il logaritmo della base, più uno dei numeri $0, 1, \ldots (m-1)$ moltiplicato per l'unità dell'ultimo ordine decimale „.

Questa proposizione risulta dalla regola del prodotto.

12. $$m\ \epsilon\ N\ .\supset .\ \mathrm{Log}\,\sqrt[m]{a} = V_3\,(\mathrm{Log}\,a/m).$$

“ Se m è un numero intero positivo, il logaritmo della radice m^{ma} di a vale il valore, con tre cifre decimali, del rapporto $\mathrm{Log}\,a/m$ „.

Infatti:

$$a = (\sqrt[m]{a})^m;$$

prendo i logaritmi:

$$\mathrm{Log}\,a\ \epsilon\ m\times(\mathrm{Log}\,\sqrt[m]{a}) + [0\cdots(m-1)]\,X^{-3},$$

divido per m:

$$(\text{Log}\, a)/m \in \text{Log}\, \sqrt[m]{a} + [0 \cdots (m-1]\, X^{-3}/m,$$

prendo i valori con 3 decimali, e così l'ultimo termine scompare, onde la proposizione.

***

Applico la definizione di logaritmo al calcolo diretto di Log 2.

Il calcolo di 2^{1000} è lunghissimo, ma il calcolo del suo ordine (o numero delle cifre precedenti quella dell'unità), che solo ci interessa, è abbastanza semplice.

Per ciò ricorro alle eguaglianze:

$$1000 = 2 \times 500\,; \quad 500 = 2 \times 250\,; \quad 250 = 2 \times 125\,;$$
$$125 = 124 + 1\,; \quad 124 = 2 \times 62\,; \quad 62 = 2 \times 31\,;$$
$$31 = 2 \times 15 + 1\,; \quad 15 = 2 \times 7 + 1\,; \quad 7 = 2 \times 3 + 1\,; \quad 3 = 2 + 1.$$

E calcolo: $2^3 = 8$; elevo a quadrato e moltiplico per 2, ho 2^7; elevo a quadrato e moltiplico per 2, ho 2^{15}: elevo a quadrato e moltiplico per 2, ho 2^{31}:

$$2^{31} = 2\,147\,483\,648.$$

Metto in evidenza l'ordine di questo numero, e conservo solo 4 cifre decimali:

$$X^9 \times 2{\cdot}1474 < 2^{31} < X^9 \times 2{\cdot}1475.$$

Elevo a quadrato col metodo che gli Indiani chiamarono fulmineo (*). L'operazione del quadrato di 2·1474, si dispone così:

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}1474 \\ \hline 4{\cdot}4766 \\ 134 \\ \hline 4{\cdot}6106. \end{array}$$

(*) PEANO, *Approssimazioni numeriche*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 1917.

Sotto la 1ª cifra 2 scrivo il suo quadrato 4; poi scrivo il doppio prodotto della 1ª cifra per la 2ª, cioè 4; poi il doppio prodotto della 1ª per la 3ª, più il quadrato della 2ª, cioè 17; e scrivo l'1 nella colonna dei decimi, ed il 7 nella colonna dei centesimi; e così via si hanno i vari prodotti 36, 46. La somma 4·6106 sarà minore di $2{\cdot}1474^2$.

Faccio il quadrato per eccesso di 2·1475:

$$\begin{array}{r} \underline{2{\cdot}1475} \\ 4{\cdot}4760 \\ 135 \\ \underline{17} \\ 4{\cdot}6127. \end{array}$$

cioè calcolo il quadrato come sopra, eguale a $4 + 4/10 + 17/100 + 36/1000 + 50/10000$, ed aggiungo la somma delle cifre decimali di 2·1475, cioè $1 + 4 + 7 + 5 = 17$, che scrivo nella terza linea.

Concludo:

$$X^{18} \times 4{\cdot}6106 < 2^{62} < X^{18} \times 4{\cdot}6127;$$

cancello l'ultima cifra:

$$X^{18} \times 4{\cdot}610 < 2^{62} < X^{18} \times 4{\cdot}613.$$

Elevo a quadrato, con lo stesso metodo, 4·610 e 4·613:

$$\begin{array}{r} \underline{4{\cdot}610} \\ 16{\cdot}842 \\ 4\ 41 \\ \underline{} \\ 21{\cdot}252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{4{\cdot}613} \\ 16{\cdot}846 \\ 4\ 43 \\ \underline{10} \\ 21{\cdot}286. \end{array}$$

E così:

$$X^{37} \times 2{\cdot}125 < 2^{124} < X^{37} \times 2{\cdot}129.$$

Moltiplico per 2:

$$X^{37} \times 4{\cdot}250 < 2^{125} < X^{37} \times 4{\cdot}258.$$

Elevo a quadrato:

$$\begin{array}{rr} \underline{4{\cdot}250} & \underline{4{\cdot}258} \\ 16{\cdot}640 & 16{\cdot}644 \\ 1\ 42 & 1\ 48 \\ & .\ 15 \\ \hline 18{\cdot}060 & 18{\cdot}139 \end{array}$$

e ho:

$$X^{75} \times 1{\cdot}80 < 2^{250} < X^{75} \times 1{\cdot}82.$$

Elevo a quadrato:

$$\begin{array}{rr} \underline{1{\cdot}80} & \underline{1{\cdot}82} \\ 1{\cdot}64 & 1{\cdot}68 \\ 1\ 6 & 1\ 6 \\ & 10 \\ \hline 3{\cdot}24 & 3{\cdot}38 \end{array}$$

e così:

$$X^{150} \times 3{\cdot}24 < 2^{500} < X^{150} \times 3{\cdot}38.$$

Elevando a quadrato:

$$\begin{array}{rr} \underline{3{\cdot}24} & \underline{3{\cdot}38} \\ 9{\cdot}28 & 9{\cdot}87 \\ 1\ 2 & 1\ 5 \\ & 11 \\ \hline 10{\cdot}48 & 11{\cdot}48 \end{array}$$

$$X^{301} \times 1{\cdot}048 < 2^{1000} < X^{301} \times 1{\cdot}148.$$

Potrò così concludere che

$$\text{ord}\ 2^{1000} = 301$$

e

$$\text{Log}\ 2 = 0{\cdot}301.$$

Calcolo di Log 3, disposto nel modo che parmi più comodo. Dalle tavole:

$$3^{31} = 6\ 176\ 733\ 962\ 283\ 947.$$

$$X^{14}\times 6{\cdot}1767 < 3^{31} < X^{14}\times 6{\cdot}1768$$

$$\begin{array}{rcr} 36{\cdot}2565 & \qquad & 36{\cdot}2567 \\ 1\;884 & & 1\;885 \\ 1 & & 1 \\ & & 22 \\ \hline 38{\cdot}1505 & & 38{\cdot}1539. \end{array}$$

$$X^{29}\times 3{\cdot}8150 < 3^{62} < X^{29}\times 3{\cdot}8154$$

$$\begin{array}{rcr} 9{\cdot}8061 & \qquad & 9{\cdot}8065 \\ 4\;748 & & 4\;740 \\ & & 1 \\ & & 18 \\ \hline 14{\cdot}5541 & & 14{\cdot}5583. \end{array}$$

$$X^{59}\times 1{\cdot}4554 < 3^{124} < X^{59}\times 1{\cdot}4559$$
$$X^{59}\times 4{\cdot}3662 < 3^{125} < X^{59}\times 4{\cdot}3677$$
$$X^{59}\times 4{\cdot}366 < 3^{125} < X^{59}\times 4{\cdot}368$$

$$\begin{array}{rcr} 16{\cdot}474 & \qquad & 16{\cdot}470 \\ 2\;58 & & 2\;50 \\ & & 1 \\ & & 17 \\ \hline 19{\cdot}054 & & 19{\cdot}087. \end{array}$$

$$X^{119}\times 1{\cdot}905 < 3^{250} < X^{119}\times 1{\cdot}909$$

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}810 & \qquad & 1{\cdot}818 \\ 1\;81 & & 1\;81 \\ & & 18 \\ \hline 3{\cdot}620 & & 3{\cdot}646. \end{array}$$

$$X^{238}\times 3{\cdot}62 < 3^{500} < X^{238}\times 3{\cdot}65$$

$$\begin{array}{rcr} 9{\cdot}68 & \qquad & 9{\cdot}66 \\ 3\;4 & & 3\;6 \\ & & 11 \\ \hline 13{\cdot}08 & & 13{\cdot}37. \end{array}$$

$$X^{477}\times 1{\cdot}30 < 3^{1000} < X^{477}\times 1{\cdot}33$$

onde:

$$\text{ord}\; 3^{1000} = 477$$

e

$$\text{Log}\; 3 = 0{\cdot}477.$$

***

Trattai dei logaritmi a 3 decimali; le tavole di questi logaritmi occupano pochi centimetri quadrati, e sono sufficienti a svolgere completamente le loro applicazioni. L'estensione alle tavole maggiori è immediata.

Generalmente per logaritmo in base dieci del numero a, si definisce il numero x tale che $X^x = a$. Deve premettersi la definizione della potenza con esponente irrazionale, e si debbono dimostrare le leggi: $X^{x+y} = X^x \times X^y$, e $(X^x)^y = X^{xy}$. Ed è noto quanto questo procedimento sia lungo e difficile, a farsi completamente.

La definizione di logaritmo mediante le due progressioni aritmetiche e geometriche, non differisce che nel linguaggio, dalla precedente. Euclide, per esprimere ciò che indichiamo con a^n, dice " il termine di posto $n+1$ nella progressione di cui il primo termine è 1, e la ragione è a ". Onde il numero n è il numero della ragione, logaritmo, di a^n. Quindi colle progressioni si usa il linguaggio di Euclide, e cogli esponenti il linguaggio ordinario.

È noto che l'analisi basa sul solo concetto di numero intero. Ed in ogni definizione ben data, il segno definito si può mandar via, sostituendolo col suo definiente. Perciò, se gli irrazionali son ben definiti, fatta la sostituzione, ogni teorema contenente gli irrazionali si deve trasformare in un teorema sui numeri interi.

Nel caso nostro, l'eliminazione dell'esponente irrazionale qui riesce, e conduce ad un risultato molto semplice. Nella teoria precedente, dobbiamo solo sapere il significato di X^n, ove n è un intero, e le regole di queste potenze.

Il calcolo numerico del logaritmo d'un numero, per la via sopra indicata, cioè mediante successive elevazioni a quadrato, è molto più semplice della via comunemente seguita, mediante successive estrazioni di radici quadrate.

L'Accademico Segretario
CARLO FABRIZIO PARONA

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, S. E. Ruffini, Sforza, e Patetta.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 6 maggio corr.

Il Vicepresidente Chironi presenta un gruppo di pubblicazioni del Prof. Lando Landucci, Deputato al Parlamento, per varii aspetti notevolissime, riguardanti il diritto romano. Sulla più recente di esse, cioè *La lesione enorme nella compra e vendita. Esame storico-critico d'una rinnovata proposta di interpolazioni giustinianee* (Estratto dagli " Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti ", vol. LXXV), il Vicepresidente, dopo aver notato che in essa la critica profonda su quell'argomento è magistralmente condotta, così da rimanere più salda la dottrina che l'insigne romanista accoglie, soggiunge: " Non solo per " questo notevole è il contributo: ma per la elasticità che l'A.

" vorrebbe dare al concetto della " lesione ", deducendo dalla " ragion contenutavi. Vero, che alla piena accoglienza dell'idea " farebbe ostacolo non lieve lo speciale aspetto che l'istituto " ha nel diritto privato, con le limitazioni ond'è nettamente " circoscritto; ma vero del pari, che nel discutere odierno su la " clausola " *rebus sic stantibus* " ed il valor suo, e tra le ri- " forme indotte dalla legislazione nostra di guerra alla dottrina " tradizionale sul " caso fortuito " o " forza maggiore ", questo " argomentare della " lesione " risponderebbe assai meglio allo " insegnamento del diritto comune sugli oneri maggiori soprav- " venuti all'obbligato nei contratti a scadenze successive. E per " tale suo aspetto è particolarmente segnalabile il dotto lavoro " all'attenzione degli studiosi, e del legislatore ". La Classe ringrazia il chiarissimo donatore.

Il Socio Einaudi presenta, anche a nome del Socio Prato, il volume XXVII, anno XXIII (1916), della rivista *La Riforma Sociale*, cui va unito il volume di Riccardo Bachi, *L'Italia Economica nel 1915*. La Classe porge vive grazie ai Soci Einaudi e Prato per il cospicuo dono.

Il Socio Vidari fa omaggio della sua recente monografia *Il corso popolare come scuola di preparazione generica alla vita operaia* (Estr. dalle Relazioni al Convegno di Milano per il Corso popolare 29 ottobre-1° novembre 1916). La Classe ringrazia.

Il Socio Segretario Stampini presenta, da parte della Cornell University Library, il volume recentemente pubblicato dalla Oxford University Press *Catalogue of the Petrarch Collection bequeathed by* Willard Fiske. *Compiled by* Mary Fowler Curator of the Dante and Petrarch Collections, rilevando la somma importanza di questa pubblicazione per gli studiosi del Petrarca. La Classe manda i più vivi ringraziamenti per il graditissimo dono alla biblioteca della Cornell University.

Finalmente il Socio Stampini presenta, a nome dell'autore e dell'editore, ai quali la Classe invia nuovi ringraziamenti, il

recente volume *Vittorio Alfieri. La vita, le rime e altri scritti minori a cura di* Michele Scherillo (Milano, Hoepli, 1917), volume che va aggiunto agli altri pur pregevoli dai medesimi donati all'Accademia.

Raccoltasi poscia la Classe in adunanza privata procede alla votazione per l'elezione di tre Soci nazionali residenti. Riescono eletti, salvo l'approvazione Sovrana, i Professori Vittorio Cian, Giovanni Pacchioni e Luigi Valmaggi.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSI UNITE

Adunanza del 27 Maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Panetti;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, De Sanctis, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, e Stampini in funzione di Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza delle Classi unite del 13 maggio corrente.

Il Presidente legge una lettera del Socio Mattirolo che ringrazia l'Accademia per la parte presa al suo lutto domestico. Il Socio Mattirolo rinnova a voce le sue azioni di grazie.

Su invito del Presidente il Socio Naccari dà lettura della prima relazione della Commissione per il premio Bressa, ai sensi dell'art. 3 del Regolamento interno per il conferimento di esso premio. Non essendovi altre proposte da parte di alcun Socio nazionale residente o non residente, e non essendovi alcuna osservazione a riguardo della relazione, il Presidente dichiara definitivo l'elenco delle scoperte od opere proposte pel premio, conforme a quanto è prescritto dal citato art. 3.

Il Presidente invita il Socio Patetta a leggere la relazione della Commissione per il conferimento del premio Gautieri per la storia e pel triennio 1913-1915. La relazione è approvata alla unanimità.

Si procede alla elezione del Socio che deve rappresentare l'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del Consorzio Universitario, per compiuto triennio del Socio D'Ovidio, che è rieleggibile. Votano a schede segrete i 20 Soci presenti; ed il Socio D'Ovidio è proclamato eletto con voti 19. Una scheda portò il nome del Socio Camerano.

Relazione della Commissione per il conferimento dei premi Gautieri (Opere storiche, triennio 1913-1915).

Chiarissimi Colleghi,

La Commissione incaricata da Voi di ricercare e d'indicarvi le opere storiche apparse in Italia durante il triennio 1913-1915, che debbano, a parer suo, esser prese in considerazione per il conferimento del premio Gautieri, dopo aver constatato, nella sua prima riunione, che ben dieci autori, aspiranti al premio stesso, avevano inviato alla nostra Accademia degli scritti storici rispondenti, per gli anni di pubblicazione, alle condizioni del programma, rivolse a ciascun Socio nazionale, residente o non residente, l'invito prescritto dall'art. 3 del Regolamento, di *proporre cioè*, nel termine di un mese fissato dall'art. 4, *le opere a suo giudizio degne del premio.* Non avendo però ricevuto alcuna proposta, procedette per conto suo alle opportune ricerche, in seguito alle quali ritenne anzitutto di non dovervi far proposte all'infuori degli scritti già ricordati, sottoposti dagli autori al suo ed al vostro giudizio, e dei quali ora diremo.

Abbiamo presente un solo volume dedicato interamente a studi di storia antica; quello di Aldo Ferrabino, intitolato *Kalypso* (Torino, 1914). In esso l'autore narra, sul fondamento di una ricerca accurata e metodica, la storia di quattro miti antichi, la liberazione d'Andromeda, il ratto di Persefone, la uccisione di Caco, l'origine di Cirene. Questi miti (in ciò l'opera sua si distingue vantaggiosamente da tanti altri studi di mitologia) egli li considera come organismi viventi, di cui cerca di intendere e di chiarire la vita; e da essi assurge al concetto dell'antica mitopeia e della sua storia in generale, soffermandosi soprattutto a segnar le linee direttive della evoluzione della mitopeia letteraria. È questa, senza dubbio, impresa ar-

dita, nella quale il giovane scrittore dà prova della vivacità ed originalità del suo ingegno. Senonchè vien fatto di domandare, se le forze sieno sempre pari alla difficoltà dell'argomento; e nel pensiero come nella forma sembra che si riscontri talora qualche immaturità e acerbezza. Anche la forma, del resto, schiva com'è del convenzionalismo in uso tra i filologi, rispecchia l'ingegno del Ferrabino sdegnoso delle vie battute; ma con lo sforzato e il convulso, che qualche volta vi si avverte, non contribuisce certo a rendere i concetti fondamentali del volume chiari e persuasivi. Le parti più felici del libro sono forse le analisi d'alcune trattazioni poetiche dei vari miti, accompagnate da saggi di versione garbati ed eleganti. C'è per altro qualche cosa d'incompiuto anche in queste analisi (come del resto non sfugge allo stesso autore), perchè egli non s'è voluto occupare delle elaborazioni, che i miti ricevettero nelle arti figurate, le quali sono notoriamente legate alle elaborazioni letterarie da continua reciproca azione e reazione. Comunque sia, il libro è ricco di pregi, e dà luogo a sperare che il giovane scrittore, raggiunta maggiore maturità d'arte e di pensiero, saprà recare importanti contributi allo studio dei problemi concernenti il pensiero e l'arte dell'antichità.

L'opera di Giovanni Bragagnolo ed Enrico Bettazzi, intitolata: *Augusta Taurinorum: Torino nella storia del Piemonte e d'Italia* (Torino, 1915), s'estende, nella parte che ci fu presentata (vol. I completo, vol. II fino alla pag. 704), dalle epoche preistoriche al periodo napoleonico. Non si tratta d'una storia municipale nel vero senso della parola. Il secondo titolo, *Torino nella storia del Piemonte e d'Italia*, apre infatti una gran porta, per la quale gli autori introdussero una quantità di materiale, che può riferirsi a Torino solo molto genericamente o molto indirettamente, e che per mole supera di gran lunga il materiale strettamente torinese. Così la menzione del periodo preistorico dà occasione di discorrere della vita dell'umanità nelle età della pietra, del bronzo, del ferro; e il semplice fatto dell'esser stata Torino soggetta a Roma induce gli autori a narrare abbastanza diffusamente gli usi e costumi dei Romani dell'epoca imperiale, e a scendere perfino a particolari di scarsissimo rilievo. Più in là è narrata minutamente la vita signorile nei castelli medioevali. Ora tutte queste cose son certo buone a

conoscersi; ma sembra naturale ed opportuno trattarle o cercarne la conoscenza in opere di storia generale, piuttosto che in opere particolari. Ci duole di dover aggiungere che così le parti d'indole generale del libro come le parti di contenuto strettamente locale, oltre a numerose affermazioni, che avrebbero dovuto esser formulate in modo diverso o esser accompagnate da osservazioni atte a meglio illuminare il lettore intorno alle questioni trattate, contengono parecchie inesattezze di vario genere. Inoltre gli autori non nascondono *l'indole schiettamente divulgativa* dell'opera loro, avvertendo che " gli studiosi della materia non vi troveranno fatti o documenti nuovi, o dotte disquisizioni ": ed anche queste dichiarazioni, non smentite dai fatti, basterebbero a distogliere la vostra Commissione dal proporvi di conferire il premio ai signori Bragagnolo e Bettazzi.

Accenneremo appena alla *Storia di Venezia* di Eugenio Musatti (nuova edizione, Milano, 1915, 2 voll.), perchè non crediamo che, confrontata colle precedenti pubblicazioni dell'autore, e specialmente colla *Storia politica di Venezia secondo le ultime ricerche* (Padova, 1897), essa possa esser considerata come opera nuova, e come tale proposta per il premio. Del resto non si potrebbe neppur dire che i due volumi del Musatti formino una storia di Venezia organica, completa, ben proporzionata. Si tratta piuttosto di tanti capitoli, che appaiono spesso quasi staccati, quasi frammentari; e che sono talora affatto insufficienti, come ad esempio il primo dedicato all'*Origine di Venezia*, mentre si presentano altre volte come piccole monografie, nelle quali un determinato argomento è svolto senza vincoli di tempo e di spazio. Si vedano, per esempio, prima del capitolo dedicato a Baiamonte Tiepolo, ossia agli avvenimenti dell'anno 1310 (vol. I, pagg. 229 e segg.), i due lunghissimi capitoli intitolati *Viaggi e scoperte* e *La podestà ducale* (pagg. 118-229); il primo dei quali giunge fino alle scoperte fatte in pieno secolo decimosesto da Sebastiano Caboto, alle quali si uniscono, con nesso molto artificioso, le notizie sulla scoperta e l'introduzione a Venezia dell'arte della stampa; il secondo contiene, in sostanza, la storia (già trattata dall'autore in apposita monografia) della *promissione ducale* fino alla caduta della repubblica.

Passiamo agli scritti su argomenti di storia medioevale.

Per l'ampiezza e l'importanza del tema appare anzitutto

degnissimo d'attenzione il primo volume della *Storia della scuola in Italia* di Giuseppe Manacorda, volume dedicato appunto al medio evo e diviso in due parti, coi sottotitoli, l'una di *Storia del diritto scolastico*, l'altra di *Storia interna della scuola medioevale italiana* (Milano, Palermo, Napoli, 1913, di pp. XII, 280, 429, con figure). Alla seconda parte sono uniti un *Dizionario geografico delle scuole italiane nel medio evo* (compilazione senza dubbio utilissima e faticosa, benchè si tratti, per necessità, d'un primo, semplice abbozzo); e un prospetto di *Libri scolastici nelle biblioteche medievali italiane* (nel quale, per dir vero, non tutte le biblioteche sono italiane, nè tutti i libri registrati possono forse dirsi veramente scolastici).

L'autore volle dichiarare quale fosse *la genesi prima* del suo lavoro, la quale, dice egli, " risale alle molte monografie locali di storia scolastica uscite in questi ultimi anni ", i cui risultati egli venne per lungo tempo " coordinando nelle *sue* rassegne di storia scolastica uscite sugli *Studi storici* di A. Crivellucci e sul *Giornale storico della letteratura italiana* ". Ora appunto questa *genesi*, documentata da parecchi dei lavoretti che il Manacorda presentò accanto all'opera maggiore (e che sono in parte di epoca anteriore di parecchio al triennio di cui dobbiamo occuparci), ci dà forse la chiave per spiegare alcune delle deficienze fondamentali, che ci pare di scorgere nella *Storia della scuola d'Italia nel medioevo.*

L'aver il Manacorda pensato a scrivere questa storia quando, con lavoro di molti anni, aveva già raccolto un materiale certamente cospicuo, ebbe forse conseguenze non buone per riguardo al disegno e all'esecuzione dell'opera. Sembra infatti che, invece di tracciarsi uno schema netto e preciso di ciò, che si può ragionevolmente richiedere da una storia della scuola, ed istituire poi per ogni punto convenienti ricerche, quando i materiali già raccolti non apparissero sufficienti, egli abbia seguito la via opposta, proporzionando l'opera ai materiali, di cui disponeva, e dandole il nome di *Storia della scuola in Italia*, mentre si tratta in realtà d'una serie di semplici contributi ad una storia, che in gran parte è ancora da scrivere. Va inoltre osservato, che le pubblicazioni passate dal Manacorda in rassegna illustravano soprattutto delle scuole di grammatica e di rettorica; e che conseguentemente si nota una grande sproporzione fra le parti del

suo libro riguardanti appunto siffatte scuole e quelle dedicate all'insegnamento di altre discipline. Così, per esempio, le scuole di medicina sono poco meno che ignorate; e quanto alle scuole di diritto, sembra che egli si sia fermato alla letteratura, cui diede origine, verso il 1888, il presunto ottavo centenario dell'Università di Bologna; e che delle dispute, ad esempio, che s'accesero, pochi anni dopo, intorno alla durata della scuola di Roma per tutto l'alto medio evo e ad Irnerio, che vi avrebbe studiato e vi sarebbe stato poi maestro, prima di fondare la scuola di Bologna, non gli sia giunto neppur l'eco. La *genesi* del libro del Manacorda spiega pure il fatto, che egli si sia valso della letteratura molto più che delle fonti dirette, anche quando esse erano facilmente accessibili, e sia quindi caduto molte volte in gravi inesattezze, come si può vedere fin dalle prime pagine dedicate alle scuole degli ultimi tempi dell'impero romano d'occidente e del successivo periodo gotico e giustinianeo.

Sarebbe qui fuor di luogo entrare in un esame minuto del libro del Manacorda. Crediamo però che le cose fin qui dette bastino a far conoscere le ragioni, per le quali, pur apprezzando la difficoltà dell'opera da lui tentata e le sue benemerenze, vi proporremo di conferire il premio ad altri lavori, di proporzioni e d'intenti assai più modesti, ma più organici e condotti con metodo più rigorosamente scientifico.

Non molte parole occorrono per il lavoretto presentato da Pietro Buzzetti e intitolato *Regesto per documenti di Carate-Lario*, Como, 1914, pp. 111. Si tratta di transunti da 134 documenti o scritti vari, editi ed inediti, dal secolo X a tutto il XVI; transunti che hanno, più che altro, importanza locale e in ogni modo assai ristretta.

Fra le pubblicazioni presentate da Pietro Egidi, tre appaiono specialmente notevoli. Il secondo volume dei *Necrologi e libri affini della provincia romana* (Roma, 1914, di pp. 551, con tavole) contiene quattro *libri fraternitatum* della città di Roma, non anteriori al secolo decimoquinto. È pubblicazione laboriosissima, la cui difficoltà non può sfuggire a chiunque abbia qualche pratica di paleografia e getti gli occhi su alcune delle tavole, che accompagnano l'edizione. Tuttavia la mancanza nel volume sottoposto al nostro giudizio dell'introduzione generale e degli indici, che dovranno possibilmente contenere l'identificazione delle per-

sone ascritte alle confraternite e le notizie ad esse relative, riduce il volume stesso a un lavoro, più che altro, di trascrizione, sul quale non crediamo di doverci fermare.

Importante, benchè contenuta nei limiti imposti per necessità ad un'orazione inaugurale, è la trattazione sulla *Communitas Siciliae del 1282* (Messina, 1915, pp. 56). In essa l'autore illustra un punto poco noto della storia siciliana, esponendo come, dopo i famosi Vespri, cioè nella notte del 30 marzo, si costituisse una specie di governo repubblicano, al quale, dopo molte esitazioni e grandi difficoltà, finirono coll'aderire tutte le città e tutti i paesi dell'isola; come esso si reggesse, e come, ingeneratasi la persuasione che non si potesse senza aiuto straniero resistere alle armi di Carlo d'Angiò, gli si sostituisse la signoria di Pietro d'Aragona, il quale fece il suo ingresso in Palermo il 4 settembre, trascorsi appena cinque mesi dagli inizi della sanguinosa riscossa. Anche in questo breve scritto sono notevoli l'accuratezza delle ricerche, l'acutezza delle considerazioni, l'efficacia dell'esposizione. Queste doti si manifestano però con evidenza anche maggiore nella monografia, sulla quale la Commissione intende di richiamare in modo speciale la vostra attenzione, e che è intitolata *La colonia saracena di Lucera e la sua distruzione* (Napoli, 1915, pp. 319). I Saraceni, stabilitisi a Lucera per volontà di Federico II di Svevia, costituivano alla fine del secolo decimoterzo l'unico gruppo arabo di qualche importanza superstite in Italia. L'Egidi, raccolti per il periodo dal 1285 al 1302 circa novecento documenti, per la maggior parte inediti e provenienti " dalla miniera inesauribile delle carte angioine conservate nell'Archivio di Stato di Napoli ", espone quale fosse l'ordinamento della colonia al tempo degli Svevi e nel periodo Angioino, quali i rapporti dei Saraceni col fisco regio; e con una serie di ricerche e di argomentazioni nuove, acute, persuasive, mostra come la distruzione della colonia voluta da Carlo II d'Angiò, e la susseguente confisca di tutti gli averi, e la dispersione e la vendita dei Saraceni, considerati come veri e proprii servi, si debbano spiegare, non tanto colle ragioni apertamente addotte dal re, quanto colle tristissime condizioni delle finanze angioine nel 1300 e col bisogno di ricorrere a mezzi estremi per provvedere in ogni modo. Lo studio dell'Egidi è così un contributo prezioso alla storia politica e civile del secolo XIII, e nel medesimo tempo

anche alla storia giuridica, la quale deve far tesoro di molte notizie concernenti la condizione delle persone, le magistrature, il diritto finanziario.

Dobbiamo ancora osservare, a proposito di questo scritto dell'Egidi, che le prime parti (fino a pag. 151) appaiono pubblicate nelle annate 36 e 37 dell'Archivio storico per le provincie napoletane, e quindi colle date del 1911 e 1912, mentre il volume, in cui sono raccolti gli estratti, porta le date del 1912 e 1915. In ogni modo, cade senza fallo nel triennio 1913-1915 la pubblicazione della parte maggiore e più importante del lavoro; e noi crediamo quindi che nulla osti a che sia preso da voi in considerazione.

Appartengono ancora alla storia medievale i due scritti inviati da Gino Scaramella, cioè l'edizione, fatta per i *Rerum italicarum scriptores*, del *Liber de Temporibus* e degli *Annales* di Matteo Palmieri, e una breve monografia intitolata *Firenze allo scoppio del tumulto dei Ciompi* (Pisa, 1914, pp. 78). Le due opere del Palmieri, cominciate a stampare in gennaio del 1906, furono pubblicate anteriormente al triennio 1913-1915: cade invece nel triennio la pubblicazione dell'indice cronologico e della prefazione, contenente ricerche abbastanza interessanti, specialmente sulle fonti del *Liber de Temporibus*. Interessante è pure la monografia pubblicata nel 1914, ma non tale, a parer nostro, da poter esser messa vantaggiosamente a confronto coi lavori dell'Egidi e con altri di cui diremo. Lo studio dello Scaramella deve servire come d'introduzione ad un futuro lavoro sul tumulto dei Ciompi. S'inizia quindi colla rassegna degli scrittori, che s'occuparono finora del famoso *tumulto* e colla dimostrazione dell'*utilità* di riprendere l'argomento in esame; e prosegue col tentativo di meglio lumeggiare gli antecedenti del *tumulto*, cioè coll'esposizione delle condizioni delle varie classi sociali in Firenze fra il 1343 e il 1378 e delle lotte combattute fra di esse *per il predominio nel governo*. Confessa lo Scaramella d'essersi servito di materiale già raccolto e già pubblicato da altri, ma confida che, se il lettore troverà nelle sue pagine *poche notizie veramente nuove, gli riesciranno invece nuove e definitive le conclusioni*. E nuove sono certo, almeno in parte; che siano definitive, ci pare molto dubbio. Così non sappiamo, per esempio, se si possa accettare la divisione proposta dall'autore della popola-

zione di Firenze *verso il 1378* in quattro classi, ch'egli vorrebbe indicare coi nomi di *ottimati, popolani maggiori, artigiani, salariati* (pag. 42-43); e ci pare soprattutto che non risponda nè allo stato di fatto nè allo stato di diritto l'aver posto nella prima classe nobili e popolani, e fra i popolani così gli *scioperati* come *i più ricchi ascritti alle Arti maggiori.* Ad ogni modo, ripetiamo, non ci pare che il lavoro dello Scaramella meriti d'esser' preferito o anche solo messo alla pari di altri da noi esaminati.

Veniamo all'evo moderno, anzi ad epoche molto vicine a noi, cogli ultimi tre lavori, di cui dobbiamo giudicare.

Nel volume di Silvio Pivano, *Albori costituzionali d'Italia* (Torino, 1913, pp. 471), l'opera dottrinaria e legislativa incarnatasi nelle costituzioni, che ressero i vari stati repubblicani sorti in Italia nel 1796, è dottamente ed abilmente messa in relazione col pensiero e colle aspirazioni italiane del periodo precedente, ed illustrata colla storia politica dell'epoca e col confronto delle idee e delle leggi francesi.

Amplissime furono le ricerche dell'Autore, non solo nelle fonti a stampa, ma in numerosi archivi italiani e in quelli di Parigi; importanti ci paiono le conclusioni; piacevole e corretta l'esposizione; notevoli, fra gli altri, i due ultimi capitoli, sulla *costituzione bolognese* e sul *famoso concorso* bandito il 27 settembre 1796 dall'Amministrazione generale della Lombardia sul tema: *Quale dei governi liberi meglio convenga alla felicità d'Italia.* Non esitiamo quindi a mettere l'opera di Silvio Pivano fra quelle, che riteniamo più meritevoli del premio Gautieri.

Del libro di Pietro Orsi, *Gli ultimi cento anni di storia universale* (1815-1915), è pubblicato per ora il solo primo volume, comprendente il periodo che va dal 1815 al 1870 (Torino, 1915). Se titoli precipui per gli aspiranti al premio Gautieri dovessero essere il numero minimo d'errori e d'omissioni, l'equanimità dei giudizi, l'ordine, la giusta proporzione, la buona forma letteraria, Pietro Orsi meriterebbe certo, per questo suo volume, d'essere messo in prima linea. Egli volle in sostanza far un buon libro di divulgazione a prò della gioventù e delle classi popolari; e, a parer nostro, riuscì nell'intento. Crediamo però che nel conferimento dei premi Gautieri si debba possibilmente dar la preferenza a contributi originali, a ricerche che abbiano condotto a qualche nuova scoperta scientifica, ad opere insomma di natura diversa da quella del libro esaminato.

Eugenio Passamonti studiò, in un volume di ben 479 pagine, *Il giornalismo giobertiano in Torino nel 1847-48* (Milano, Roma, Napoli, 1914). Partendo dal principio, dichiarato nella prefazione, che " nel 1847 e 1848 i giornali italiani furono dominati in gran parte dal pensiero di Vincenzo Gioberti „, egli passò cronologicamente in rassegna, brevemente commentandoli, i più importanti articoli politici dei giornali torinesi di quel tempo, e in modo speciale del " Mondo illustrato „ del Pomba, della " Concordia „ del Valerio e del " Risorgimento „ di Camillo Cavour.

Ora è lecito chiederci se, volendo far opera veramente organica, l'Autore non avrebbe dovuto occuparsi, anzichè del 1847 e 1848, del biennio 1848-1849, o almeno non escludere dalla sua trattazione i primi mesi del 1849, cioè quasi tutta l'epoca del Ministero Gioberti.

Il giornalismo piemontese del 1847 appena si può chiamare politico, tante erano le limitazioni, che ne vincolavano qualsiasi manifestazione un po' ardita. E che esso fosse, nel suo assieme, ispirato prevalentemente dalle opere del Gioberti, è affermazione, che ci sembra esagerata. Occorre infatti ricordare che Gioberti fin dal 1833 viveva in lontano esilio, e che nè il libro del *Primato* pubblicato nel 1843, nè quello del *Gesuita moderno*, pubblicato appunto nel 1847, bastarono a render le sue idee politiche popolari nella nostra regione. Per contro, dopo ch'egli, nell'aprile del 1848, ritornò in Piemonte e si diede alla vita pubblica, la sua influenza sul giornalismo piemontese fu non soltanto indiscutibile ma enorme, come ben presto apparve nelle fiere battaglie, che il " Mondo illustrato „ e la " Concordia „ impegnarono contro il " Risorgimento „.

L'Autore scrive, a pag. 439, che " il giornalismo giobertiano dopo due anni di vita [1847-1848] si poteva dir virtualmente finito „. A noi pare invece che, s'egli avesse continuato ad esaminarlo e a studiarlo nella sua azione a datare dalla fine del 1848, cioè da quando Gioberti divenne primo ministro, avrebbe fatto opera non meno utile di quella compiuta per il biennio indicato; e che sarebbe stato in ogni modo assai interessante mettere in chiara luce, per ognuna delle principali questioni dell'epoca, il quotidiano dissidio fra il dottrinarismo, rappresentato dai giornali giobertiani, e l'opportunismo illuminato e pratico rappresentato dal " Risorgimento „.

Così come è, la trattazione del Passamonti, che concerne un argomento specialissimo e, a parer nostro, non lo esaurisce, ci pare, sotto ogni aspetto, e pur rimanendo nel campo della storia moderna, meno importante di quella del Pivano.

Compiuta la rassegna delle opere sottoposte al suo esame, la Commissione fu concorde nel ritenere che due tra esse meritassero speciale considerazione; quella cioè di Pietro Egidi sulla colonia saracena di Lucera, e quella di Silvio Pivano intitolata *Albori costituzionali d'Italia.* Restava il grave còmpito di confrontare queste due opere, tanto diverse per lor natura quanto sono lontane fra di loro e diverse le epoche, alle quali si riferiscono; e di veder quindi se una di esse potesse con piena coscienza esser anteposta all'altra. La Commissione non seppe per altro convincersi dell'assoluta superiorità di uno qualsiasi dei due scritti; e perciò, a voti unanimi, deliberò di proporvi, egregi Colleghi, che il premio Gautieri per opere storiche pubblicate nel triennio 1913-1915 sia diviso, e assegnato, per una metà al Prof. Pietro Egidi, e, per l'altra metà, al Prof. Silvio Pivano.

Lorenzo Camerano, *Presidente*
Paolo Boselli
Gaetano De Sanctis
Alessandro Baudi di Vesme
Federico Patetta, *Relatore.*

Gli Accademici Segretari

Carlo Farrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Maggio 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Senatore D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Panetti e Parona Segretario.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Socio Guareschi presenta in omaggio una copia della conferenza, tenuta all'Associazione Chimica Industr. di Torino, su *La Chimica nella alimentazione.*

Il Socio Mattirolo offre, come omaggio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, l'opuscolo *Come sia possibile produrre in Italia il frumento necessario al consumo. Relazione e proposte.*

Il Segretario presenta: cinque Note inviate in omaggio all'Accademia dal Prof. A. Artom riguardanti la radiotelegrafia, la dirigibilità delle onde elettriche e la produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica; un volume pure inviato in omaggio dal Socio corr. Prof. G. Boffito, dal titolo *Bibliografia dell'Aria* (Lettera A).

Il Presidente ringrazia.

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Guareschi la sua Nota: *Una reazione generale dei Chetoni* (Comunicazione 1ª).

Il Socio Guidi la Nota 2ª dell'Ing. Giuseppe Albenga, *Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente.*

Il Socio Peano una Nota del Dott. Alberto Tanturri, *Della partizione dei numeri. Ambi, terni, quaterne e cinquine di data somma.*

Il Socio Panetti due Note: una dell'Ing. Filippo Burzio, *Formole razionali per il calcolo della derivazione dei proietti*, l'altra del Sig. Antonio Capetti, *Contributo allo studio dell'equilibramento delle masse rotanti* (Nota 1ª).

Il Socio Mattirolo, riferendosi ad una specie del genere *Gautieria* nuovamente scoperta in Val di Susa, comunica interessanti notizie sulle specie del genere che ricorda il benemerito nostro Gautieri, le quali verranno più tardi esposte in una comunicazione da inserirsi negli *Atti.*

Raccoltasi poscia la Classe in adunanza privata, procede alla elezione di un membro della Commissione per il premio Vallauri (Scienze fisiche, quadriennio 1915-1918) in sostituzione del compianto Socio Prof. L. Balbiano. Riesce eletto il Socio Prof. Senatore Enrico D'Ovidio.

LETTURE

Una reazione generale dei Chetoni.

Comunicazione I del Socio I. GUARESCHI.

In diverse Note e Memorie precedenti [1] ed in una Memoria: *Sintesi di composti piridinici e trimetilenpirrolici* [2] io ho dimostrato che moltissimi chetoni reagiscono più o meno rapidamente coll'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca o delle amine in maniera che una molecola di chetone collega e

[1] I. Guareschi, *Nuove ricerche sulla sintesi di composti piridinici e la reazione di Hantzsch*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", adunanza 21 febbraio 1897, vol. XXXII, e " Chem. Centralbl. ", 1897, (I), p. 927; E. Grande, *Azione dell'etere cianacetico sopra il metiletilchetone in presenza di ammoniaca*, ivi, t. XXXII; I. Guareschi e Grande, *Su una idroetildicianmetildiossipiridina*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1898, t. XXXIII, e " Chem. Centralbl. ", 1898, (II), p. 544; Id. Id., *Sintesi di derivati glutarici e trimetilenici*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1898, t. XXXIV, e " Chem. Centralbl. ", 1899, (II), p. 439; I. Guareschi, *Sintesi di composti piridinici dagli eteri chetonici coll'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca e delle amine*, " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1895, (II), t. XLVI; Memoria II, ivi, 1905. I lavori miei sui derivati piridinici colle aldeidi e l'etere cianacetico sono ben riassunti dal Brühl nel *Lehrb. d. org. Chem.* di Roscoe e Schorlemmer, 5ª parte, vol. VII, p. 272 e seg. sotto il titolo generale di *reazione Guareschi*.

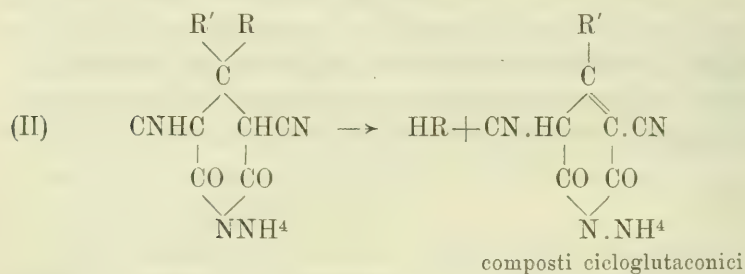
[2] I. Guareschi, " Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1901, (II), t. L, pp. 235-288, e " Chem. Centralbl. ", 1901, (I), p. 577. Questa mia comunicazione e quella che seguirà possono riguardarsi come la continuazione della mia Memoria del 1901.

chiude due molecole di etere cianacetico e forma i derivati ciclodicianglutarici o piperidinici della forma generale:

```
              R   R'
               \ /
                C
               / \
(I)     CN.HC     CH.CN
            |     |
            CO   CO
              \ /
              NR''
```

essendo R e R' = CH^3, C^2H^5, $CH^2C^6H^5$, ecc.; e R'' = H, CH^3 ecc. Dai quali:

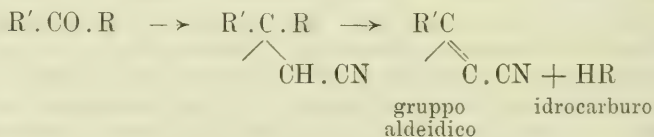
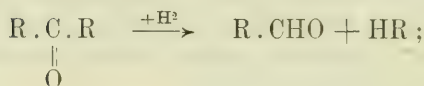
1° per eliminazione di un idrocarburo saturo RH si passa ai composti *cicloglutaconici*:

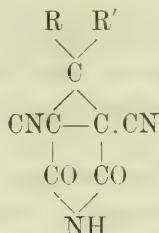
```
          R'  R                        R'
           \ /                         |
            C                          C
           / \                        / \\
(II)   CNHC   CHCN  -->  HR + CN.HC     C.CN
          |    |                 |      |
          CO  CO                 CO   CO
            \ /                    \ /
           NNH4                   N.NH4
                           composti cicloglutaconici
```

che si ottengono anche per l'azione delle aldeidi sull'etere cianacetico in presenza dell'ammoniaca. Questa reazione è assai importante, perchè dimostra la scissione della molecola chetonica in due, una di aldeide e l'altra di idrocarburo:

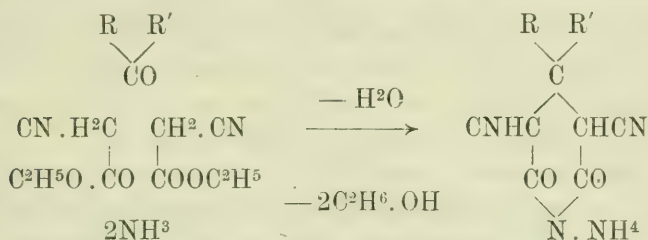
```
R'.CO.R  -->  R'.C.R   -->  R'C
               / \          / \\
                 CH.CN          C.CN + HR
                            gruppo      idrocarburo
                           aldeidico
```

ossia:

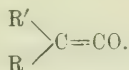
$$R.C.R \xrightarrow{+H^2} R.CHO + HR;$$

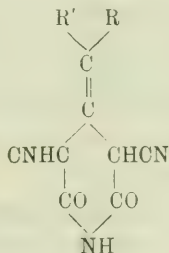
```
R.C.R
  ||
  O
```

2° oppure per eliminazione di H^2 da (I) si passa ad un derivato *trimetilenico* o meglio *trimetilenpirrolico*:

```
      R   R'
       \ /
        C
       / \
    CNC—C.CN
       |  |
      CO  CO
       \ /
        NH
```

La reazione generale fra i chetoni e l'etere cianacetico avviene nel modo seguente:

```
        R   R'                              R   R'
         \ /                                 \ /
         CO                                   C
                          — H²O              / \
  CN.H²C    CH².CN      ———————→        CNHC     CHCN
       |    |                              |     |
C²H⁵O.CO    COOC²H⁵                       CO     CO
                       —2C²H⁶.OH            \   /
        2NH³                                N.NH⁴
```

Questa reazione avviene anche con molti ciclochetoni ([1]).

([1]) I. Guarèschi, *Alcuni nuovi derivati dei cicloesanoni*, "Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino", 1911, t. XLVI. È assai probabile che questa mia reazione possa essere estesa anche ai *cheteni*, cioè a quei composti scoperti da Staudinger e che si rappresentano con:

$$\begin{matrix} R' \\ R \end{matrix} \Big> C{=}CO.$$

Non ho ancora potuto verificare se l'esperienza corrisponde. I derivati (probabilmente *colorati*) che se ne otterrebbero:

```
      R'  R
       \ /
        C
        ||
        C
       / \
   CNHC   CHCN
      |   |
     CO   CO
       \ /
        NH
```

sarebbero non privi di interesse sotto molti riguardi.

Le aldeidi reagiscono egualmente bene coll'etere cianacetico, anzi talora con maggiore energia, e dànno i composti *ciclodicianglutaconici* (II).

Molti dei composti (I) forniti dai chetoni, in particolari condizioni si decompongono, come fu dimostrato con numerose esperienze dando dei carburi saturi C^nH^{2n+2} oppure C^nH^{2n-8}.

La funzione chetonica è forse la più importante funzione organica, come quella che dà luogo ad un maggior numero di condensazioni e di collegamenti molecolari e che quindi serve bene per reazioni sintetiche.

È noto che i chetoni si combinano direttamente coi bisolfiti alcalini dando dei composti $\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>C<\!\!\begin{matrix}OH\\SO^3Me.\end{matrix}$ Non tutti i chetoni però si combinano coi bisolfiti e dalle ricerche sino ad ora note sembra che la condizione principale perchè il composto chetonico si combini coi bisolfiti sia questa: che contenga il gruppo $—CH^2.CO.CH^3$ oppure $—CH^2.CO.CH^2CH^3$.

Molto generale è pure il modo di agire dell'etere cianacetico ed io anzi ho osservato che quei chetoni i quali si combinano coi bisolfiti reagiscono anche coll'etere cianacetico, e che di più, taluni di quei chetoni che non si combinano coi bisolfiti reagiscano invece coll'etere cianacetico.

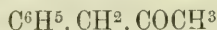
Dunque questa mia nuova reazione generale della funzione chetonica è ancor più generale di quella coi bisolfiti.

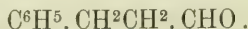
Al termine della Memoria del 1901 ho detto che io facevo delle esperienze con altri chetoni, ed invero questa reazione generale fu estesa ad altri chetoni per vedere:

1° Quali siano i chetoni che veramente non reagiscono o reagiscono incompletamente coll'etere cianacetico e quale relazione vi sia col modo di comportarsi verso i bisolfiti.

2° Come si scompongono i nuovi composti nel senso di fornire i carburi C^nH^{2n+2} e riuscire a chiarire quel curioso, anzi straordinario, modo di decomporsi.

Questa reazione coll'etere cianacetico può servire a distinguere se un dato composto sia piuttosto un chetone od un'aldeide, quale è il caso di:

$$C^6H^5.CH^2.COCH^3$$

e l'isomero:

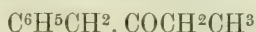
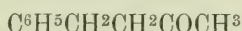
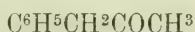
$$C^6H^5.CH^2CH^2.CHO.$$

Alla fine di questo lungo lavoro sull'etere cianacetico che ho in gran parte pubblicato, dal 1892 al 1905, dimostrerò la grande importanza dell'etere cianacetico nella sintesi di composti organici e nel dar origine a composti con gruppi atomici più o meno mobili.

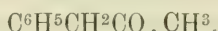
Nel lavoro pubblicato nel 1901 ho esperimentato con i chetoni seguenti: acetone, metiletilchetone, metilpropile e metilisopropilchetone, metilbutil e metilisobutilchetone, metiltrimetiletilchetone o pinacolina, metilessilchetone n. e metilisoessilchetone, metileptenone, metilnonilchetone, dietilchetone, etilpropilchetone, dipropilchetone e propilisossilchetone, metilfenilchetone, metilfenetilchetone, ed ho fatto un breve cenno sul benzilidenacetone e sul dibenzilchetone, intorno ai quali dovevo occuparmi in seguito.

Parte I.

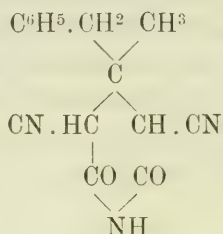
Chetoni $C^nH^{2n-7}.(CH^2)^m.CO.(CH^2)^m CH^3$.

In questa comunicazione dirò dei risultati ottenuti con i chetoni che hanno per tipo il metilbenzilchetone $C^6H^5CH^2COCH^3$ e suoi omologhi e che si possono rappresentare con C^nH^{2n-7}. $(CH^2)^m$. CO . $(CH)^m$. CH^3. Ne ho studiati sette:

$C^6H^5CH^2COCH^3$
$C^6H^5CH^2CH^2COCH^3$
$C^6H^5CH^2.COCH^2CH^3$
$C^6H^5CH^2CH^2COCH^2CH^3$
$C^6H^5CH^2COCH^2CH^2CH^3$
$C^6H^5CH^2.COCH(CH^3)^2$
$C^6H^5CH^2.COCH^2CH(CH^3)^2$.

Queste ricerche risalgono al 1907-1908 e furono in parte fatte o rifatte nel 1913. Fui coadiuvato in queste ultime ricerche dal mio assistente d'allora signorina dott.ª Maria Clotilde Bianchi, che volentieri ringrazio.

1) Fenilacetone o Metilbenzilchetone:

$$C^6H^5CH^2CO.CH^3.$$

Metilbenzildicianglutarimide o γγ **metilbenzil** ββ′**dician-αα′diossipiperidina:**

```
C6H5.CH2 CH3
        \/
        C
       /\
CN.HC    CH.CN
    |
    CO  CO
      \/
      NH
```

Il chetone impiegato proveniva dalle fabbriche D.r H. König di Leipzig-Plagwitz, e Poulenc di Parigi. La porzione adoperata bolliva 214-215° a 742 mm. (1); fornisce un composto cristallino col bisolfito di sodio. Si fecero reagire 13,4 (1 mol.) di chetone con 24 cm³ di etere cianacetico ed alla miscela si aggiunsero 56 cm³ di ammoniaca alcoolica all'11,5 %. Si ha poco o nessun sviluppo di calore. Il liquido si colora poco, e dopo circa 1 a 2 ore si rapprende in massa cristallina. Generalmente si faceva la preparazione adoperando ogni volta 1/2 mol. di acetone, cioè 6,7 gr. Si lascia a sè la massa cristallina per 24 a 36 ore, poi si diluisce con acqua, si estrae con etere per togliere il chetone che non aveva reagito ed il liquido limpido si precipita con acido cloridrico.

Si può anche raccogliere la massa cristallina del sale ammonico su filtro alla pompa, lavarlo con poco alcool a riprese, poi con etere, asciugare e dal sale ammonico sciolto in acqua precipitare la metilbenzilglutarimide con acido cloridrico. Il prodotto greggio fonde a 250°-255° e dopo ricristallizzazione dall'alcool bollente, al 60 %, o anche più concentrato, fonde costantemente a 255°-257°.

---

(1) Secondo Senderens bolle a 266°,5 sotto 755 mm.

Il prodotto fusibile a 255°-257° riscaldato anche sopra 100° non perde di peso ed analizzato diede i risultati seguenti:

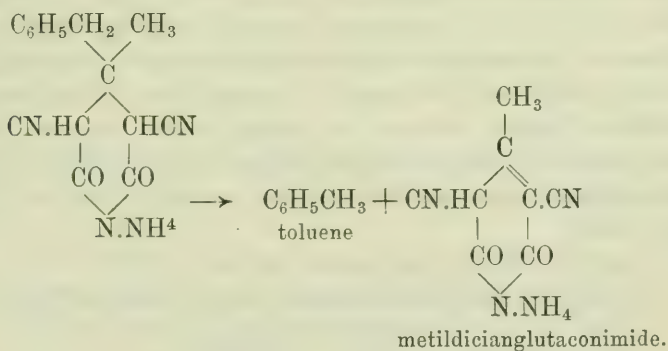
I. Gr. 0,1482 diedero 0,3676 di CO^2 e 0,0718 di H^2O.
II. Gr. 0,1430 diedero 20 cm^3 di N a 18° e 740 mm.
III. Gr. 0,1277 fornirono 0,3172 di CO^2 e 0,0585 di H^2O.

Da cui la composizione centesimale:

	trovato			calcolato per $C^{15}H^{13}N^3O^2$
	I	II	III	
C =	67,65	—	67,5	67,41
H =	5,38	—	5,3	4,87
N =	—	15,73	—	15,73.

La benzilmetildicianglutarimide cristallizza dall'alcool in begli aghi o prismi brillanti, pochissimo solubili nell'acqua e nell'etere. Scaldata in piccola quantità, si sublima senza quasi lasciare residuo carbonoso. La sua soluzione acquosa ha reazione acida.

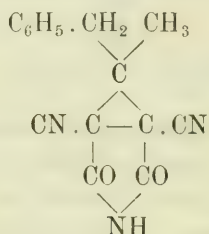
Il suo *sale di ammonio* $C^{15}H^{12}N^3O^2.NH^4$ è cristallino, solubile nell'acqua. Benchè con difficoltà, la soluzione acquosa di questo sale si decompone in *toluene* e *dicianmetilglutaconimide*:

```
C6H5CH2  CH3
     \  /
      C                                        CH3
     / \                                        |
CN.HC   CHCN                                    C
   |     |                                     / \\
   CO   CO                                        
     \  /     —>   C6H5CH3 + CN.HC    C.CN
     N.NH4         toluene           |      |
                                     CO    CO
                                       \  /
                                       N.NH4
                               metildicianglutaconimide.
```

Ed infatti la soluzione di questo sale dopo molti giorni intorbida e manda odore identico a quello del toluene e deposita degli aghi incolori, che, ricristallizzati dall'acqua bollente, hanno tutti i caratteri del sale di ammonio della metildicianglutaconimide già ottenuta da molti anni in questo laboratorio; e che sia veramente questo il composto che si forma, lo dimostrò anche un dosamento di acqua e di azoto:

Gr. 0,0777 diedero a 100° gr. 0,0123 di acqua, cioè H_2O % = 15,8, mentre per $C_8H_8N_4O_2 + 2H_2O$ si calcola 15,7.

Gr. 0,0634 di sostanza secca a 100° diedero 16 cc. di N a 17° e 748^{mm}, cioè N % = 28,8 calcolato per $C_8H_8N_4O_2$ = = 29,1 %. Il toluene fu separato in piccola quantità per determinarne il punto di ebollizione, che fu trovato vicino a 106°. Non era ancor puro.

3.3 metilbenzil 1.2 diciantrimetilenimide:

```
C6H5.CH2 CH3
       \/
       C
      /\
CN.C — C.CN
   |    |
   CO  CO
    \/
    NH
```

La benzilmetildicianglutarimide assorbe il bromo e dà un derivato *bibromurato*. Dibattendo la metilbenzildicianglutarimide con 4 molec. di bromo allo stato di acqua di bromo, oppure sciolto in acido acetico al 50 %, a poco a poco il bromo reagisce ed il liquido si decolora; quando si è aggiunto un lieve eccesso di bromo e che questo non viene più assorbito, allora si ha un derivato *bibromurato*, il quale, fatto bollire con alcool, e meglio insieme anche ad un poco di acido formico, perde rapidamente il bromo e cristallizza la nuova sostanza bellissima, che, ricristallizzata dall'alcool, ha punto di fusione costante 266°-268°.

Questo prodotto, sottoposto all'analisi, diede:

I. Gr. 0,1074 fornirono 15,1 cm³ di N a 17° e 740 mm.

II. Gr. 0,1166 diedero 0,2886 di CO^2 e 0,0424 di H^2O.

III. Gr. 0,1277 diedero 0,3172 di CO^2 e 0,0585 di H^2O.

Da cui

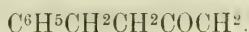
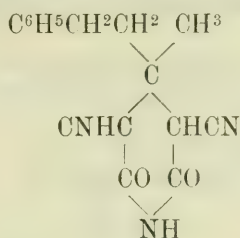
	trovato			calcolato per $C^{15}H^{11}N^3O^2$
	I	II	III	
C =	—	67,50	67,7	67,92
H =	—	4,54	5,1	4,15
N =	15,84	—	—	15,85.

Il derivato bibromurato si può sbromurare anche agitandolo con soluzione satura di bisolfito sodico.

2) **Metilfenetilchetone** o **benzilacetone**:

$$C^6H^5CH^2CH^2COCH^3.$$

Metilfenetildicianglutarimide:

```
C6H5CH2CH2  CH3
          \/
          C
         /\
    CNHC   CHCN
       |    |
       CO  CO
         \/
         NH
```

Questo composto fu già da me descritto nella Memoria citata nel principio di questo lavoro.

Il nome di *benzilacetone* per questo chetone è improprio e può farlo confondere col fenilacetone $C^6H^5CH^2COCH^3$, che pure è denominato *benzilchetone.*

Questo chetone si combina facilmente coi bisolfiti e reagisce benissimo anche coll'etere cianacetico.

La metilfenetildicianglutarimide è isomera col composto derivante dall'etilbenzilchetone e fu già da me studiata nella Memoria citata del 1901 pag. 272.

Il metilfenetilchetone era stato preparato da me e da Conti per l'azione della potassa alcoolica sull'etere benzilacetacetico e bolliva a 233°-235° (1).

3) **Etilbenzilchetone** (*feniletilchetone, fenilbutanone 2.*):

$$C^6H^5CH^2.CO.CH^2CH^3.$$

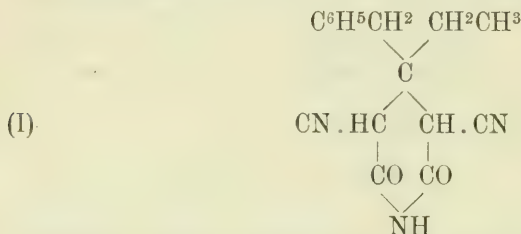
L'etilbenzilchetone è isomero con il metilfenetilchetone $C^6H^5CH^2CH^2CO.CH^3$, il quale si combina coi bisolfiti. Questa isomeria nel caso mio è interessante per stabilire come si com-

---

(1) " Chem. Centralbl. „, 1901, (I), p. 581.

portino i due chetoni coll'etere cianacetico. Il metilfenetilchetone o benzilchetone fu già da me studiato nel 1901 e dà un abbondante prodotto di condensazione, mentre l'etilbenzilchetone nè dà molto meno. Da 20 gr. di metilfenetilchetone ottenni 35 gr. di prodotto e da 14,8 gr. di etilbenzilchetone solamente 5,4 grammi.

Etilbenzildicianglutarimide (o γγ *etilbenzil* ββ'*dician* αα'*diossipiperidina*):

```
                 C6H5CH2  CH2CH3
                       \/
                       C
                      /\
(I)            CN.HC    CH.CN
                    |    |
                    CO  CO
                     \/
                     NH
```

Isomero colla *metilfenetildicianglutarimide*.

L'etilbenzilchetone fu ottenuto la prima volta da Popow [1] dal cloruro di α toluile con zincodimetile. Secondo Popow non si combina col bisolfito sodico, nè col bisolfito di ammonio. Il chetone da me adoperato era stato preparato dalla Casa Poulenc di Parigi e questo prodotto si combinava con una soluzione molto concentrata di bisolfito (d. = 1,29 e 1,34), dando un bel composto cristallino.

Secondo Popow (*Ber.*, V, p. 501) questo chetone non si combina coi bisolfiti; io invece ho sempre ottenuto un bel composto cristallino con soluzione di bisolfito sodico, tanto preparato sciogliendo il bisolfito nell'acqua, quanto facendo passare in eccesso il gas solforoso nella soluzione di carbonato sodico.

Gr. 14,8 di etilbenzilchetone furono mescolati con 22 cm³ di etere cianacetico e 65 cm³ di ammoniaca alcolica all'11,5 %. Separata la cianacetamide, diluito il liquido acquoso con acqua, e precipitato con acido cloridrico, si ottengono subito 5,4 gr. di prodotto bianco, che greggio fonde a 220°-225° e che anche ricristallizzato più volte dall'alcool fonde sempre a 222°-226°.

---

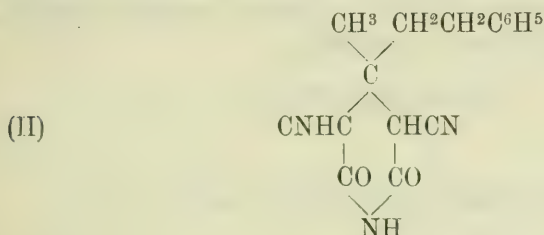
[1] *Berichte*, V, p. 501.

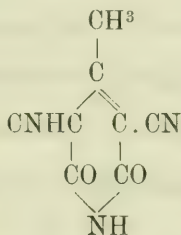
I. Gr. 0,1230 fornirono 16,1 cm^3 di N a 16°,5 e 751 mm.
II. Gr. 0,1196 diedero $CO^2 = 0,2990$ e $H^2O = 0,0581$.

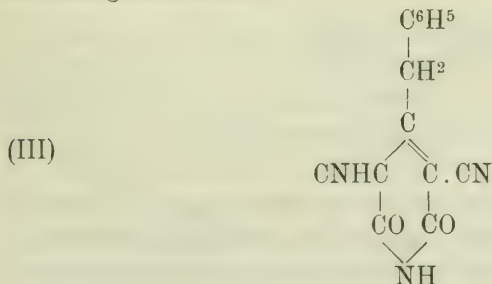
Da cui:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C^{16}H^{15}N^3O^2$
C =	—	68,18	68,33
H =	—	5,44	5,34
N =	14,94	—	15,04.

Il composto ottenuto è dunque isomero con il derivato dal *metilfenetilacetone* $C^6H^5CH^2CH^2COCH^3$, che ho ottenuto nel 1901:

```
            CH³  CH²CH²C⁶H⁵
              \ /
               C
              / \
(II)     CNHC    CHCN
            |    |
            CO  CO
              \/
              NH
```

Questo (II), neutralizzato con ammoniaca, si decomponeva in etilbenzene e metildicianglutaconimide.

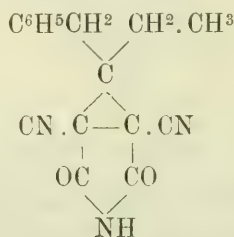
```
              CH³
              |
              C
             / \\
        CNHC    C.CN
           |    |
           CO  CO
             \/
             NH
```

L'isomero descritto ora (I) deve scomporsi in etano e benzildicianglutaconimide:

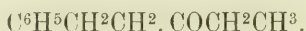
```
              C⁶H⁵
              |
              CH²
              |
              C
             / \\
(III)   CNHC    C.CN
           |    |
           CO  CO
             \/
             NH
```

Oppure in *toluene* e etildicianglutaconimide. Il composto III dovrebbe essere identico col derivato dall'*aldeide fenilacetica.*

Derivato bromurato:

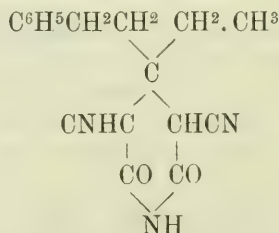
La etilbenzildicianglutarimide assorbe il bromo. Sospesa la sostanza in acido acetico glaciale e trattata con 2 molec. di bromo in soluzione acquosa, si ha il prodotto bromurato bianchissimo in quantità teorica (da 1 gr. si hanno gr. 1,5).

Questo poi, sciolto in alcool a 90° e fatto bollire con acido formico al 50 %, perde tutto il bromo e dà pressochè la quantità teorica (0,8 invece di 0,9) di un bel prod. cristallizzato bianchissimo, che fonde a 226°-228°. Questo prodotto non fu analizzato, ma senza dubbio deve essere:

```
C6H5CH2  CH2.CH3
      \  /
       C
      / \
CN . C — C . CN
     |    |
     OC   CO
      \  /
       NH
```

4) **Etilfenetilchetone** o **fenilpropione**:

$$C^6H^5CH^2CH^2.COCH^2CH^3.$$

Pare che non si combini coi bisolfati.

Etilfenetildicianglutarimide o γγ **etilfenetil** ββ′**dician-αα′diossipiperidina**:

```
C6H5CH2CH2  CH2.CH3
         \  /
          C
         / \
     CNHC   CHCN
       |     |
       CO   CO
         \  /
          NH
```

Gr. 8,1 di fenilpropione furono mescolati con 11,3 di etere cianacetico e poi 33 cm³ di ammoniaca alcoolica all'11,5 %. Dopo 36-48 ore si raccoglie la cianacetamide, si lava con alcool

e poi il liquido alcoolico diluito con acqua ed esaurito con etere, viene precipitato con acido cloridrico. Si ottiene 2,6 gr. di prodotto. In un'altra operazione da 16,2 di chetone si ottengono 4,1 gr. di prodotto.

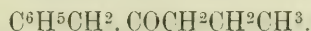
Come si scorge, il prodotto è in piccola quantità. Non ho esaminato quali altre sostanze si formano.

La sostanza ricristallizzata fondeva a 181°-183°.

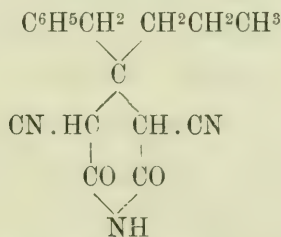
I. Gr. 0,1763 (secca a 100°) fornirono 24 cm³ di N a 23°,5 e 739 mm., cioè:

II. Gr. 0,1075 fornirono 13,2 cm³ di azoto a 13°,5 e 749 mm.

	trovato		calcolato per $C^{17}H^{17}N^3O^3$
	I	II	
N °/₀	14,9	14,25	14,4

5) **Propilbenzilchetone** (o *fenil-1-pentanone*):

$$C^6H^5CH^2.COCH^2CH^2CH^3.$$

Propilbenzildicianglutarimide o **γγpropilbenzilββ'diciananα'diossipiperidina:**

```
C6H5CH2  CH2CH2CH3
      \/
      C
     /\
CN.HC  CH.CN
   |    |
   CO  CO
    \/
    NH
```

Gr. 16,2 di propilbenzilchetone, bollente a 237°-240°, furono mescolati con gr. 22,6 di etere cianacetico ed al liquido, appena giallognolo, furono aggiunti 60-65 cm³ di ammoniaca alcoolica all'11,5 °/₀. Il liquido diventa subito molto giallo. Dopo 48 ore si raccoglie su filtro la cianacetamide che era cristallizzata, e lavo con alcool; si diluisce il liquido ammoniacale con acqua, si esaurisce con etere e si precipita con acido cloridrico. Si ottengono 3,4 gr. di prodotto cristallino bianco.

In altra operazione coll'etere cianacetico metilico si ha la stessa quantità di prodotto.

La sostanza grezza fonde a 215°-220° e dopo ricristallizzazione dall'acqua fonde a 225°.

Gr. 0,1404 diedero 18,1 cm³ di N a 18° e 733 mm.

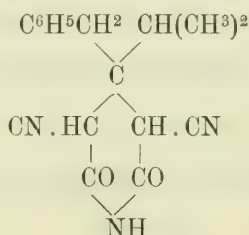
Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{17}H^{17}N^3O^2$
N °/₀	14,3	14,2

Anche di questo non ho creduto necessario di preparare nè il derivato *bibromurato* (che lo dà benissimo), nè la *3.3-propilbenzil. 1.2-diciantrimetilenimide* corrispondente.

6) **Isopropilbenzilchetone** (o *fenil 1.metil.3-butanone 2*):

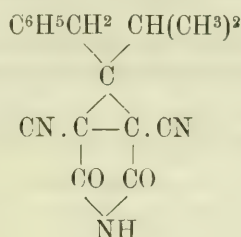
$C^6H^5CH^2.COCH(CH^3)^2$:

Benzilisopropildicianglutarimide o γγ *benzilisopropil-ββ' dician αα' diossipiperidina*:

Questo chetone, della fabbrica Poulenc, non dà molto prodotto coll'etere cianacetico. Però dopo ricristallizzazione dall'alcool si ha un bel composto, che fondeva a 242°-245°, ma che dopo ripetute cristallizzazioni dall'alcool a 60 °/₀ cristallizzava in aghi incolori fusibili a 248°,5-249°,5. Un dosamento di azoto:

Gr. 0,1143 diedero 16 cm³ di N a 26°,5 e 745 mm., cioè:

	trovato	calcolato per
N °/₀	15,1	14,3

Il composto sciolto in acido acetico glaciale e trattato col bromo, questo viene assorbito ed il prodotto bromurato trattato con alcool e acido formico al 50 $^{0}/_{0}$ si sbromura facilmente, dando un bel composto cristallino incoloro fusibile a 255°-257°, molto probabilmente:

$$\begin{array}{c} C^6H^5CH^2 \quad CH(CH^3)^2 \\ \diagdown \; \diagup \\ C \\ \diagup \; \diagdown \\ CN.C - C.CN \\ | \qquad | \\ CO \quad CO \\ \diagdown \; \diagup \\ NH \end{array}$$

ma che non fu analizzato.

7) Benzilisobutilchetone:

$$C^6H^5CH^2.CO.CH^2.CH(CH^3)^2.$$

Questo chetone, trattato come i precedenti, fornisce coll'etere cianacetico una piccolissima quantità di prodotto di condensazione. Però il prodotto è cristallino e dall'alcool si ha in bellissimi aghi fusibili a 222°-223°. Non ne fu continuato lo studio.

Questo chetone pare non si combini coi bisolfiti.

Contributo allo studio dell'equilibramento delle masse rotanti.

Apparecchi moltiplicatori dell'ampiezza delle oscillazioni nel fasometro stroboscopico dell'ing. C. L. Ricci.

Nota I di ANTONIO CAPETTI.

1. Premesse. — In una Memoria precedente dell'Accademia delle Scienze di Torino (1) l'ing. C. L. Ricci, rilevati i gravi inconvenienti ai quali dà luogo nell'esercizio delle macchine un difetto di equilibramento delle masse rotanti a grande velocità, anche quando esso non sia di natura tale da potersi rilevare colla correzione statica, svolgeva una teoria più completa ed esatta degli equilibratori. Con questo nome si indicano quegli apparecchi sperimentali che permettono alla massa rotante di compiere oscillazioni nel piano orizzontale passante pel loro asse, essendo provvisti di sopporti capaci di reagire elasticamente a tali oscillazioni, senza opporre sensibili resistenze passive.

Dallo studio del moto che risulta per effetto del sistema elastico, derivante dai legami dell'albero, e del sistema d'inerzia, derivante dalle proprietà d'inerzia della massa rotante, si ricava il sistema delle forze perturbatrici, e si può allora procedere alla loro compensazione. E poiché si dimostra che questo moto risulta dalla sovrapposizione di due moti oscillatori forzati intorno a due assi verticali incidenti all'asse di rotazione nei *nodi*, per conoscere il moto occorre poter misurare di ciascuna oscillazione *fase*, *ampiezza*, *centro* (punto nodale). — Nella maggioranza dei casi poi (sempre come dimostra l'ing. Ricci) i due

(1) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „ (Anno 1915-16). Adunanze del 28 nov. e 12 dic. 1915 (Vol. LI, disp. 2ª e 5ª).

moti componenti si possono studiare separatamente, imprimendo alla massa in esame la corrispondente velocità di risonanza, facilmente determinabile sperimentalmente per tentativi.

Per effettuare queste misure il Ricci ha ideato il suo *fasometro stroboscopico*, in cui, traguardando un indice verticale fisso ad uno dei sopporti oscillanti, attraverso le feritoie a spirale d'Archimede d'un disco calettato a un'estremità dell'albero, si legge direttamente sul disco la fase e l'ampiezza delle oscillazioni. La fase per mezzo della distanza da un'origine fissa del punto d'intersezione delle due sinusoidi imagini apparenti dell'indice, e l'ampiezza misurando la larghezza di un ventre su scala d'indici paralleli al fondamentale e com'esso deformati per effetto stroboscopico. Ciò perché le sinusoidi osservate altro non sono che il diagramma della legge del moto vibratorio.

2. Cause d'imprecisione delle letture. — Il metodo sopra accennato dà senza dubbio risultati superiori a quelli di altri apparecchi usati per lo stesso scopo, però presenta nelle letture alcune cause d'incertezza dovute essenzialmente:

1° allo spessore non indifferente delle immagini dell'indice fondamentale e della scala d'indici annessa;

2° all'angolo d'intersezione delle due immagini, troppo acuto quando le ampiezze del moto sono abbastanza piccole.

Si aggiunge come causa concomitante la necessità di mantenere il passo della spirale entro limiti ristretti per non peggiorare la seconda condizione; il che porta ad avere divisioni della scala degli angoli piccole di fronte all'angolo rappresentato, sicché difficilmente si possono evitare errori dell'ordine di $5 \div 10°$ e talora anche maggiori. Si aggiunge ancora la possibilità che per non perfetta centratura del disco si abbiano perturbazioni nella chiara visione della scala, di per sè piccole, ma notevoli a fronte della ridotta scala degli angoli.

La prima causa d'imprecisione si presenta in sè difficilmente riducibile, se non forse con qualche metodo ottico a cui accennerò in seguito: se ne può però diminuire l'importanza riducendo la seconda, che è indubbiamente la principale. Un mezzo che subito si presenta per ridurre questa, consiste nell'amplificare in un conveniente rapporto n gli spostamenti τ del moto oscillatorio. Però, affinché la natura della curva secondo

cui l'indice appare per effetto stroboscopico (e che per brevità diremo: *curva-indice*) non fosse alterata e si potessero quindi estendere senz'altro alla disposizione modificata le proprietà dimostrate pel caso in cui indice e disco abbiano vibrazioni sincrone ed uguali, bisognerebbe che nello stesso rapporto n fossero contemporaneamente amplificate le vibrazioni del disco e dell'indice. Ora se questa moltiplicazione si presenta per l'indice facilmente e in vario modo realizzabile, gravi difficoltà si incontrerebbero pel disco, che deve sempre rotare solidalmente coll'albero. Quindi, accettata l'idea di amplificare soltanto le vibrazioni dell'indice e lasciare quelle del disco inalterate, rimane da esaminare se l'apparecchio in tali condizioni sia utilizzabile e con quali vantaggi.

3. **La deformazione della curva-indice.** — Amplificando solo le vibrazioni dell'indice, la *curva-indice* non rappresenta piú il diagramma della legge del moto; restano però inalterate le sue proprietà agli effetti della lettura dell'angolo, fase del moto forzato, e della sua ampiezza.

Infatti nella disposizione attuale dell'ing. Ricci la sinusoide taglia la retta, traccia del piano verticale passante per l'asse, sul piano del disco, in un punto che è l'intersezione dell'indice nella sua posizione media colla spirale nella simultanea posizione. La proprietà della proporzionalità fra angoli di rotazione del disco e ascisse contate sull'indice, sussiste in quanto questo si trovi a costituire un raggio della spirale; e questo precisamente si verifica nella disposizione attuale pel fatto che in essa l'indice e il disco si spostano di conserva. Invece, nella disposizione che qui si suggerisce, gli spostamenti dell'indice sono moltiplicati per il rapporto n e quindi in generale l'indice non passerà per il centro della spirale. Le ascisse non saranno dunque piú semplicemente proporzionali all'angolo di rotazione, ma dipenderanno da esso secondo una legge piú complessa (intersezione d'una spirale d'Archimede con una retta qualunque), che definirà appunto la natura della curva, di tipo solo grossolanamente sinoidale, che per effetto stroboscopico si osserva sul disco rotante insieme coll'albero.

Però siccome le traslazioni τ (contate a partire dalla posizione media) vengono semplicemente moltiplicate per n, quando

$\tau = 0$ anche $n\tau = 0$: in questo istante si verifica dunque ancora che l'indice costituisce un raggio della spirale e sussistono tutte le proprietà valide in questo caso.

Siccome poi lo stesso ragionamento può ripetersi per l'altra spirale rotata rispetto alla prima di 180°, è evidente senza bisogno d'altra dimostrazione che il punto d' intersezione apparente delle due curve coincide coll' intersezione della prima coll'asse.

Questo per quanto riguarda la misura della fase del moto. Circa all' ampiezza, questa non è altro che metà dell' escursione completa dell' indice da una posizione estrema all'altra e quindi risulterà solo moltiplicata per lo stesso numero n comune a tutti gli spostamenti orizzontali dell'indice: comunque si deformi la curva-indice nella striscia compresa fra le verticali estreme posizioni dell' indice, la sua ordinata massima non può variare, e la lettura si potrà fare ancora col metodo dell'ingegnere Ricci mediante la scala d'indici deformati secondo curve che è facile vedere come non siano altro che la curva fondamentale i cui punti abbiano subíto una traslazione lungo un arco di spirale di proiezione orizzontale eguale alle singole divisioni della scala (fig. 1).

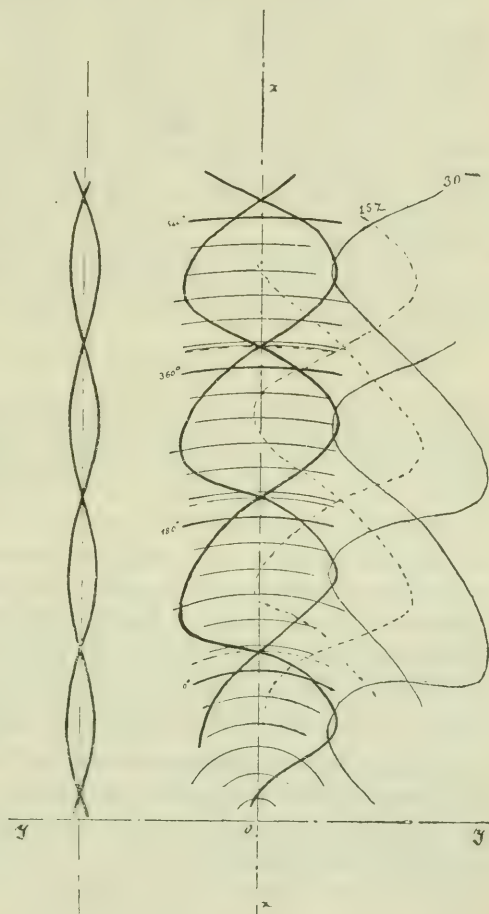



Fig. 1.

Dimostrata cosí l'estensione delle due proprietà fondamentali della curva (1), sarebbe inutile indagare ulteriormente la forma che questa assume nei singoli casi: è evidente che essendo aumentata l'ampiezza, a parità di periodo, l'angolo d'intersezione delle due curve sarà migliorato: si potrà anzi rinunciare a una parte del beneficio portato da questo aumento d'angolo, per aumentare invece, specialmente quando le oscillazioni sono di media ampiezza, il passo delle spirali e quindi ridurre proporzionatamente l'importanza della prima causa d'errore citata, come pure quella dipendente dall'eccentricità del disco. Ciò potrebbe solo dar luogo alla complicazione pratica dell'impiego di due dischi diversi a seconda dell'entità delle perturbazioni.

È pure evidente che le letture delle ampiezze si potranno eseguire con maggiore approssimazione, essendo l'errore diviso per n.

Credo però conveniente un esame, per quanto solo sintetico, piú accurato della forma delle curve perché, la loro deviazione dalla forma sinoidale, nonché nuocere, può favorire la lettura della fase nel senso di intersecare l'asse sotto angolo

---

(1) Tutte le proprietà indicate si possono dedurre analiticamente. Sia $\rho = K\varphi$ l'equazione della spirale: il suo polo compie gli spostamenti oscillatori τ paralleli a y, e il raggio verticale, origine degli argomenti, ruota con velocità angolare costante ω. Quindi, riferendo la spirale all'asse orizzontale e all'asse verticale del disco nella sua posizione media, come assi cartesiani fissi, l'equazione sarà: $\sqrt{x^2+(y-\tau)^2}=K\left\{\text{arc sen}\frac{y-\tau}{\sqrt{x^2+(y-\tau)^2}}-\omega t\right\}$. Le coordinate delle intersezioni della spirale colla retta verticale (indice) di equazione $y=n\tau$ [1]) sono allora espresse dalle equazioni [1]) e $\sqrt{x^2+\tau^2(n-1)^2}= K\left\{\text{arc sen}\frac{\tau(n-1)}{\sqrt{x^2+\tau^2(n-1)^2}}-\omega t\right\}$ [2]). Eliminando fra queste il parametro t (tempo), avendo presente che $\tau = S\,\text{sen}\,(\omega t-\alpha)$, si giunge all'equazione implicita della curva-indice: $\sqrt{x^2+n_1^2 y^2}=K\left\{\text{arc sen}\frac{n_1 y}{\sqrt{x^2+n_1^2 y^2}}-\text{arc sen}\frac{y}{nS}+\alpha\right\}$, dove $n_1=\frac{n-1}{n}$.

Si vede allora che per $y=0$, $x_0=K(\alpha+m\pi)$ (essendo m un numero intero qualunque); che $y_{max}=nS$, e che $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0}=\frac{nSx_0}{x_0-(n-1)S}$ assume valori differenti per i diversi valori di x_0, cioè di m.

maggiore di quello che a parità d'ampiezza e di periodo competerebbe all'intersezione di una sinusoide. Esaminando una di queste curve (fig. 1) si vede che la deviazione della curva-indice dalla sinusoide quasi insensibile al di là d'una certa distanza dal centro del disco, cresce col diminuire della distanza fino a presentare in prossimità di esso punti singolari e angoli di intersezione coll'asse medio notevolmente diversi: ciò specialmente se il rapporto n è negativo, cioè l'indice e il disco si muovono per versi opposti. Benché di queste regioni prossime al centro non ci si possa sempre servire per la lettura dell'ampiezza, sarà tuttavia conveniente, nei limiti delle esigenze pratiche del calettamento del disco e dell'illuminazione a tergo dell'indice, estendere quanto piú è possibile l'indice stesso verso il centro per trar vantaggio dalle singolarità della curva nella lettura della fase, salvo a completar eventualmente le misure colla lettura delle ampiezze in regioni piú lontane. Basta per questo sviluppare le spirali un po' oltre l'arco di 360°.

4. Dispositivo meccanico di moltiplicazione dell'ampiezza. — L'apparecchio moltiplicatore che qui si propone consiste in una leva col fulcro in un punto fisso, la quale porta, ai suoi due estremi, da una parte un bottone impegnato in una feritoia fissata al sopporto oscillante (1), dall'altra l'indice, che può essere ancora costituito come nell'apparecchio originario Ricci, da una laminetta di celluloide. Questa dovrà però essere maggiormente utilizzata in direzione orizzontale per ricevere una scala d'indici piú sviluppata. Anzi, perché l'apparecchio possa servire egualmente sia che si tratti di piccole o di notevoli ampiezze senza dover dare un eccessivo sviluppo all'indice (che porterebbe anche a possibili errori di parallasse per la distanza fra il disco e l'indice nelle sue posizioni estreme), è opportuno applicare il fulcro a un corsoio scorrevole entro guide

---

(1) Questa disposizione permette anche di determinare con rigore sufficiente i punti nodali. Basta una semplice risoluzione di triangoli simili, perché si possono riferire le ampiezze misurate, ai punti di tangenza del bottone colla feritoia, essendo praticamente trascurabile (sempre inferiore a $^1/_{1000}$) l'errore dovuto al fatto che la feritoia si sposta non in linea retta, ma secondo un arco di cerchio che ha per centro il punto nodale.

praticate nella leva stessa, in modo da poter variare il rapporto n. Come sopra si è mostrato, è bene costruire la leva a fulcro interposto (n negativo).

Del moltiplicatore predetto, lo schizzo (fig. 2) rappresenta un modello fatto costruire dal prof. Panetti per il Laboratorio di Meccanica applicata alle Macchine del R. Politecnico di Torino,

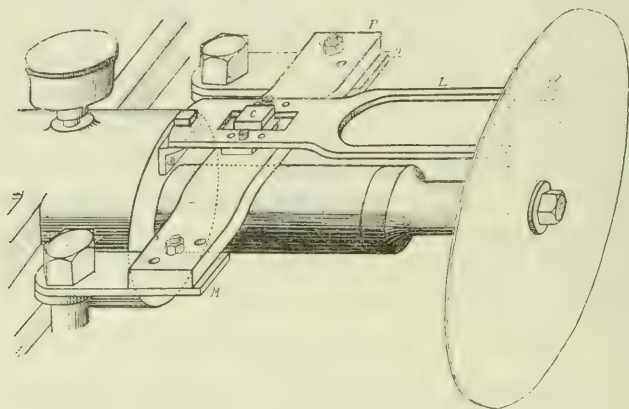



Fig. 2.

dove ho potuto eseguire le prove che hanno condotto a questo studio, proseguendo le indagini compiute nello stesso Laboratorio dall'ing. Ricci.

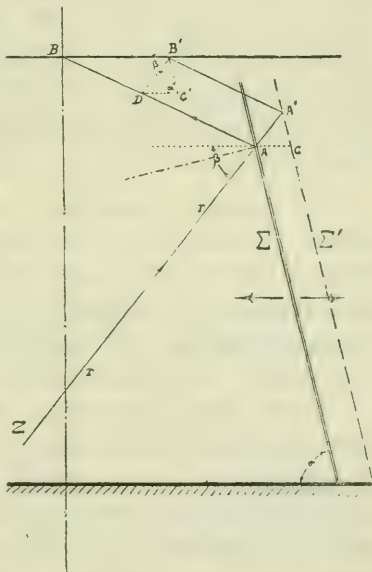
Le particolarità costruttive dell'apparecchio mirano a una grande leggerezza per diminuire l'entità delle forze tangenziali d'inerzia che si sviluppano per l'elevata velocità raggiungibile, alle quali la struttura progettata deve offrire sufficiente resistenza: da ciò l'uso dell'alluminio e la forma alleggerita, che permette, a parità di peso, maggior rigidezza e nello stesso tempo anche la buona illuminazione a tergo dell'indice. Questo infatti, per evitare che si producano sforzi di torsione, è reso simmetrico rispetto al piano della leva e si svolge quindi per metà al di sotto di questo piano. I rapporti n ottenibili sono 3, 4, 5, corrispondenti alle tre posizioni in cui con viti passanti si può fissare il corsoio C alla leva L, e alle posizioni del ponticello portafulcro P, che, per meglio utilizzare lo spazio, necessariamente limitato, fra i tre assi, ha tre fori, i quali vengono successivamente a coincidere coi fori, disposti parallelamente all'asse y, delle mensole M di sostegno.

5. Moltiplicatori ottici. — Il mezzo di moltiplicazione meccanico qui esposto presenta l'inconveniente di aggiungere al sistema oscillante masse soggette a movimenti, la velocità dei quali è aumentata e quindi a pari frequenza sono aumentate le loro accelerazioni e forze d'inerzia. Naturalmente l'alleggerimento di queste masse, sul quale abbiamo insistito, riduce in misura tollerabile il difetto accennato, ma non è escluso il pericolo che l'uso prolungato danneggi la registrazione delle parti mobili. Si presentano quindi come atti ad un maggior grado di perfezione i mezzi ottici, fra i quali sembra degno di considerazione il seguente.

Abbiasi uno specchio piano Σ fisso a uno dei sopporti oscillanti e formante un angolo α con un piano normale all'asse di rotazione dell'albero (e quindi col disco stroboscopico). Abbiasi inoltre una sorgente luminosa Z fissa ed esterna all'apparecchio equilibratore, la quale emetta raggi tutti contenuti nello stesso piano verticale di traccia r-r.

Questi incidendo sullo specchio Σ, verticale per ipotesi, verranno da esso riflessi in modo che tutti i raggi saranno ancora contenuti in un piano verticale e le loro traccie sul piano del disco stroboscopico verranno a formare un indice luminoso, che deve sostituire l'indice materiale usato nel dispositivo meccanico dianzi descritto.

Fig. 3.

Quando lo specchio Σ passa nella posizione Σ′ compiendo lo spostamento $AC = \tau$ l'imagine riflessa passa da B in B': lo spostamento apparente è dunque $BB' = n\tau$. Per determinare il rapporto n basta considerare i triangoli $BB'D$, $DB'C'$ (fig. 3), tenendo presenti le note proprietà geometriche della riflessione.

Essendo $DC' = AC$, se con β si indica l'angolo formato dal raggio r col piano del disco nella posizione media:

$$n = \frac{BB'}{DC'} = \frac{DB'}{DC''} : \frac{DB'}{BB'} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 2(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(2\alpha + \beta)} = \frac{2}{1 + \cot \alpha \operatorname{tang}(\alpha + \beta)} \quad (*).$$

In conseguenza, come facilmente si dimostra, il rapporto n variando α da π a 0 cresce sempre. La sua legge incrementale è lenta fino al valore 2 $\left(\text{per } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ e } \beta \text{ qualunque}\right)$, piú rapida in seguito.

Per la lettura della fase non c'è nulla da aggiungere a quanto è stato detto precedentemente: basta solo regolare l'apparecchio in modo che quando è a riposo l'imagine dell'indice sia incidente all'asse di rotazione.

La lettura dell'ampiezza invece può presentare qualche inconveniente se le oscillazioni si compiono intorno a un nodo non molto lontano dal punto in cui si fa la misura, perché bisogna tener conto della variabilità dell'angolo β e quindi di n. Questa variazione però è piccola nella generalità dei casi, data la piccolissima ampiezza angolare delle vibrazioni; è poi nulla, come mostra la formula (*), quando $n = 2$ ossia $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Per quanto riguarda la costruzione dell'apparecchio, si suggerisce di realizzare la sorgente Z, circondando una lampada elettrica ad arco con uno schermo provvisto di feritoia rettilinea verticale. — Affinché poi l'indice luminoso si formi effettivamente bisogna che la feritoia a spirale intagliata nel disco stroboscopico sia coperta da una membrana translucida.

Come altra disposizione del moltiplicatore ottico vantaggiosa quando si desiderassero grandi rapporti di moltiplicazione, accenno all'uso d'uno specchio verticale cilindrico a direttrice parabolica. Si può invero dimostrare che in questo caso il rapporto n è funzione dello spostamento τ e quindi la curva-indice assume un andamento un po' diverso, mantenendo però inalterate le sue proprietà riguardo alla fase. Non è possibile invece dedurre l'ampiezza S dividendo semplicemente per n l'ampiezza apparente letta sul disco stroboscopico, perché n è funzione di S in quanto è funzione di τ. Ciò non esclude la possibilità di compiere anche questa misura, ma il metodo sembra, sotto questo riguardo, assai meno pratico e sicuro dei precedenti.

Torino, maggio 1917.

Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente.

Nota II di GIUSEPPE ALBENGA.

In una breve Nota pubblicata sotto questo medesimo titolo nel volume 51° di questi Atti, studiando la trave continua e sollecitata assialmente, ho mostrato come si ottengono il diagramma dei momenti flettenti e la linea elastica per una trave con incastri imperfetti, tesa e soggetta ad un carico distribuito con legge uniforme sull'asse, ed ho avvertito come in modo analogo si possa trattare la trave inflessa e caricata di punta. Per quanto questo secondo caso presenti molti punti di contatto col primo, ritengo utile indicare qui brevemente le espressioni alle quali si giunge e soffermarmi sopra alcune interessanti conseguenze di esse.

***

Con le solite notazioni e con le convenzioni usuali si ha dalla figura 1, per la sezione corrente S, il momento flettente

$$M_x = M_a + R_a x - \frac{px^2}{2} + P\eta\,; \tag{1}$$

e, introducendo questa espressione nella equazione differenziale della linea elastica

$$-EJ\frac{d^2\eta}{dx^2} = M_x, \tag{2}$$

operando come si è fatto nella Nota più sopra citata, si ottiene per la trave di sezione costante

$$\frac{d^4\eta}{dx^4} + a^2\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{p}{EJ} = 0 \tag{3}$$

dopo aver posto

$$a^2 = \frac{P}{EJ} \tag{4}$$

dalla (3) si ricava

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = A \cos ax + B \operatorname{sen} ax + \frac{p}{P}\,. \tag{5}$$

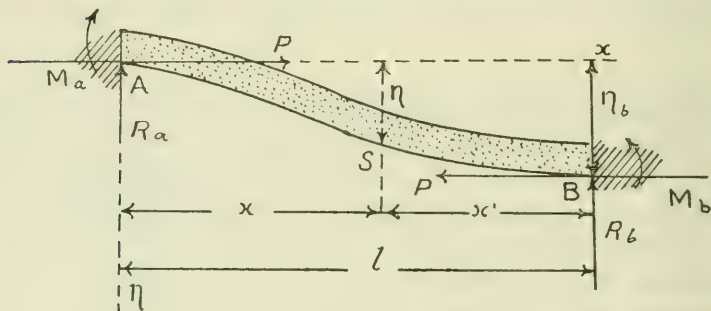



Fig. 1.

Determinando le costanti di integrazione, per mezzo delle condizioni: per

$$x = 0 \qquad M_x = M_a$$
$$x = l \qquad M_x = M_b$$

e introducendole nella (5) dopo aver fatto per brevità

$$al = \lambda$$
$$ax = \xi$$
$$a\,(l - x) = ax' = \xi'$$

si ricava

$$\operatorname{sen}\lambda . \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{p}{P}(\operatorname{sen}\xi + \operatorname{sen}\xi' - \operatorname{sen}\lambda) - \frac{M_a}{EJ}\operatorname{sen}\xi' - \frac{M_b}{EJ}\operatorname{sen}\xi. \tag{6}$$

Ricordando la (2) avremo quindi

$$M_x = \frac{EJp}{P}\left(\frac{\operatorname{sen}\xi + \operatorname{sen}\xi'}{\operatorname{sen}\lambda} - 1\right) + M_a\frac{\operatorname{sen}\xi'}{\operatorname{sen}\lambda} + M_b\frac{\operatorname{sen}\xi}{\operatorname{sen}\lambda}\,. \tag{7}$$

La (7) ci offre il mezzo di determinare il momento flettente in una sezione qualsiasi, noti i momenti d'incastro, ed isola e

mette in evidenza la influenza di essi. Il primo termine del secondo membro della (7) rappresenta il momento flettente generico per la trave sottoposta agli stessi carichi p e P, ma liberamente appoggiata agli estremi. Osservando che è

$$\text{sen}\,\xi + \text{sen}\,\xi' = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\xi' + \xi)\cos\frac{1}{2}(\xi' - \xi)$$

$$\text{sen}\,\lambda = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\lambda.$$

Questo termine può venir ridotto alla forma

$$\frac{EJp}{P}\left[\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2} - \xi\right)}{\cos\frac{\lambda}{2}} - 1\right]$$

sotto la quale lo si pone normalmente [1].

***

La (7) è suscettibile di una costruzione grafica molto semplice.

Dividiamo l'asse della trave in n parti eguali (8 nella figura 2) e tracciamo con centro in O sul prolungamento dell'asse tre circoli concentrici di raggio $\frac{EJp}{P}$, M_a ed M_b. Portiamo su uno di questi circoli gli archetti 01, 12, ... 78, 0'1', 1'2', ... 7'8' di ampiezza $\frac{\lambda}{n}$ in radianti.

Il diagramma dei momenti flettenti si ottiene con la costruzione rappresentata per il punto 3. Dalla figura risulta subito che il segmento $3_1\,3_1'$ rappresenta il termine

$$\frac{EJp}{P}(\text{sen}\,\xi + \text{sen}\,\xi')$$

---

[1] Cfr. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni.* Vol. II: *Teoria dell'Elasticità*, ediz. 7ª, pag. 174.

relativo al punto 3. Portando questo segmento a partire da 8′ si ha in 0 (3′) il segmento

$$\frac{EJp}{P}(\text{sen}\,\xi + \text{sen}\,\xi' - \text{sen}\,\lambda)$$

che si proietta sulla verticale passante per il punto 3. Analogamente si ha $3'' 3_1''$ eguale a

$$M_a\,\text{sen}\,\xi' + M_b\,\text{sen}\,\xi.$$

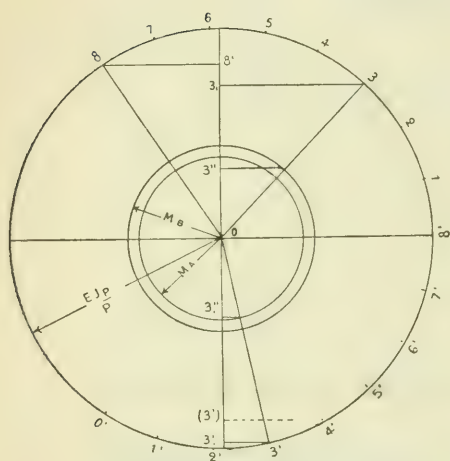



Fig. 2.

Portando il segmento $3'' 3_1''$ in 3 (3) si ottiene, osservando che M_a ed M_b sono negativi,

$$(3)(3') = \frac{EJp}{P}(\text{sen}\,\xi + \text{sen}\,\xi' - \text{sen}\,\lambda) + M_a\,\text{sen}\,\xi' + M_b\,\text{sen}\,\xi.$$

Il diagramma della figura, letto con il coefficiente di riduzione

$$\mu = \frac{1}{\text{sen}\,\lambda},$$

rappresenta quindi per la (7) il diagramma dei momenti cercato.

***

Integrando la (6) una prima volta troviamo

$$(8)\qquad a \operatorname{sen}\lambda \,.\, \frac{d\eta}{dx} = \frac{p}{P}(\xi \operatorname{sen}\lambda + \cos\xi - \cos\xi') - \frac{M_a}{EJ}\cos\xi' + \\ + \frac{M_b}{EJ}\cos\xi + C_1$$

e con una successiva integrazione

$$(9)\qquad a^2 \operatorname{sen}\lambda \,.\, \eta = \frac{p}{P}\left(\frac{\xi^2}{2}\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}\xi + \operatorname{sen}\xi'\right) + \frac{M_a}{EJ}\operatorname{sen}\xi' + \\ + \frac{M_b}{EJ}\operatorname{sen}\xi + C_1\xi + C_2 \,.$$

Le costanti C_1 e C_2 sono determinate osservando che: per

$$x = 0 \qquad \eta = 0$$
$$x = l \qquad \eta = \eta_b \,.$$

Ricavando i valori di C_1 e di C_2 e introducendoli nella (8) si ha

$$(10)\qquad a \,.\, \operatorname{sen}\lambda\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{\eta_b}{l}\right) =$$
$$= \frac{p}{P}\left[\left(\xi - \frac{\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\lambda + \cos\xi - \cos\xi'\right] - \frac{M_a}{EJ}\left(\cos\xi' - \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right) + \\ + \frac{M_b}{EJ}\left(\cos\xi - \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right).$$

Facendo nella (10)

$$x = 0 \qquad \text{ed} \qquad x = l$$

avremo i valori α e β delle tangenti sugli appoggi, e cioè, ricordando che

$$\frac{1 - \cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda} = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} \,,$$

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\eta_b}{l} + \dfrac{p}{aP}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2}\right) - \dfrac{M_a}{aEJ}\left(\operatorname{ctg}\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right) + \dfrac{M_b}{aEJ}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\right) \\ \beta = \dfrac{\eta_b}{l} - \dfrac{p}{aP}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2}\right) - \dfrac{M_a}{aEJ}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\right) + \dfrac{M_h}{aEJ}\left(\operatorname{ctg}\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right). \end{cases}$$

***

Le (11) servono per trovare i momenti di incastro una volta note le tangenti sugli appoggi o per giungere ad una equazione dei tre momenti.

Se, ad esempio, noi facciamo in esse α e β eguali a zero e riteniamo nullo η_b, cioè se noi consideriamo una trave perfettamente incastrata su estremi di livello, sarà per ragioni di simmetria

$$M_a = M_b = M$$

ed una qualunque delle (11) ci darà

$$M = -\frac{p}{a^2} \frac{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}} . \tag{12}$$

Sviluppando in serie $\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$ si vede subito che col tendere a zero di P e quindi di a, la (12) tende al limite

$$M = -\frac{1}{12} p l^2.$$

***

Consideriamo invece due campate consecutive di una trave continua, indichiamo con gli indici 1 e 2 rispettivamente gli elementi della 1ª e della 2ª campata, con M_1, M_2 ed M_3 i momenti sui tre appoggi, con y_1, y_2, y_3 i cedimenti di questi, sarà

$$\eta_{b,1} = y_2 - y_1$$
$$\eta_{b,2} = y_3 - y_2$$
$$\alpha_2 = \beta_1$$

e per le (11) con riduzioni semplici

$$\frac{M_1}{a_1 E J_1}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right) - \frac{M_2}{E}\left[\frac{1}{a_1 J_1}\left(\operatorname{ctg}\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \frac{1}{a_2 J_2}\left(\operatorname{ctg}\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right] + \frac{M_3}{a_2 E J_1}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{y_2 - y_1}{l_1} - \frac{y_3 - y_2}{l_2} - \frac{p_1}{a_1 P_1}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\right) - \frac{p_2}{a_2 P_2}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_2}{2}\right). \tag{13}$$

Sviluppando in serie le espressioni trigonometriche che compaiono nella (13) e facendo tendere P, e quindi a, a zero si ottiene con facili calcoli la equazione dei tre momenti di Clapeyron.

***

Le equazioni precedenti servono ancora a determinare il carico di Eulero per travi imperfettamente incastrate agli estremi inflesse e compresse.

Notiamo anzitutto che la resistenza a flessione laterale è, per la trave semplicemente appoggiata agli estremi, indipendente dal carico distribuito p. Infatti la (7) quando si ponga

$$M_a = M_b = 0$$

diviene

$$M_x = \frac{EJp}{P}\left(\frac{\operatorname{sen}\xi + \operatorname{sen}\xi'}{\operatorname{sen}\lambda} - 1\right)$$

ed M_x diventa infinito per

$$\operatorname{sen}\lambda = 0$$

ciò che importa

$$\lambda = al = \pi,\ 2\pi,\ \ldots\ n\pi\ \ldots$$

(n, numero intero) o sostituendo ad a il suo valore e risolvendo rispetto a P

$$P = n\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

e, come carico minimo di rottura per inflessione laterale

$$P_r = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}\,. \tag{14}$$

Si ha così la notissima relazione di Eulero.

Per la trave incastrata imperfettamente agli estremi ci ridurremo alla relazione precedente isolando il tratto di trave compreso fra i due punti di flesso, tratto che si comporta evidentemente come una trave semplicemente appoggiata. Indicando con l_1 la distanza tra questi due punti, che può trovarsi utilizzando il diagramma dei momenti flettenti o servendoci della (7), si avrà

$$P_r = \pi^2 \frac{EJ}{l_1}\,. \tag{15}$$

Della partizione dei numeri.
Ambi, terni, quaterne e cinquine di data somma.

Nota di ALBERTO TANTURRI.

De partitione numerorum s'intitolano due scritti di EULERO: il primo è il Capitolo XVI del t. I dell'*Introductio in analysin infinitorum* (1748), e il secondo è contenuto nel t. III (1750-51) *Novi Comment. Acad. Scient. Petrop.*; e tutt'e due terminano con una tabella, che dà i valori d'una certa funzione di due numeri naturali m e n, per molti valori di m e n. Tale funzione si esprime immediatamente con una formula, quando n è qualunque e $m = 2$; e nella presente Nota, seguendo un procedimento metodico, la esprimeremo, con formule semplici, anche quando, sempre essendo n qualunque, $m = 3$, o a 4, o a 5.

Della partizione dei numeri.

1. Le funzioni di cui EULERO si occupa, principalmente, nei due scritti citati, sono quelle che indico con G e G′, e che definisco coi simboli del *Formulario Mathematico.*

I $\quad m, n \in N_1 \,.\, \supset .$

$$G(m, n) = \text{num}\,[\text{Cls}'N_1 \cap x \ni (\text{num}\, x = m \,.\, \Sigma x = n)] \qquad \text{Df.}$$

Si legge: " se m e n sono numeri (: 1, 2, 3, ...), G (m, n) è, per definizione, il numero delle classi x, formate ciascuna di m numeri, distinti, di somma n „. Brevemente, come dice EULERO: " è il numero dei modi nei quali n può esser diviso in m parti disuguali „.

Si può anche dire che è il numero delle soluzioni in numeri x della

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n\,;$$

con la condizione: $x_1 < x_2 < ... < x_m$, cioè che x cresca con m. In simboli:

I′ $\quad m, n \,\epsilon\, N_1 \,.\, \supset .$

$$G(m, n) = \text{num}\,\{(N_1 F 1 \cdots m)\ \text{cres} \cap x \ni [\Sigma(x, 1 \cdots m) = n]\}.$$

2. Nella stessa ipotesi per m e n, indico con $G'(m, n)$ il numero delle soluzioni in numeri x della

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n;$$

con la condizione: $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_m$. In simboli:

II $\quad m, n \,\epsilon\, N_1 \,.\, \supset .$

$$G'(m, n) = \text{num}\,\{(N_1 F 1 \cdots m)\ \text{cres}_0 \cap x \ni [\Sigma(x, 1 \cdots m) = n]\} \quad \text{Df.}$$

Si può leggere: " se m e n sono numeri, $G'(m,n)$ è, per definizione, il numero delle classi x, formate ciascuna di m numeri, distinti o no, di somma n ". Brevemente, con Eulero: " è il numero dei modi nei quali n può esser diviso in m parti, uguali o disuguali ".

3. Da ciascuna delle due funzioni precedenti Eulero fu condotto a una funzione , che indico con $H'(m, n)$, e che così definisco:

III $\quad m, n \,\epsilon\, N_1 \,.\, \supset .$

$$H'(m, n) = \text{num}\,\{(0 \cdots m)\, F\, (1 \cdots n) \cap x \ni [\Sigma(x, 1 \cdots n) = n]\} \quad \text{Df.}$$

Cioè: " se m e n sono numeri, $H'(m, n)$ è, per definizione, il numero delle soluzioni in interi x da 0 a m della

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n \text{ "}.$$

Tralasciando i termini nulli, si può anche dire che $H'(m, n)$ è il numero delle soluzioni nel campo dei numeri da 1 a m della

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + ... \qquad = n;$$

nel primo membro della quale non si fissa il numero dei termini, che può anche essere uguale a 1. E allora, con Eulero,

leggeremo: " se m e n sono numeri, $H'(m, n)$ è il numero dei modi nei quali può essere formato n, sommando numeri da 1 a m ". Volendo scrivere in simboli anche sotto questa forma, indico, rispettivamente, con $y_1, y_2, \ldots, y_m$, il numero dei termini $1, 2, \ldots, m$, contenuti nella soluzione generica della (1). Sarà ogni y un intero da 0 a n; e $H'(m, n)$ sarà il numero delle soluzioni nel campo degli interi da 0 a n della

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + my_m = n;$$

cioè:

III' $\quad m, n \in N_1 . \supset .$
$$H'(m, n) = \text{num} \{ (0 \cdots n) F (1 \cdots m) \frown y \ni [\Sigma (iy_i | i, 1 \cdots m) = n] \}.$$

E così si presenta per l'appunto la funzione H' nella dimostrazione più ovvia del teorema:

IV $\quad m \in N_1 . x \in -1 \frown 1 . \supset .$
$$1/\Pi [(1 - x^i) | i, 1 \cdots m] = 1 + \Sigma [H'(m, n) x^n | n, N_1];$$

che si legge: " se m è un numero, e x è un numero reale, minore, in valore assoluto, di 1, allora

$$1/(1 - x)(1 - x^2) \ldots (1 - x^m)$$

è uguale alla serie: $1 + H'(m, 1)x + H'(m, 2)x^2 + \ldots$ " [1].

---

[1] Per $m = 1$ si ha la serie geometrica. Per il caso generale, sviluppo $1/(1 - x)$, $1/(1 - x^2)$, ..., $1/(1 - x^m)$, in serie; serie tutte assolutamente convergenti, e i cui termini son dati da x^{y_1}, x^{2y_2}, ..., x^{my_m}, quando gli y percorrano il campo degl'interi. E moltiplico. Nella serie prodotto, che è assolutamente convergente e ha per somma

$$1/(1 - x)(1 - x^2) \ldots (1 - x^m),$$

il termine x^n comparirà tante volte per quante sono le soluzioni in interi y della

$$y_1 + 2y_2 + \ldots + my_m = n;$$

cioè $H'(m, n)$ volte.

4. Si stabiliscono direttamente i tre teoremi:

V $m \epsilon 1 + N_1 . n \epsilon N_1 . \supset . G(m, n+m) = G(m,n) + G(m-1, n)$
VI $G'(m, n+m) = G'(m,n) + G'(m-1, n+m-1)$
VII $H'(m, n+m) = H'(m,n) + H'(m-1, n+m)$ (¹);

dei quali EULERO scrive l'ultimo, deducendolo dalla IV.

Con essi tre, e con le semplicissime:

VIII $n \epsilon N_1 . \supset . G(1, n) = G'(1, n) = H'(1, n) = 1$,
IX $m \epsilon 1 + N_1 . n \epsilon 1 \cdots m-1 . \supset . G(m, n) = G'(m, n) = 0 . H'(m, n) = H'(n, n)$,
X " $. \supset . G(m, m) = 0 . G'(m, m) = 1 . H'(m, m) = 1 + H'(m-1, m)$,

son determinati $G(m, n)$, $G'(m, n)$ e $H'(m, n)$, per ogni coppia di numeri m e n (²). E se cominciamo a registrare in tabelle i valori che si trovano, intravederemo subito il teorema, scoperto da EULERO mediante sviluppi in serie, e dimostrabile per induzione:

XI $m, n \epsilon N_1 . \supset . G[m, n + m(m+1)/2] = G'(m, n+m) = H'(m, n)$.

Per l'appunto con la VII son calcolate le tabelle euleriane. Quella dell'*Introductio ecc.* è di 11 colonne; la m^{ma} delle quali contiene, in 69 righi, da $H'(m, 1)$ ad $H'(m, 69)$, cioè da

---

(¹) Per la V: delle classi di m numeri, distinti, di somma $n+m$, quelle che non contengono 1 sono $G(m, n)$, come si vede togliendo 1 da ogni elemento di ciascuna; e quelle che contengono 1 sono $G(m-1, n)$, come si vede sopprimendo quell'1, e poi togliendo 1 da ciascuno degli elementi rimasti. Similmente, nelle classi da computare: per la VI, si distinguano quelle che non contengono nessun 1 da quelle che ne contengono; e, per la VII, quelle che contengono qualche m da quelle che non ne contengono.

(²) Notiamo le formule:

IX′ $m \epsilon 1 + N_1 . n \epsilon 1 \cdots m(m+1)/2 - 1 . \supset . G(m, n) = 0$
IX″ " $. \supset . G[m, m(m+1)/2] = G[m, m(m+1)/2 + 1] = G'(m, m+1) = H'(m, 1) = 1$.
$G[m, m(m+1)/2 + 2] = G'(m, m+2) = H'(m, 2) = 2$.

$G[m, m(m+1)/2+1]$ a $G[m, m(m+1)/2+69]$, o anche da $G'(m, m+1)$ a $G'(m, m+69)$. E quella del t. III *Novi Comment. ecc.* è di 20 linee; la m^{ma} delle quali contiene, in 59 colonne, da $H'(m, 1)$ ad $H'(m, 59)$, cioè da $G[m, m(m+1)/2+1]$ a $G[m, m(m+1)/2+59]$, o anche da $G'(m, m+1)$ a $G'(m, m+59)$ (¹).

Ambi di data somma.

5. $G(2, 1) = G(2, 2) = 0$. E i numeri $G(2, 3)$, $G(2, 4)$, ecc., sono, al dir d'Eulero, *termini seriei numerorum naturalium geminati*: valgono cioè 1, 1, 2, 2, ecc., come, a partir da $G(2, 4)$, si può leggere nella colonna II della tabella dell'*Introductio*. Si vede dunque immediatamente la:

XII $\qquad n \in N_0 . \supset . G(2, n+1) = E(n/2).$

Per la lettura, chiamerò *ambo*, e, appresso, *terno*, *quaterna* e *cinquina*, un gruppo di 2, 3, 4 e 5 numeri distinti, pensando a un giuoco di lotto, composto, non di 90, ma di quanti si vogliano numeri. E dirò: " qualunque sia l'intero n, gli ambi di somma $n+1$ sono tanti quant'è la parte intera di $n/2$ „. " Se $n > 0$, tanti sono pure i modi, $G'(2, n)$, nei quali n può esser diviso in due parti, disuguali o uguali; e, se $n > 2$, tanti pure i modi, $H'(2, n-2)$, nei quali $n-2$ può esser formato sommando degli 1 e dei 2 „.

Per la dimostrazione, basta osservare che $E(n/2)$ è, come $G(2, n+1)$, quel determinato intero, funzione dell'intero n, che

(¹) Si può definire un numero, K′, che comprenda H′, ponendo:

$$m, n, l \in N_1 . \supset .$$
$$K'(m, n, l) = \text{num} \} (0 \cdots m) F (1 \cdots n) \frown x \ni [\Sigma(x, 1 \cdots n) = l] \{ \qquad \text{Df.}$$

Questo numero fu espresso da alcuni autori, e, per il primo, dal Brioschi, che lo diè sotto forma d'un determinante d'ordine l (v. *Annali di Tortolini*, 1ª serie, t. 7, 1856, pag. 303, *Sul principio di reciprocità ecc.*). Con una formula di questo tipo, o con altre, pure poco comode in pratica, si sa dunque già esprimere $H'(m, n)$, che $= K'(m, n, n)$.

si annulla quando $n = 0$ o $= 1$, e per ogni n maggiore di 1 soddisfa all'uguaglianza:

$$G(2, n + 1) = G(2, n - 1) + 1,$$

ricavata dalla V per $m = 2$ (¹).

6. Dalla IV, dalla XI e dalla XII segue subito la:

XIII $\quad x \,\epsilon\, -1 \frown 1 \,.\, \supset .\, 1/(1 - x)(1 - x^2) = \Sigma\,[\mathrm{E}(n/2)x^{n-2} \,|\, n, 1 + \mathrm{N}_1]$.

Eulero pone il coefficiente generico, $\mathrm{E}(n/2)$, sotto la forma: " $(2n - 1 \pm 1)/4$, *ubi signum superius valet si* n *fuerit numerus par, inferius si* n *fuerit impar* " (v. *Introductio*, t. I, pag. 180).

7. Registriamo le uguaglianze:

XIV

$n \,\epsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, \mathrm{G}(2, n) + \mathrm{G}(2, n+3) = \mathrm{G}(2, n+2) + \mathrm{G}(2, n+1) = n$ (²).

$\quad$ " $-$ " $= \mathrm{rest}(n, 2)$.

Terni di data somma.

8. $\mathrm{G}(3, 1) = \mathrm{G}(3, 2) = \ldots = \mathrm{G}(3, 5) = 0$; e $\mathrm{G}(3, 6) = 1$. Si consideri poi il quadro B; nel quale i righi successivi sono progressioni aritmetiche di ragioni 1, 2, 3, ecc., e si passa dall'ultimo termine d'una progressione al primo della seguente aggiungendo la ragione di questa: e da esso,

B)							A)						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	7
	8	10	12	14	16	18		8	10	12	14	16	19
	21	24	27	30	33	36		21	24	27	30	33	37
	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.

(¹) Si applica il teorema d'aritmetica:

$$a \,\epsilon\, \mathrm{R} \,.\, n \,\epsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, \mathrm{E}(a + n) = \mathrm{E}\,a + n.$$

(²) Che quattro termini consecutivi della colonna II (indefinita) della tabella dell'*Introductio* son termini di una equidifferenza, risulta anche dalla XIII. Nella quale, infatti, la serie del secondo membro ha per coefficienti i numeri $\mathrm{G}(2, n)$; e deve essere ricorrente, con la scala $1, -1, -1, 1$, data dai coefficienti dello sviluppo $1 - x - x^2 - x^3$ del denominatore $(1 - x)(1 - x^2)$.

aumentando di 1 tutti i termini dell'ultima colonna, si deduca il quadro A. I successivi termini di questo quadro dànno i valori di G (3, 7), G (3, 8), ecc.; quali si possono leggere nella colonna III della tabella dell'*Introductio*. Una formula per G (3, n) si presenta allora immediata [1]; ma noi ne studieremo una più conveniente.

9. Adopereremo la proposizione:

XV $$n \varepsilon N_1 . \supset . G(3, n+6) = G(3, n) + n;$$

che, quando $n > 6$, può enunciarsi dicendo: "l'n^{mo} termine del quadro A è uguale al termine immediatamente sovrapposto, $+ n$".

Per la dimostrazione, basta osservare che, in virtù della V, qualunque sia il numero n:

$$G(3, n+6) = G(3, n+3) + G(2, n+3)$$
e $$G(3, n+3) = G(3, n) + G(2, n);$$

dalle quali, con la XIV, segue la proposizione da dimostrare.

---

[1] Dal quadro B, dividendo i termini della prima orizzontale per 1, e quelli della seconda per 2, e quelli della terza per 3, ecc., si ha il quadro C; tale che se r è un 0⋯5, e q un numero, il termine di posto r della q^{ma} orizzontale

C)

1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9
7	8	9	10	11	12
.	.	.	.	.	.

$$= 3(q-1) + 1 + r, \text{ cioè a } 3q + r - 2.$$

Per conseguenza, il termine d'ugual posto nel quadro B $= q(3q + r - 2)$; e passando quindi al quadro A:

$$n \varepsilon N_0 . q = \text{quot}(n, 6) . r = \text{rest}(n, 6) . \supset . G(3, n+1) = q(3q + r - 2) + \\ + E[(r+1)/6].$$

Una formula per il numero G (3, n) fu data, per il primo, da Eulero, nella maniera che diremo al n. 12. Altre formule: una, come questa nostra, del Platner, nella Nota *Sul numero delle maniere di formare un numero intero, ecc.*, "Rendic. Istit. Lomb.", luglio 1888; un'altra dello stesso, in una Nota che continua la citata, negli stessi "Rendic.", novembre 1888; una del Besso, dimostrata dal Viaggi nel "Period. di Matem.", 1889, pag. 27; una del Gennari, nella Nota *Su un problema di calcolo combinatorio*, "Bollett. di Matem.", 1907; e una del Morale, nella Nota *Sui gruppi di numeri naturali aventi una data somma*, "Period. di Matem.", 1908.

10. Ciò posto, otterrò un'espressione per $G(3, n)$ cercando una tal funzione fn del numero n, che:

a) per ogni numero n, $f(n+6) = fn + n$,
b) e $f1 = f2 = f3 = f4 = f5 = 0$, e $f6 = 1$.

Col metodo dei coefficienti indeterminati trovo subito la funzione intera che soddisfa alla *a)*: ed è $[(n-3)^2 + c]/12$, c essendo una costante arbitraria. Non è possibile determinar c in modo da soddisfare alle condizioni *b)*; sicchè la f non è una funzione intera. Ma, in virtù della proposizione d'aritmetica citata nella nota del n. 5, soddisfa alla *a)* anche la funzione $E\{[(n-3)^2 + c]/12\}$: nella quale basta poi prender per c uno dei numeri 3, 4, 5, 6 o 7, perchè anche le *b)* sian soddisfatte, come si vede ponendo, successivamente, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, al posto di n. Concludo:

XVI $\quad n \,\epsilon\, N_0 \,.\, c \,\epsilon\, 3\cdots7 \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, G(3, n+3) = E[(n^2 + c)/12]$.

Leggeremo: " i terni di somma $n+3$ son tanti quant'è la parte intera di $(n^2+3)/12$; nel numeratore della qual frazione è lecito, al posto di 3, leggere 4, 5, 6 o 7, senza alterare il risultato ". " Se $n > 0$, tanti sono pure i modi, $G'(3, n)$, nei quali n può esser diviso in tre parti, disuguali o uguali; e, se $n > 3$, tanti pure i modi $H'(3, n-3)$, nei quali $n-3$ può esser formato sommando degli 1, dei 2, e dei 3 ".

11. Possiamo distinguere il caso di n pari da quello di n dispari.

XVI' $\quad h \,\epsilon\, N_0 \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, G(3, 2h+3) = E(h^2/3)\,.$
$\qquad\qquad G(3, 2h+4) = E[(h^2 + h + 1)/3]$.

Nella prima uguaglianza si è scritto $E(h^2/3)$ invece di $E[(4h^2+4)/12]$, in virtù della proposizione d'aritmetica:

$$h \,\epsilon\, N_0 \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, E[(h^2+1)/3] = E(h^2/3),$$

che discende dalla generale:

$a, b \,\epsilon\, N_0 \,.\, c \,\epsilon\, N_1 \,.\, b + \mathrm{rest}(a, c) < c \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, \mathrm{quot}(a+b, c) = \mathrm{quot}(a, c)$,

dopo aver osservato che, se h è un intero, rest $(h^2, 3) < 2$. La stessa proposizione generale dà che, se n è un intero:

$$E\,[(n^2 + 3)/12] = E\,[(n^2 + 4)/12] = \ldots = E\,[(n^2 + 7)/12],$$

perchè sempre rest $(n^2, 12) < 8$.

12. Dalla IV, dalla XI e dalla XVI segue subito la:

XVII $\qquad x \,\epsilon\, -1 \text{—} 1 \,.\, \supset .$

$$1/(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3) = \Sigma\,\{\, E\,[(n^2+3)/12]\, x^{n-3} \mid n, 2 + N_1 \,\}.$$

Eulero (v. pag. 186 del t. I dell'*Introductio*), servendosi della sua teoria generale delle serie ricorrenti, e usando perciò delle funzioni circolari, dette lo sviluppo in serie del primo membro di questa uguaglianza: i coefficienti che egli trova han sei forme differenti, a seconda dei sei valori del resto di n per 6.

13. Diamo qualche proprietà del quadro A.

XVIII $\qquad n \,\epsilon\, N_1 \,.\, \supset \,.\, G(3, n) +$

$$\begin{array}{lllll}
G(3,n+1)+ & G(3,n+2)+ & G(3,n+3) & & = G(3,2n). \\
\quad " \quad +2\times & \quad " \quad + & \quad " & & = G(3,2n+1). \\
\quad " \quad +2\times & \quad " \quad +2\times & \quad " & +G(3,n+4) & = (n-1)n/2.
\end{array}$$

L'ultima di queste uguaglianze è caso particolare d'un legame tra i numeri $G(m, n)$ e i numeri figurati, scoperto da Eulero, mediante serie (v. a pag. 267 del t. I dell'*Introductio*). Tutt'e tre si possono dimostrare per induzione. La prima, per es., è vera per $n = 1$, 2 e 3; e, suppostala vera per un dato valore di n, lo è per $n + 3$, come si trae dalla V, dalla XIV e dalla XV; ed è dunque vera in generale.

14. Come conseguenza:

XIX $n \in N_1 . \supset .$

$$G(3, 2n+2) - G(3, n+4) = G(3, 2n+1) - G(3, n+2)$$
$$= G(3, 2n) - G(3, n) = G(3, n+1) + G(3, n+2) + G(3, n+3)$$
$$= [(n-1)n/2 - E(n/2)]/2 \text{ (}^1\text{)} = E(n/2) \times E[(n-1)/2]$$
$$= E \{ [(n-1)/2]^2 \}.$$

Muto, infatti, n in $n+1$ nella prima uguaglianza della XVIII; e ho subito, con un trasporto, che il trinomio $G(3, n+1) + G(3, n+2) + G(3, n+3) = G(3, 2n+2) - G(3, n+4)$. Lo stesso trinomio $= G(3, 2n+1) - G(3, n+2)$, come segue, con un trasporto, dalla seconda uguaglianza; ed $= G(3, 2n) - G(3, n)$, come segue, con un trasporto, dalla prima uguaglianza. E, finalmente, $= [(n-1)n/2 - E(n/2)]/2$; come segue dalla terza uguaglianza, sostituendo $G(3, n+4)$ con $G(3, n+1) + G(2, n+1)$, trasportando questo $G(2, n+1)$, che $= E(n/2)$, e dividendo per 2. Che poi $[(n-1)n/2 - E(n/2)]/2$ si possa trasformare nelle due ultime maniere scritte, si vede facilmente, separando il caso di n pari da quello di n dispari.

15. Aggiungo alcune formule, che però non adopereremo appresso.

XX $n \in N_0 . \supset .$

$$G(3, n+4) + G(3, n+3) = E[n(n+1)/6] . G(3, n+3) - G(3, n+1) = E(n/3).$$
$$\text{„} \quad - \quad \text{„} \quad = E(n/2) - E(n/3).$$

---

[1] Scindendo il caso di n pari da quello di n dispari, si hanno proposizioni che qui aggrego ad altre dello stesso tipo:

$$h \in 1 + N_1 . \supset . G(3, 2h+1) + G(3, 2h+2) + G(3, 2h+3) =$$
$$G(3, 2h) + \text{„} + G(3, 2h+4) - 1 =$$
$$G(3, 2h-2) + \text{„} + G(3, 2h+6) - 3 = (h-1)h.$$
$$G(3, 2h+2) + G(3, 2h+3) + G(3, 2h+4) =$$
$$G(3, 2h+1) + \text{„} + G(3, 2h+5) =$$
$$G(3, 2h-1) + \text{„} + G(3, 2h+7) - 2 = h^2.$$

Tralasciamo, per brevità, molte conseguenze delle formule scritte e da scrivere. Solo a titolo di saggio registriamo la:

$$n \in N_1 . \supset . E \{ [(n-1)^2 + 3]/12 \} + 2E[(n^2+3)/12] + 2E \{ [(n+1)^2 + 3]/12 \} + E \{ [(n+2)^2 + 3]/12 \} = n(n+1)/2.$$

XXI $n \epsilon 3 + N_1 . \supset .$
$G(3, n+1) + G(3, n+2) - G(3, n+3)$
$= G(3, n-1) + G(3, n-2) - G(3, n-3)$ [1]
$= G(3, n) - \{ E(n/3) - E[(n-1)/3] \} = G(3, n) - [1 - \mathrm{rest}(n^2, 3)]$.

XXI′
$n \epsilon N_1 \sim 3 \times N_1 . \supset . G(3,n) + G(3, n+3) = G(3, n+1) + G(3, n+2)$
$n \epsilon 3 \times N_1 . \supset .$ „ + „ = „ + „ $+1$.

Quaterne di data somma.

16. Volendo esprimere con una formula i numeri $G(4, n)$, possiamo restringerci al caso di n dispari o di n pari, in virtù della:

XXII $h \epsilon N_1 . \supset . G(4, 2h+2) = G(4, 2h+1) + G(3, h+2)$.
$G(4, 2h+1) = G(4, 2h) + G(3, h)$ [2].

Si dimostra per induzione. La prima uguaglianza, per es., è vera quando $h = 1$ o a 2. E, suppostala vera per un dato valore di h, lo è per $h + 2$; perchè

$$G(4,2h+6) = G(4,2h+2) + G(3,2h+2) \quad \text{(v. V)},$$

cioè a
$$G(4,2h+1) + G(3, h+2) + G(3,2h+2);$$

che, come segue subito dalla XXIX,

$$= G(4,2h+1) + G(3,2h+1) + G(3, h+4),$$

cioè (v. V) a
$$G(4,2h+5) + G(3, h+4).$$

Essa uguaglianza è dunque vera in generale.

---

[1] Tale uguaglianza risulta pure dalla XVII. Nella quale, infatti, la serie del secondo membro ha per coefficienti i numeri $G(3, n)$; e deve essere ricorrente con la scala $-1, 1, 1, 0, -1, -1, 1$, data dai coefficienti dello sviluppo $1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$ del denominatore $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.

[2]
XXII′ $n \epsilon N_1 . \supset . G(4, n+1) = G(4, n) + G[3, E(n/2) + 2\, \mathrm{rest}(n, 2)]$.
XXII″ $h \epsilon 1 + N_1 . \supset . G(4, 2h+5) - G(4, 2h+4) = G(4, 2h+2) - G(4, 2h+1)$
$= G(4, 2h-1) - G(4, 2h-2) + E(h/2) - 1 = G(3, h+2)$.

17. E studiamo dunque il caso di n dispari.

G (4, 1) = G (4, 3) = G (4, 5) = G (4, 7) = 0. Si consideri poi il quadro R; nel quale i righi successivi sono progressioni aritmetiche di ragioni 1, 2, 3, ecc., e si passa dall'ultimo termine d'una progressione al primo della seguente, aggiungendo la ragione di questa: e da esso si deduca il quadro Q, il cui primo termine = 0, e ogni altro = precedente + termine che nel quadro R occupa lo stesso posto del precedente. I successivi termini di questo quadro Q dànno i valori di G (4, 9), G (4, 11), G (4,13), ecc., quali si possono leggere nella colonna IV della tabella dell'*Introductio*. Una formula per G (4, n), quando n sia dispari, si presenta allora immediata (¹); ma noi ne studieremo una più conveniente.

R)			Q)		
1	2	3	0	1	3
5	7	9	6	11	18
12	15	18	27	39	54
22	26	30	72	94	120
. . .	. .		. . .	. .	

18. Adopereremo la proposizione:

XXIII $\quad h \in N_1 . \supset . G(4, 2h+7) = G(4, 2h+1) + (h-1)h/2;$

che, quando $h > 3$, si può enunciare dicendo: " l'h^{mo} termine del quadro Q è uguale al termine immediatamente sovrapposto, + l'$(h-1)^{mo}$ numero triangolare ".

La formula è vera per $h = 1$ o 2; e, suppostala vera per un dato valore di h, lo è per $h+2$, come si trae dalla V e dalla XV: ed è dunque vera in generale.

19. E allora, col metodo del n. 10:

XXIV $\quad h \in N_0 . c \in 0 \cdots 13 . \supset . G(4, 2h+7) = E\{[h^2(h+3)+c]/18\}.$

Leggeremo: " le quaterne di somma $2h+7$ sono tante quant'è la parte intera di $h^2(h+3)/18$; al numeratore della qual frazione è lecito aggiungere 1, 2, ..., fino a 13, senza alterare il risultato ".

(¹)
$h \in N_0 . q = \text{quot}(h, 3) . r = \text{rest}(h, 3) . \supset . G(4, 2h+3) = q(3q^2 + hr - h - r)/2.$

Con questa XXIV, e con la prima uguaglianza della XXII, la ricerca d'una formula per $G(4, n)$ può dirsi compiuta. Ma nei due numeri qui appresso giungeremo direttamente a una semplice espressione di $G(4, n)$, quando n sia pari.

20. Comincio dallo stabilire la formula:

XXV $\quad h \epsilon 3+N_1 . \supset . G(4,2h+6)=G(4,2h-6)+(h-2)(h-3)+3.$

Si trasformi perciò la XXIII con la seconda uguaglianza della XXII, e avrò che

$$G(4, 2h+6)+G(3, h+3)=G(4, 2h)+G(3, h)+(h-1)h/2;$$

cioè, trasportando $G(3, h)$ e tenendo conto della V, che

$$G(4, 2h+6)+G(2, h)=G(4, 2h)+(h-1)h/2.$$

Questa uguaglianza, sommata con quella che si deduce da essa cambiando h in $h-3$, dà subito (v. XIV) la formula da dimostrare.

21. E, allora col solito metodo del n. 10:

XXVI $\quad h \epsilon N_0 . c \epsilon 8 \cdots 26 . \supset . G(4, 2h+6)=E[(2h^3+3h^2+c)/36].$

Leggeremo: " le quaterne di somma $2h+6$ sono tante quant'è la parte intera di $(2h^3+3h^2+8)/36$: nel numeratore della qual frazione è lecito, al posto di 8, leggere 9, 10, ..., fino a 26, senza alterare il risultato ".

22. Le XXIV e XXVI si possono, e in più modi, riunire in una sola. Citiamo, come esempio, la formula:

XXVII $\quad n \epsilon N_0 . \supset .$
$G(4, n+6)=E\{([E(n/2)]^2[n+3+2 \operatorname{rest}(n, 2)]+8)/36\}$ (1).

---

(1) Nella prima delle due Note citate, il Platner dà per $G(4, n)$ una formula contenente un C, che $= 24$ o a 21, secondochè n è pari o dispari, e un A_x, che $=-1$, o a 0, o a 1, a seconda dei valori del resto, x, di n per 12. Dello stesso tipo è la formula della seconda Nota; nella quale però il numero variabile con rest$(n, 12)$ ha dei valori, lì registrati, che vanno da 49 a 144. Le dette due formule, come le altre dello stesso Autore per $G(3, n)$, $G(5, n)$ e $G(6, n)$, sono senza dimostrazione.

" Tante sono le quaterne di somma $n+6$. E, se $n>0$, tanti sono pure i modi, $G'(4,n)$, nei quali n può esser diviso in quattro parti, disuguali o uguali; e, se $n>4$, tanti pure i modi, $H'(4,n-4)$, nei quali $n-4$ può esser formato sommando degli 1, dei 2, dei 3 e dei 4 „.

23. Più semplici ci sembrano le formule distinte per n pari e n dispari. E perciò (v. IV) scriveremo:

XXVIII $\quad x \epsilon -1^{-}1 . \supset . 1/(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) =$
$\Sigma \{ (E[(2n^3+3n^2+8)/36] + E[(n^3+3n^2)/18]x) x^{2n-4} | n, 1+N_1 \}$.

24. Qui riunisco alcune relazioni tra i numeri $G(4,n)$, dimostrando solo quelle che si adoperano appresso.

XXIX $\quad h \epsilon N_0 . \supset .$
$G(4,2h+6)+G(4,2h+7)+G(4,2h+8)=h(h+1)(h+2)/6$.
$G(4,2h+5)+G(4,2h+6)+G(4,2h+7)=h(h^2-1)/6+E[(h/2)^2]$.

La prima uguaglianza è vera per $h=0$ o a 1; e, suppostala vera per un dato valore di h, lo è per $h+2$, come si trae dalla V e dalla:

$$h \epsilon N_0 . \supset . G(3,2h+6)+G(3,2h+7)+G(3,2h+8)=(h+2)^2;$$

che è un caso particolare della XIX, registrato nell'apposita nota: ed è dunque vera in generale. In modo simile si dimostra l'altra uguaglianza.

XXX $\quad h \epsilon N_1 . \supset .$
$G(4,2h) \quad +G(4,2h+5)+G(4,2h+10)=h(h^2+11)/6$.
$G(4,2h+1)+G(4,2h+6)+G(4,2h+11)= \quad$ „ $\quad +1+E[(h/2)^2]$.
$G(4,2h+9) \quad =G(4,2h) \quad +h(h-1)/2+ \quad$ „ .
$G(4,2h+4)+ \quad$ „ $\quad =E[(h^3+1)/9]$.
$G(4,2h+2)+G(4,2h+4)=2G(4,2h+3)+E(h/3)$.

Dimostro la prima uguaglianza. In virtù della V, il primo membro

$$=[G(4,2h+4)-G(3,2h)]+G(4,2h+5)+ \\ [G(4,2h+6)+G(3,2h+6)],$$

che, per la XXIX e la XV,

$$= (h - 1)\, h\, (h + 1)/6 + 2h, \text{ cioè ad } h\, (h^2 + 11)/6.$$

In modo simile si dimostra la seconda uguaglianza.

XXXI $\quad n \in N_0 \,.\, \mathsf{O} \,.$

$$G(4, n + 6) - G(4, n + 3) = E(n/4) \times E[(n + 2)/4] = E\{[E(n/2)/2]^2\} \text{ (1)}.$$

Cinquine di data somma.

25. La formula:

XXXII $\quad h \in N_1 \,.\, \mathsf{O} \,.\, G(5, 2h + 15) = G(5, 2h) + h\,(h^2 + 11)/6$

ci permette di restringere la ricerca d'una formula per $G(5, n)$ al solo caso di n pari.

Per dimostrarla, osservo che, in virtù della V:

$$\begin{aligned} G(5,n+15) &= G(5,n+10) + G(4,n+10), \\ &= G(5,n+5) + G(4,n+5) + \text{ ,, }, \\ &= G(5,n) + G(4,n) + \text{ ,, } + \text{ ,, }, \end{aligned}$$

qualunque sia il numero n; cioè, ponendo $2h$ per n, e tenendo conto della XXX, = quanto si è scritto.

26. E cerchiamo dunque di esprimere $G(5, n)$ nel caso di n pari. Adopereremo la formula:

XXXIII $\quad h \in 15 + N_1 \,.\, \mathsf{O} \,.$

$$G(5, 2h + 30) = G(5, 2h - 30) + h\,(4h^2 - 45h + 1055)/6 - 590.$$

---

[1]) Col teorema d'aritmetica dato dall'ultima uguaglianza, noto l'altro:

$$n \in 1 + N_1 \,.\, \mathsf{O} \,.\, E\{[(n-1)/2]^2\} + E\{[(n+2)/2]^2\} - E\{[(n+1)/2]^2\} - E\{[(n-2)/2]^2\} = n.$$

Per stabilir la quale, pongo $2h+15$ al posto di n nella espressione di $G(5, n+15)$ data nel n. 25, e tengo conto della XXXII e della XXX. Avrò che:

$$G(5, 2h+30) = G(5, 2h) + h(h^2+11)/6 + (h+7)[(h+7)^2+11]/6 + 1 + E\{[(h+7)/2]^2\}.$$

Sommo questa relazione con quella che si ottiene da essa leggendo $h-15$ al posto di h, e giungerò alla formula da dimostrare [1].

27. E allora, col solito metodo del n. 10, la XXXIII dà la formula:

XXXIV $\quad h \in N_0 \,.\, c \in 45 \cdots 287 \,.\, \supset .$
$$G(5, 2h+10) = E[(2h^4 + 10h^3 + 5h^2 - 30h + c)/360].$$

Deduco da questa e dalla XXXII una espressione per $G(5, 2h+11)$, quando $h \geq 6$; ed è quella che scriveremo nella XXXIV′, nell'ipotesi però che il numero c soddisfi alla condizione: $72 \leq c < 314$. Si riconosce subito la validità della espressione stessa anche per $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, purchè si prenda c maggiore di 111. Sicchè:

XXXIV′ $\quad h \in N_0 \,.\, c \in 112 \cdots 314 \,.\, \supset .$
$$G(5, 2h+11) = E[(2h^4 + 14h^3 + 23h^2 + 6h + c)/360].$$

Non è difficile riunire le XXXIV e XXXIV′ in una formula sola, come abbiamo fatto nel n. 22 per i numeri $G(4, n)$; ma preferiamo tenerle separate, ricavando i valori di $G(5, n+10)$ dall'una o dall'altra, secondochè n è pari o dispari [2]. " Tante

---

[1] Si incontrerà la formula d'aritmetica:

$$h \in 8 + N_0 \,.\, \supset .\, E\{[(h+7)/2]^2\} + E\{[(h-8)/2]^2\} = (h+7)(h-8)/2 + 56.$$

In generale:

$$h, k \in N_0 \,.\, \supset .\, E[(h/2)^2] + E\{[(h+2k+1)/2]^2\} = h(h+2k+1)/2 + k(k+1).$$

[2] Il Platner dà per $G(5, n)$ una formula contenente un C, il cui valore cambia da n pari a n dispari, e un A_x, che $=1$, quando $x=0$, e, in

sono le cinquine di somma $n + 10$. E, se $n > 0$, tanti sono pure i modi, $G'(5, n)$, nei quali n può esser diviso in cinque parti, disuguali o uguali; e, se $n > 5$, tanti pure i modi, $H'(5, n - 5)$, nei quali $n - 5$ può esser formato sommando degli 1, dei 2, dei 3, dei 4, e dei 5 „.

Concludo scrivendo la:

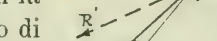
XXXV $x \epsilon - 1^{-}1 . \supset .$
$1/(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) = 1 +$
$\Sigma \} (E[(2n^4 + 10n^3 + 5n^2 - 30n + 45)/360] +$
$E[(2n^4 + 14n^3 + 23n^2 + 6n + 112)/360]\, x)\, x^{2n-5} | n, 2 + N_1 \};$

e, a titolo di saggio delle proprietà dei numeri $G(5, n)$, la:

XXXVI $h \epsilon 5 + N_0 . \supset . G(5,2h-7) - 2G(5,2h-8) + G(5,2h-9) =$
$G(5,2h+8) - 2G(5,2h+7) + G(5,2h+6).$

---

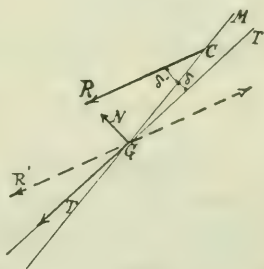
ogni altro caso, è uguale al numero, registrato in una tabella, delle cinquine di somma il resto, x, di n per 60. Anche una sua seconda formula contiene un numero come C, ed è accompagnata da una tabella, che dà i 59 valori, da 949 a 2880, di un altro numero.

Formole razionali per il calcolo della derivazione dei proietti.

Nota dell'Ing. FILIPPO BURZIO.

(Con 1 Tavola).

La soluzione del problema della stabilità dei proietti ([1]), la quale implica la determinazione dello scostamento δ dell'asse di figura dalla tangente alla traiettoria del centro di gravità del proietto, per ogni punto di questa, elimina il maggior ostacolo che s'incontra nella teoria della derivazione, e permette quindi di affrontare in migliori condizioni anche la soluzione di questo problema.

Sappiamo che, per effetto del divergere dell'asse di figura GM dalla tangente GT alla traiettoria, dovuto all'incurvarsi di questa, in causa della gravità, la resistenza dell'aria, da tangenziale diventa obliqua, e origina così la coppia perturbatrice, la quale, suscitando nel proietto la reazione giroscopica, fa fuoruscire l'asse di figura dal piano iniziale di tiro (piano verticale passante per la tangente all'origine della traiettoria).

L'asse di figura forma allora con la tangente un piano diverso dal piano di tiro, detto *piano di resistenza*, nel quale giace la resistenza R dell'aria applicata al centro di resistenza C: il trasporto di R da C al centro di gravità G dà origine alla $R' \equiv R$, e alla coppia perturbatrice $\mathfrak{M}$, la cui azione si esplica nel moto del proietto relativo al centro di gravità. La componente tan-

[1] V. la mia Nota: *Una soluzione del problema della stabilità dei proietti* (" Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. 52, disp. 11ª).

genziale T della R' è la *forza ritardatrice* considerata dal Problema balistico principale: la componente normale N è la *forza deviatrice*, la quale determina la fuoruscita del centro di gravità dal piano iniziale di tiro, in cui si svolge il moto piano fittizio di G considerato dal problema balistico principale.

È a questo fenomeno della fuoruscita di G dal piano iniziale di tiro che si dà il nome di *derivazione*.

Se noi riferiamo il proietto a tre assi cartesiani ortogonali, di cui l'asse x orizzontale e l'asse y verticale siano nel piano iniziale di tiro, la *misura* della derivazione è data ad ogni istante dall'ordinata z del baricentro: e il *problema* relativo consiste nel determinare ad ogni istante il valore di z, o, che è lo stesso, nel *costruire la curva proiezione sul piano* xz *della traiettoria del centro di gravità*; detta appunto *curva della derivazione.*

Osservazioni sulle teorie della derivazione dello Charbonnier e del Mayewski.

Sia il piano di resistenza GMT. Poniamo $\delta_1 = \varphi(\delta)$: e se, nello sviluppo in serie di φ trascuriamo, in vista della piccolezza di δ, le potenze di δ stesso superiori alla 1ª, abbiamo $\delta_1 = k\delta$. Inoltre, se m è la massa del proietto, e $I = cF(v)$ l'accelerazione dovuta alla forza T, si ha che T vale $mcF(v)$: e quindi per la *forza deviatrice* N si ha la seguente espressione:

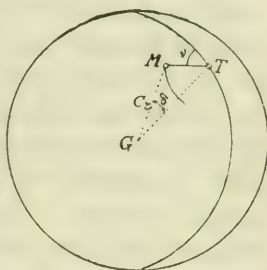
$$N = mcF(v) \tan(\delta_1 - \delta) = mcF(v)\,\delta\,(k - 1).$$

È questa la forza che principalmente figura nell'equazione differenziale del moto di derivazione. Allo scopo di eliminare l'angolo δ, lo Charbonnier ricorre, nella *teoria della derivazione*, alle considerazioni fondamentali della *teoria della precessione*, quale è svolta nella sua Balistica [1]: queste considerazioni si fondano essenzialmente sull'affermata identità del moto elementare del proietto, relativo al suo centro di gravità, col moto

---

[1] CHARBONNIER, *Traité de Balistique extérieure*, pag. 238 e seg.; ID., *Balistique extérieure rationnelle*, vol. II, " Problèmes Balistiques secondaires ", pag. 297 e seg.

permanente della *trottola*, ove alla verticale si faccia corrispondere la tangente alla traiettoria, e alla coppia dovuta alla gravità, la coppia dovuta alla resistenza dell'aria. Da tale identità, che a me sembra arbitrariamente affermata, si deduce che il moto dell'asse di figura del proietto si compone di una successione di rotazioni elementari attorno alle successive posizioni della tangente, rotazioni effettuate con una velocità angolare, chiamata dall'A. *velocità di precessione* b_p, e avente per valore il quoziente della velocità di un certo punto M dell'asse di figura posto a una distanza Cr da G [1], per il raggio MT del preteso cerchio descritto da M attorno a T, il quale vale $Cr\delta$: donde

$$b_p = \frac{mlkcF(v)\delta}{Cr\delta} = \frac{mlkcF(v)}{Cr}.$$

Ho fatto altrove [2] la critica di questa teoria, segnalando la differenza che esiste frà il moto della trottola e quello del proietto relativo al suo centro di gravità: e mostrando che, considerare il moto dell'asse di figura del proietto come una successione di rotazioni elementari attorno alla tangente, equivale a trascurare, rispetto al moto elementare dell'asse di figura, quello di abbassamento della tangente, cioè un infinitesimo rispetto a un altro di pari grado: ora basterà osservare che questa cosiddetta velocità di precessione b_p, nell'espressione della quale si riesce, in modo fittizio, a eliminare il δ, non è, nè la *velocità angolare assoluta* dell'asse di figura (s'intende, sempre, nel moto relativo al baricentro), la quale vale $\frac{\mathfrak{M}}{Cr} = \frac{mlkc\delta F(v)}{Cr}$, nè la *velocità angolare del moto relativo* dell'asse di figura rispetto alla tangente, la quale si deduce dalla precedente aggiungendovi geometricamente la velocità angolare di abbassamento della

---

(1) Cfr. la Nota citata: “ C è il momento d'inerzia del proietto rispetto “ all'asse di figura, r la velocità angolare di rotazione propria del proietto; “ Cr il valore che si può approssimativamente ritenere costante del momento della quantità di moto ”.

(2) V. la mia Nota: *Sul moto e sulla stabilità dei proietti*, in corso di pubblicazione sulla “ Rivista di Artiglieria e Genio ”.

tangente, cambiata di segno: poichè quest'ultima è data dalla 2ª equazione fondamentale della balistica esterna: $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{g\cos\tau}{v}$, si ha: $\frac{mlkc\delta F}{Cr} + \frac{g\cos\tau}{v}$. In questa ultima espressione si è sostituita, alla somma geometrica, la somma algebrica delle velocità angolari: ciò sta con grande approssimazione, dato che, sulla sfera ausiliaria, la curva di precessione, luogo dell'estremità dell'asse di figura, si mantiene vicinissima al cerchio massimo luogo della tangente, quindi anche le loro velocità angolari si scostano di poco l'una dall'altra: d'altronde la somma geometrica delle due quantità non sarà certo prossima al valore b_p più che non lo sia la loro somma algebrica.

Svolgendo la teoria della precessione del De Sparre (fondata sullo stesso concetto), lo Charbonnier considera la sfera ausiliaria di centro G e raggio 1; e determina il luogo dell'intersezione dell'asse di figura con detta sfera, detto *curva di precessione*, come rolletta, in cui funzionano da polare fissa il cerchio massimo, luogo delle intersezioni, con la sfera, delle tangenti alla traiettoria nel moto principale, e da polare mobile una curva, chiamata *rolletta di precessione*, di cui la teoria determina gli elementi: detta teoria viene così ad affermare che δ può mediamente essere uguagliato al raggio di curvatura della rolletta di precessione, del quale dà l'espressione: $R_p = -\frac{\frac{d\tau}{dt}}{b_p}$: e scrive pertanto: $\delta = -\frac{\frac{d\tau}{dt}}{b_p}$.

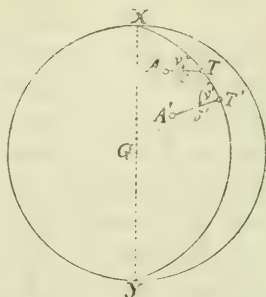
Di questo valore così trovato per δ, lo Charbonnier si vale, nella teoria della derivazione, per eliminare il δ stesso dalla espressione della forza deviatrice. Senza entrare in particolari di critica, l'aver mostrato che la velocità di precessione b_p è un concetto, ed ha un valore, fittizi, permette di affermare la minor esattezza di una teoria della derivazione fondata su queste basi.

Il gener. Mayewski [1] segue nella sua teoria del moto dei proietti oblunghi nell'aria quello che si può chiamare metodo analitico generale, fondato sulle 3 note equazioni di Eulero, che

---

[1] N. Mayewski, *Traité de Balistique*, pag. 154 e seg.

reggono il moto più generale di un sistema rigido avente punto fisso, o quello relativo al baricentro; e sulle 3 altre equazioni che legano le velocità angolari rispetto ai 3 assi principali centrali d'inerzia ai parametri di Eulero. Perviene così a stabilire espressioni che sarebbero notevoli, se pure complicatissime, delle quantità $\frac{d\mathfrak{d}}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$. Bisogna però notare che il M. fa uso delle ordinarie equazioni di Eulero adottando come asse della terna fissa la tangente, la quale modifica invece la propria orientazione nello spazio (questo, del considerar fissa la tangente, è l'errore di cui il M. stesso, nella prefazione, muove appunto al S. Robert, riferendosi al primo abbozzo, dato da questi, di una teoria della precessione dei proietti). Quando poi passa a tener conto pure del moto di abbassamento della tangente, cade sostanzialmente, ritengo, nello stesso errore dello Charbonnier e del De Sparre. Infatti:

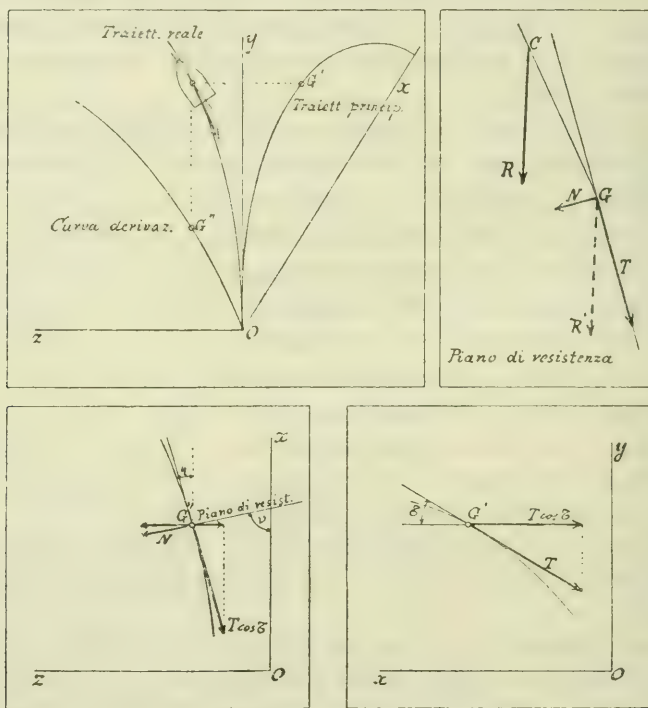
Se GA, GT sono le posizioni simultanee dell'asse di figura e della tangente, ad un certo istante, e GA', GT' quelle dopo un brevissimo intervallo di tempo, e se $AT = \mathfrak{d}$, $A'T' = \mathfrak{d}'$. $\widehat{GAT,TXY} = \nu$, $\widehat{GA'T',T'XY} = \nu'$ — l'A. ammette che si possa considerare $A'T = \mathfrak{d}$, e che l'incremento $d\nu$ dell'angolo ν sia dato dall'angolo $\widehat{GAT,GTA'}$: ora, entrambe queste ipotesi equivalgono ad ammettere che i due punti A ed A' si trovino sopra una circonferenza di centro T, cioè che il moto elementare di A sia di rotazione attorno a T. Di tali ipotesi l'autore si vale per stabilire le equazioni differenziali in $d\mathfrak{d}$ e $d\nu$, che poi integra per approssimazione.

L'applicazione di questa soluzione alla teoria della derivazione è analoga a quella dello Charbonnier: e cioè se ne ricavano valori medi da assegnare al prodotto $\mathfrak{d}$ sen ν, nell'integrazione approssimata dell'equazione della derivazione.

Nella teoria della derivazione del De Sparre, riportata dallo Charbonnier, si cerca, mediante laboriosi sviluppi in serie, di dare una valutazione più precisa della quantità $\mathfrak{d}$ sen ν, in fun-

zione dei raggi di curvatura della rolletta di precessione e delle sue successive evolute. Sussiste però l'errore iniziale della generazione della curva di precessione come rolletta di cui la retta della T sia la polare fissa.

Equazione della derivazione.

Cerchiamo l'espressione delle forze che agiscono secondo l'asse z.

La forza R' essendo contenuta nel piano di resistenza, le sue due componenti, T, forza ritardatrice, diretta secondo la

tangente, N, forza deviatrice, normale alla tangente, vi giacciono pure. Il considerare, pertanto, N diretta secondo z, come fanno, in 1ª approssimazione, taluni autori, implica supporre che l'angolo ν del piano di resistenza col piano iniziale di tiro

valga $\frac{\pi}{2}$, e che il piano di tiro istantaneo (piano verticale passante per la tangente) abbia la stessa giacitura del piano iniziale di tiro, mentre i due piani formano in realtà l'angolo η. Assumere invece, come componente di N secondo z, la $N \operatorname{sen} \nu$, significa tener conto del vero valore di ν. Si fa tuttavia un errore residuo, ed è quello di supporre la N orizzontale, cioè distesa lungo la traccia del piano di resistenza sul piano xz (nel qual caso soltanto la sua componente secondo z vale $N \operatorname{sen} \nu$). Si osservi però che anche tale errore è 0 quando $\nu = \frac{\pi}{2}$, $\eta = 0$: ora ν è assai prossimo a $\frac{\pi}{2}$ durante la maggior parte del percorso, e η si mantiene sempre piccolissimo, com'è provato dal fatto sperimentale che le derivazioni sono sempre assai piccole rispetto alle gittate: quindi anche detto errore della 2ª approssimazione è assai piccolo.

Anche la forza ritardatrice T, la quale vale $mcF(v)$, non essendo contenuta nel piano iniziale di tiro, ammette una componente secondo z: questa vale (salvo l'osservazione che faremo ora) $mcF \cos \tau \operatorname{sen} \eta$.

Se si considera che con mcF si esprime la forza ritardatrice che figura nel Problema balistico principale, il quale studia il moto fittizio di G nel piano iniziale di tiro, cioè in sostanza la proiezione, su questo piano, del moto reale di G, si può concludere che vi è contraddizione, usando la stessa espressione mcF per la forza ritardatrice effettiva e per quella agente nel moto fittizio suddetto. *L'errore sta però dalla parte del problema balistico principale*, e non della teoria della derivazione, perchè c e $F(v)$ sono grandezze sperimentali, e devono pertanto riferirsi alla T effettiva: questo errore è però assai piccolo, dato che tale è η: e potrebbe anche eliminarsi, facendo ricorso alla teoria della derivazione, la quale determina η. È dunque rigoroso scrivere mcF come espressione della T: un piccolo errore si commette invece, pur nella teoria della derivazione, esprimendo con $mcF \cos \tau$ la sua componente orizzontale: infatti τ è l'inclinazione della tangente nel moto principale, e non nel moto reale: ma sta la solita osservazione sulla piccolezza di η, che quasi confonde i 2 moti.

Ciò posto, possiamo scrivere l'equazione differenziale della derivazione [1]:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = - mcF \cos \tau \operatorname{sen} \eta + mcF\delta (k-1) \operatorname{sen} \nu ;$$

ed essendo η assai piccolo:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - cF \cos \tau \times \eta + cF\delta (k-1) \operatorname{sen} \nu . \tag{1}$$

Ora, $dz = \eta dx$, donde

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \eta \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} \frac{dx}{dt} .$$

Ma il problema balistico principale dà, per il moto su $0x$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - cF \cos \tau ; \qquad \frac{dx}{dt} = v \cos \tau .$$

Si avrà, sostituendo nella (1):

$$- cF \cos \tau \eta + \frac{d\eta}{dt} v \cos \tau = - cF \cos \tau \eta + cF\delta (k-1) \operatorname{sen} \nu ;$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{cF\delta (k-1) \operatorname{sen} \nu}{v \cos \tau} . \tag{2}$$

Se si tien conto della risoluzione del problema della stabilità del proietto, la quale implica la determinazione di δ e ν ad ogni istante, si vede che tutte le quantità che figurano nel 2° m. della (2) sono, ad ogni istante, note: è pertanto possibile l'integrazione approssimata di questa equazione, per successivi intervalli sufficientemente piccoli, nei quali le varie quantità del 2° m. possano ritenersi costanti nei loro valori medi.

Ricordando poi che $\eta = \frac{dz}{dx}$, si vede come una successiva integrazione approssimata permetta di determinare la derivazione.

---

[1] Cfr. CHARBONNIER, op. oit.

Per il calcolo numerico conviene assumere come parametro indipendente, anzichè il tempo t, l'inclinazione τ della tangente sull'orizzonte, nel moto principale. Si ha:

dalla 2ª equazione fondamentale della balistica esterna: $dt = -\frac{v}{g\cos\tau}\,d\tau$;

dalla teoria del tiro curvo a piccola velocità [1]: $dx = -\frac{u^2}{g\cos^2\tau}\,d\tau$, dove u è la componente orizzontale di v.

Si useranno dunque le due equazioni:

$$\textit{per le inclinazioni:}\quad \Delta\eta = \frac{(k-1)\,c}{g}\;\frac{\delta_m \operatorname{sen} \nu_m\, F(v_m)}{\cos^2\tau_m}\,(-\Delta\tau),$$

$$\textit{per le derivazioni:}\quad \Delta z = \eta_m \frac{u_m{}^2}{g\cos^2\tau_m}\,(-\Delta\tau).$$

CONCLUSIONE

Sembra che in questo modo il calcolo razionale della derivazione potrebbe finalmente entrare nel campo pratico, data anche la semplicità delle formole: quanto meno come efficace controllo dei dati sperimentali.

Applicazione.

Ci riferiremo alle stesse condizioni supposte nello svolgere l'esempio di verifica della stabilità di un proietto, nella Nota citata.

Consideriamo perciò il mortaio da 210, e la sua granata di acciaio a bocchino anteriore, del peso di kg. 101. Supponiamo il tiro della massima elevazione, con $\alpha = 60°$, e con velocità iniziale $v_0 = 263\ {}^{m}/_{sec}$. Ci proponiamo di determinare la derivazione del centro di gravità del proietto.

---

[1] V. Charb., *Traité de Balistique* cit., pag. 254. Questa equazione vale per il tiro curvo: per il tiro teso bisogna ricorrere all'equazione corrispondente, data dalla teoria del tiro teso: $dx = -\frac{u^2}{g\cos\tau}\,d\tau$.

Esprimeremo anche qui le varie grandezze in metri, chilogrammi, secondi.

Abbiamo, per le quantità che figurano nelle formole:

$$k = 2{,}0909\,; \qquad g = 9{,}81\,; \qquad c = 0{,}000373.$$

Riportiamo inoltre dalla Nota citata la tabella relativa ai valori di δ, e calcoliamo quella relativa all'angolo ν, con la solita avvertenza che l'attendibilità dei valori numerici di δ e ν cessa oltre $\tau = -36°$.

Angolo δ.

τ^0	δ^0	τ^0	δ^0	τ^0	δ^0
60°	0	18°	7,80	— 30°	22,75
58	1,69	12	7,96	— 36	36,93
54	3,85	6	8,09	— 42	60
48	5,68	0	8,10	— 48	96,50
42	6,82	— 6	8,12	— 54	151
36	7,56	— 12	8,49	— 60	265
30	7,39	— 18	10,13		
24	7,63	— 24	14,43		

Angolo ν.

τ^0	ν^0	τ^0	ν^0	τ^0	ν^0
60°	—	18°	81,50	— 30°	174,17
58	1,95	12	81,50	— 36	186,83
54	30	6	82	— 42	198,17
48	49,53	0	87,50	— 48	210,42
42	59,25	— 6	96,78	— 54	228,08
36	65,10	— 12	113,07	— 60	244
30	82,75	— 18	135,50		
24	81,13	— 24	157,33		

I. — Calcolo delle inclinazioni.

Applichiamo l'equazione

$$\Delta\eta = \frac{(k-1)\,c}{g}\;\frac{\delta_m \operatorname{sen} \nu_m F(v_m)}{\cos^2 \tau_m}\,(-\Delta\tau)$$

dove si ha

$$\frac{(k-1)\,c}{g} = 0{,}0000415.$$

Si è ricavata la seguente tabella:

τ^0	$\Delta\eta$	η
60°	—	—
58	0,000012	0,000012
54	0,000859	0,000871
48	0,0030	0,0039
42	0,0032	0,0071
36	0,0028	0,0099
30	0,0024	0,0123
24	0,0020	0,0143
18	0,0016	0,0159
12	0,0015	0,0174
6	0,0014	0,0188

τ^0	$\Delta\eta$	η
0°	0,0014	0,0202
— 6	0,0014	0,0216
— 12	0,0014	0,0230
— 18	0,0015	0,0245
— 24	0,0014	0,0259
— 30	0,0012	0,0271
— 36	— 0,000087	0,0270
— 42	— 0,0047	0,0223
— 48	— 0,0192	0,0031
— 54	— 0,0774	—0,0743
— 60	— 0,298	—0,372

II. — Calcolo delle derivazioni.

Applichiamo l'equazione

$$\Delta z = \eta_m \frac{u_m^2}{g \cos^2 \tau_m}(-\Delta\tau), \qquad \text{dove} \qquad \Delta x = \frac{u_m^2}{g \cos^2 \tau_m}(-\Delta\tau).$$

Nel nostro caso

$$u = u_0 = v_0 \cos\alpha = 131{,}5$$

$$\frac{u^2}{g} = 1762{,}7.$$

Si è calcolata la seguente tabella:

τ^0	Δx metri	x metri	Δz metri	z metri
60	—	—	—	—
58	232	232	0,0014	0,0014
54	394	626	0,174	0,175
48	465	1091	1,107	1,282
42	369	1460	2,02	3,30
36	305	1765	2,59	5,89
30	262	2027	2,90	8,79
24	232	2259	3,08	11,87
18	212	2471	3,19	15,06
12	198	2669	3,30	18,36
6	189	2858	3,43	21,79
0	185	3043	3,61	25,40
— 6	185	3228	3,87	29,27
— 12	189	3417	4,22	33,49
— 18	198	3615	4,69	38,18
— 24	212	3827	5,32	43,50
— 30	232	4059	6,15	49,65
— 36	263	4321	7,09	56,74
— 42	305	4626	7,53	64,27
— 48	368	4994	4,68	68,95
— 54	466	5460	— 16,60	52,35
— 60	590	6050	—131,50	—79,15

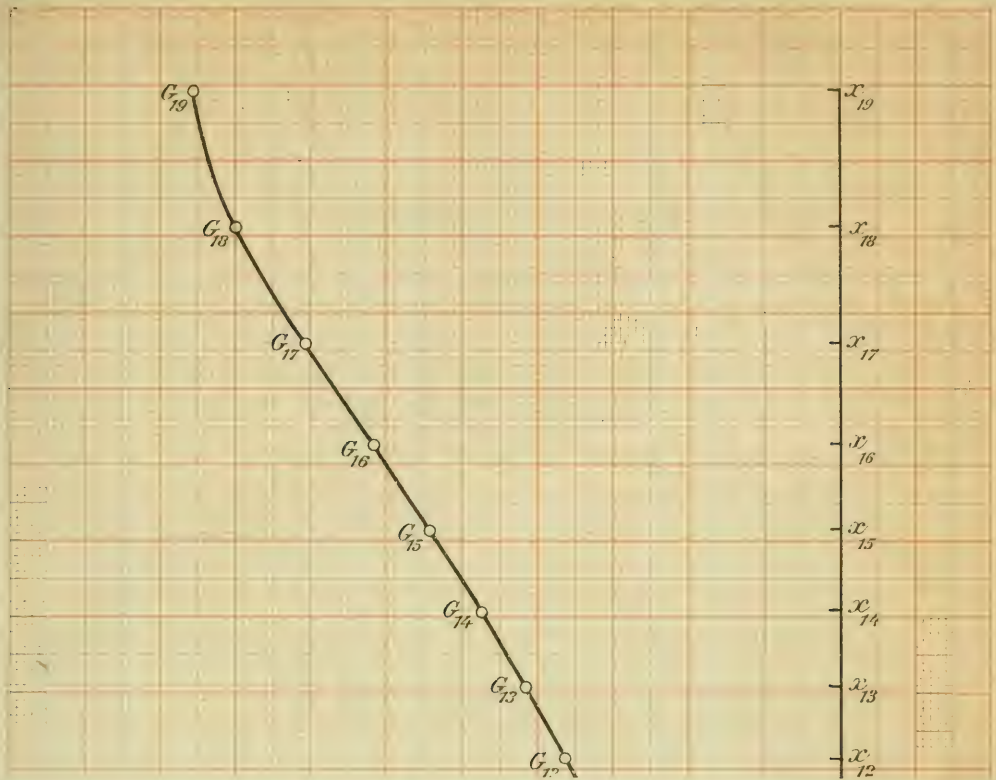
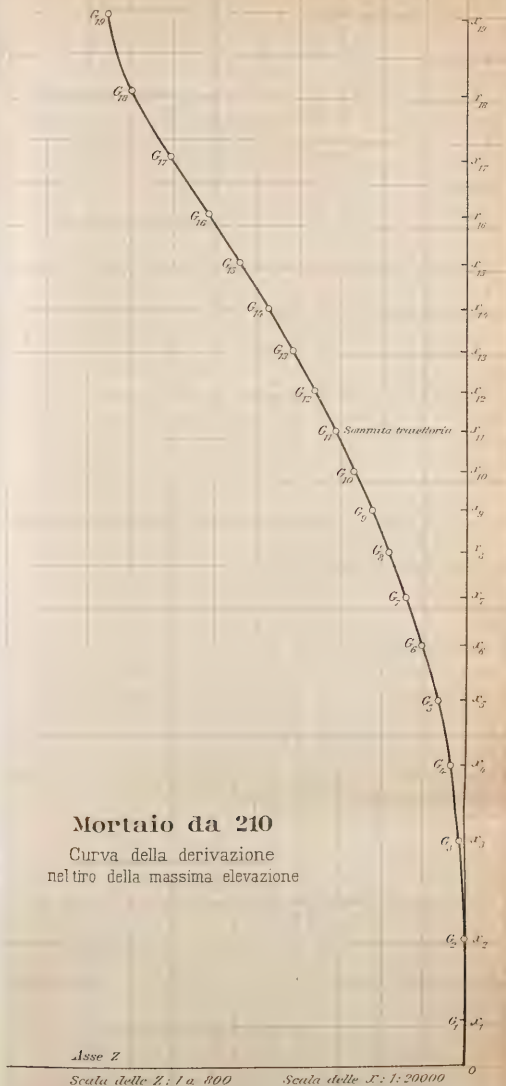
Osservazione. — Si noti che gli ultimi valori di z corrispondono alla fase di rovesciamento del proietto, e non sono più numericamente attendibili.

Torino, 21 maggio 1917.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

G_{19}
G_{18}
G_{17}
G_{16}
G_{15}
G_{14}
G_{13}
x_{19}
x_{18}
x_{17}
x_{16}
x_{15}
x_{14}
x_{13}
x_{12}

Mortaio da 210

Curva della derivazione nel tiro della massima elevazione

CLASSI UNITE

Adunanza del 10 Giugno 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Naccari, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, De Sanctis, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini in funzione di Segretario.

È scusata l'assenza dei Soci Parona, Brondi, ed Einaudi.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza delle Classi unite del 27 maggio u. s.

Il Presidente dà notizia di un telegramma da lui inviato a nome dell'Accademia e suo a S. E. Paolo Boselli per esprimergli rallegramenti e augurî riverenti affettuosi fervidissimi per il suo 79° compleanno. Legge la seguente risposta telegrafica di S. E. Boselli: “ Gli augurî che Ella mi invia a nome “ di codesta Reale Accademia giungono graditissimi al mio cuore. “ Con animo grato porgo vivi ringraziamenti a Lei ed agli “ illustri Consoci. Boselli „.

Poscia il Presidente comunica che, in seguito ad invito del Rettore della R. Università di Napoli, delegò il Socio nazio-

nale non residente Senatore Francesco D'Ovidio a rappresentare la Reale Accademia alla celebrazione del primo centenario della nascita di Francesco De Sanctis, celebrazione che ebbe luogo giovedì 7 giugno alle ore 16 in quel palazzo universitario.

A norma dello art. 7 del Regolamento interno pel conferimento dei premi Gautieri, si procede alla votazione a schede segrete sulla proposta unanime della Commissione per il premio di Storia (triennio 1913-1915), che il detto premio debba essere diviso e assegnato, per una metà, al Prof. Pietro Egidi, autore dell'opera *La colonia saracena di Lucera e la sua distruzione* (Napoli, 1915), e, per l'altra metà, al Prof. Silvio Pivano, autore dell'opera *Albori costituzionali d'Italia* (Torino, 1913).

Partecipano alla votazione i 20 Soci presenti; e il premio risulta attribuito in parti uguali alle due predette opere alla unanimità. Perciò il Presidente proclama aggiudicato il premio in tal senso ai Professori Pietro Egidi e Silvio Pivano.

Ai termini dell'art. 4 del Regolamento interno pel conferimento dei premi Bressa si procede alla votazione per la nomina di due membri per ciascuna Classe, i quali devono integrare la Commissione per il premio Bressa nazionale e per il quadriennio 1913-1916, già composta dei Soci Naccari, Parona e D'Ovidio per una Classe, e De Sanctis, Stampini e Ruffini per l'altra Classe. Risultano eletti i Soci Grassi e Somigliana per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e Schiaparelli e Patetta per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Gli Accademici Segretari

Carlo Fabrizio Parona
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Giugno 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Pizzi, De Sanctis, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, S. E. Ruffini, Brondi, ed Einaudi.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 20 maggio u. s.

Il Socio Patetta, a nome della Direzione e della Commissione per gli acquisti del Museo Civico di Torino, porge vivi ringraziamenti alla Classe, in seguito al cui unanime voto il Ministero della Istruzione affidò appunto al detto Museo Civico la custodia dell'antico fiorino d'oro battuto dall'Ordine di Rodi e trovato in Piemonte nell'antica casa dei Provana.

Il Socio Prato e il Socio Stampini parlano sul recente opuscolo inviato in dono alla Accademia dall'autore Arthur Macdonald, e intitolato *War and Criminal Anthropology*. La Classe ringrazia l'autore.

Il Socio Segretario Stampini presenta il volume n° 9 del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum*, inviato in omaggio

all'Accademia dalla Ditta editrice, che ha per titolo *P. Vergilii Maronis Bucolicon liber. Accedunt carmina Moretum, Copa*, per cura di Carlo Pascal, direttore della collezione. La Classe ringrazia. Presenta inoltre l'opera *Scritti e Discorsi mentre dura la guerra* di D. J. Card. Mercier, testè edita in Roma. La Classe ringrazia la Ditta editrice.

In fine il Socio Prato presenta per la pubblicazione negli *Atti* una sua prima *Nota* dal titolo *Postilla sul Costo della Guerra.*

LETTURE

Postilla sul costo della guerra.

Nota I del Socio GIUSEPPE PRATO.

Pochi fra gli economisti han resistito alla tentazione di dire la loro parola circa il costo della conflagrazione gigantesca; con risultati, a dir vero, assai discordi, per la diversità grande dei punti di vista iniziali, degli elementi considerati, dei metodi di calcolo prescelti.

Molto arduo, anche per chi si propone soltanto lo studio del costo finanziario in stretto senso — cioè della spesa monetaria sopportata dagli stati —, il problema diviene infatti formidabilmente complesso allorchè si tenta di estender l'indagine al costo economico vero e proprio, cioè a tutta la perdita, pubblica e privata, cagionata dal cataclisma bellico. Inutile aggiungere però che le ricerche riflettenti questo secondo punto sono le più seducenti, come quelle che, teoricamente e praticamente, posson condurre a qualche conclusione di interesse non puramente contabile.

Non è mio proposito esaminare o comunque confrontare il grado di attendibilità delle molte soluzioni in cui si esercitò la virtuosità critica degli insigni studiosi attratti dalla bellezza e difficoltà dell'argomento. La semplice classificazione delle loro ipotesi richiederebbe molto più spazio che non sia quello di cui mi è dato disporre.

A contributo lievissimo nell'operosa gara di congetture provocata dal vasto tema, desidero unicamente accennare ad un aspetto del medesimo, che mi parve dimenticato affatto o troppo trascurato fin qui.

Nella lacuna credo possa ravvisarsi una non lieve causa d'errore per parecchi dei calcoli proposti. Ritengo, a ogni modo, non debba prescindersene, nella valutazione sintetica che dal loro confronto dovrà scaturire.

È noto come i fenomeni di redistribuzione determinati dal colossale perturbamento abbiano dato luogo a una straordinaria fioritura di volgari errori, che in gran parte non sono che ritorni di vecchi e ostinati pregiudizi.

Uno dei più diffusi consiste nella credenza, comune a molte persone, anche non totalmente analfabete, che la guerra, suscitando attività ed energie latenti, e creando nuove fonti di guadagno, abbia piuttosto spostata che distrutta la ricchezza esistente; la cui circolazione più rapida non potè far capo a una perdita secca se non nel caso e nella misura dei pagamenti all'estero, in moneta o in titoli. Attilio Cabiati ha testè dedicata alla confutazione pressochè matematica del paradossale assurdo una lucida nota (1); senza riuscir ad impedire che, a scopo di sabotaggio dell'economia scientifica, da taluni scrittori si continuasse a presentare, dissimulata in ambigue divagazioni di concetto e di forma, la vieta superstizione (2).

La quale tuttavia — come accade di tutti i paradossi — è, in fondo, soltanto la deformazione unilaterale d'un principio

---

(1) Cfr. *Problemi finanziari della guerra*, in " Giornale degli economisti e rivista di statistica ", 1915, p. 112 e sgg. dell'estr.

(2) Cfr. A. Labriola, *Il paradosso economico della guerra*, in " Nuova antologia ", 16 dic. 1916. Non è il caso di parlare delle aberrazioni fantastiche a cui l'esagerazione logica dell'erroneo postulato unita all'ignoranza delle nozioni economiche più elementari conduce altri autori, che sembra si propongano la dimostrazione *ab absurdo* della grottesca puerilità dell'illusione. Così A. V. Eisenstadt, *Il paradosso della guerra che arricchisce*, in " Riv. delle nazioni latine ", febbr. 1917. A simili piacevolezze basterebbe contrapporre i rilievi di Vilfredo Pareto, provanti anche una volta che i principî della ortodossia e dell'esperienza economica non sono che la sistematizzazione scientifica del più elementare buon senso pratico. Cfr. E. Milani, *Il monito di V. Pareto*, in " La Confederazione del lavoro ", 1° giugno 1917.

di verità indiscutibile: che cioè costo finanziario di una guerra non equivale a danno economico dipendente dalla medesima, essendo numerosi ed importanti gli elementi compensatori.

Col prolungarsi oltre ogni previsione e con l'estendersi continuo della guerra, l'esistenza e l'entità di questi ultimi si son rese sempre più chiaramente palesi.

Nelle valutazioni molto congetturali della perdita economica complessiva proposta nei primi mesi del conflitto, scarsa attenzione era data a tale aspetto essenziale del problema. Lo trascuran del tutto o quasi il D'Eichtal (1), il Guyot (2), lo stesso Crammond (3). Già vi insiste invece F. W. Hirst (4); mentre un valore via via crescente gli assegnano scrittori che osservano il fenomeno in uno stadio di più avanzata maturazione: il Pantaleoni (5), l'Edgeworth (6), il Graziani (7), Gaetano Mosca (8), e, sopratutti, A. C. Pigou (9); dalle cui sagaci analisi la teoria critica del costo reale della guerra ebbe, in base alla nuova esperienza, sviluppi integratori e dilucidatori rilevantissimi, in confronto ai classici modelli del Giffen, del De Block, del De Foville.

S'io non m'inganno però l'indagine, al punto a cui fu condotta e lasciata da tanti benemeriti, rimane suscettibile di

---

(1) Cfr. *Des évaluations du coût de la guerre,* in " Revue des sciences politiques ", 15 febbraio 1915.

(2) Cfr. *The waste of war,* in " Nineteenth century ", dicembre 1914.

(3) Cfr. *The cost of the war,* in " Journal of the Royal statistical society ", maggio 1915.

(4) Cfr. *The political economy of the war,* Londra, 1915, pp. 120 e sgg.; 297 e sgg.

(5) Cfr. *Fenomeni economici della guerra,* in " Giornale degli economisti e rivista di statistica ", marzo, maggio, giugno 1916.

(6) Cfr. *The cost of war and ways of reducing it suggested by economic theory,* Londra, 1915.

(7) Cfr. *La guerra e le leggi economiche,* in " Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche di Napoli ", XLV, p. I (1916); e *Le future conseguenze economiche della guerra,* in " Scientia ", XIX (1916), n. XLV, 1.

(8) Cfr. *I danni economici della guerra,* in " Corriere della sera ", 25 luglio 1916.

(9) Cfr. *The economy and finance of the war,* Londra, 1916, pp. 12 e sgg.; 90 e sgg.

feconda prosecuzione, per chi voglia prospettarla in seconda approssimazione, col contributo di qualche nuovo elemento.

Salvo invero lievi divergenze di misura e di forma, la conclusione finale di codesti autori circa la distruzione effettiva di ricchezza cagionata dalla guerra può riassumersi nel concetto svolto, con molta chiarezza, dal Pigou, là dove osserva: Fabbricare munizioni d'un tipo che poi si chiarisca inutile, o trasportare truppe da un luogo a un altro per errore e senza scopo sono sperperi di ricchezza in senso assoluto. Ma corrispondere a taluni funzionari o a certi operai stipendi o salari superiori al valore della loro opera può essere spreco per la finanza pubblica, non già dispersione della ricchezza nazionale. Non si tratta che di trasferimento di beni in prò di taluni gruppi di cittadini a spese di altri. La cosa cambierebbe soltanto se i favoriti fossero stranieri (1).

Ora a me sembra evidente che il consenso in tale punto di vista e la rinuncia ad approfondirlo ulteriormente sia nuova prova del deplorevole abbandono in cui le varie scuole economiche han lasciata finora l'elaborazione scientifica della teoria del consumo.

Non basta invero constatare che una qualsiasi ricchezza fu trasferita, per l'intermediario dello stato, a nuovi possessori, per ritenere che essa non andò perduta, in senso assoluto; ma occorre ricercare inoltre comparativamente quale sia, nei due gruppi fra i quali avviene il trapasso, la tendenza, permanente od accidentale, alla spesa improduttiva, distruggitrice della ricchezza stessa.

Simile indagine si presenta certo fra le più ardue ed incerte; causa anche l'imperfezione di metodi da cui oggi appena accenna ad emergere una sociologia scientifica non indegna del nome. È chiaro però che, senza entrare in questo campo, riesce inutile parlare di “ costi reali „ e di “ danni economici „ del conflitto.

Non ad affrontare nella sua interezza l'argomento, formidabilmente complesso, ma semplicemente a mostrarne la portata e la vastità, valgano brevissimi cenni.

---

(1) Cfr. *The economy and finance of the war*, p. 21 e sgg.

Per alimentare la guerra lo stato distoglie, coi prestiti o con le imposte, capitali ingenti dal loro impiego normale. Nella misura in cui tali somme sono sottratte a spese superflue e improduttive dei privati, non si ha — con certe riserve (1) — nessuna diminuzione di ricchezza sociale. Quando invece trattisi di capitali già investiti o destinati ad essere investiti proficuamente, l'impoverimento, dicesi, è innegabile, tranne, come vedemmo, per quella parte della spesa pubblica che provoca un corrispondente risparmio privato; e per quell'altra, che rappresenta la retribuzione anormale di taluni agenti di produzione indigeni, i sovraguadagni realizzati dai quali si risolvono automaticamente in una partita compensatrice. Così avviene, afferma il D'Eichtal, che la spesa di mantenimento degli uomini mobilizzati non rappresenta che l'equivalente di quanto questi uomini più non consumano ai loro focolari (2); ed è perciò specialmente, secondo il Pigou, che stipendi e salari eccezionali di funzionari e di operai devon considerarsi semplici ed innocue partite di giro (3).

Se non che, in entrambi i casi, la verità è ben altra. Non occorre molto sforzo a comprendere, quanto al primo, che il costo di mantenimento normale viene ad essere fortemente accresciuto dalle esigenze specialissime del soldato (4) e dagli sperperi colossali che si verificano nelle sussistenze militari; da computarsi le une e gli altri fra le perdite secche (5).

(1) Cfr. Pigou, *The economy and finance of the war*, p. 29 e sgg.

(2) Cfr. *Des évaluations du coût de la guerre*, p. 3 dell'estr. Così, in parte, A. W. Kirkaldy, *Labour, finance and the war*, Londra, 1917, p. 2. Esagera fino all'assurdo questo punto di vista T. H. Price sostenendo che quel che l'Europa spende per mantenere gli eserciti in campo è compensato da quel che risparmia facendo una rigorosa economia, onde la guerra non sarebbe, finanziariamente, più gravosa che la pace, salvo che pel valore delle vite umane che spezza o rende inutili. Cfr. " World's work ", novembre 1915.

(3) Cfr. *The economy and finance of the war*, p. 12 e sgg.

(4) Può darne un'idea il confronto fra la razione militare e quella della popolazione civile in Germania, quale risulta da dati ormai assai noti.

(5) Il semplicismo dei primi calcolatori rispetto a questo punto fu già corretto da F. Virgilii, *Il costo della guerra europea*, Milano, 1916, p. 80; e da A. Mariotti, *Gli elementi di valutazione economica del costo della guerra*, in " Diritto e giurisprudenza ", 1916, n. 15, p. 24 dell'estr.

Più complesso offresi invece il secondo esempio, dove trattasi di misurare gli effetti che sulla conservazione e riproduzione della ricchezza ottenuta o abbandonata esercita la psicologia economica delle classi e dei gruppi che la ricevono e di quelli a cui vien tolta, in base al confronto delle loro attitudini e tendenze risparmiatrici.

Un'indagine di tal fatta venne delineata, molto tempo addietro, da Giovan Battista Vasco, allorchè si propose di studiare le conseguenze probabili della improvvisa introduzione di un grosso capitale in Piemonte, grazie ad un rincaro eccezionale delle sete sui mercati esteri; e concluse che, ove l'accrescimento si limitasse ai soli organzini, i pochi capitalisti esportatori avrebbero assai probabilmente convertiti in investimenti fruttiferi gli inattesi profitti; che ugualmente sarebbe forse avvenuto se il maggior prezzo avesse raggiunte le sete greggie, trafficate da una classe non troppo numerosa di persone benestanti; ma che era ad attendersi il pronto evaporarsi della somma attraverso consumi voluttuari nel caso in cui il rincaro, essendo prevedibile e duraturo, si estendesse ai bozzoli, posseduti e venduti da innumerevoli piccoli produttori. " Poichè la ricchezza straor-
" dinariamente acquistata e per causa passeggiera, quanto più
" è sparsa nel popolo, tanto più sarà convertita in consuma-
" zioni. Il contadino e l'operaio, che vivono delle loro braccia
" e vivono per conseguenza ristrettamente, se loro accade fortu-
" natamente di acquistare una piccola somma, sono facilmente
" tentati a spenderla subito in mangiare, bere e divertirsi; e
" frequentemente ancora in darsi al bel tempo, cessando dal con-
" sueto lavoro, finchè hanno da vivere colla loro scorta ". Così non è del capitalista, che con gli stabili impieghi di ogni suo guadagno ragguardevole mira ad accrescere la propria potenzialità economica; nè del commerciante, desideroso sempre di estendere con nuovi fondi la cerchia dei suoi affari (1).

Dopo oltre un secolo i termini del problema, troppo dimenticato anche dagli autori che, come il Pigou, più acutamente analizzarono nei loro complicati meandri i fenomeni redistribu-

---

(1) Cfr. *Saggio politico della carta moneta*, del quale ho pubblicato il testo inedito in " Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino ", S. II, t. XLV, p. 33 e sgg. dell'estr.

tivi (1), non sono sostanzialmente mutati. Con qualche confusione siam costretti ad aggiungere che gli elementi positivi di cui disponiamo per risolverlo scientificamente non risultano molto più completi di quelli che guidavano il chiaro raziocinio del vecchio economista piemontese.

La squisita virtuosità metodologica dei moderni statistici ancora non ci ha dato infatti, ch'io sappia, un quadro analitico del risparmio, da cui appaia la sua distribuzione sociale e topografica nei diversi popoli, onde possa desumersene la tendenza delle varie classi e gruppi a praticarlo.

Nessun lume al riguardo si ricava, per l'Italia, dalle pubblicazioni ufficiali, relative alle casse di risparmio ordinarie. Dalle statistiche sulle banche popolari apprendiamo soltanto che la loro clientela è in gran prevalenza formata di piccoli imprenditori, anzichè di operai. Quelle sulle casse postali indicano tutt'al più una forte tendenza al risparmio nelle classi agricole, espressa nelle grosse cifre d'affari di molti uffici minori. Ma tutto ciò rimane assai vago e poco concludente.

Neppure all'estero i rilievi ufficiali offrono dati precisi alla specialissima ricerca. Nel paese classico del risparmio, in Francia, risulta unicamente la assoluta prevalenza delle attitudini previdenti presso le popolazioni rurali piccole proprietarie, all'importanza numerica delle quali si attribuisce il primato raggiunto in tal campo da quel popolo (2). Per il Belgio, dove esistono recenti classificazioni dei depositanti presso talune casse secondo le loro occupazioni, si nota un più attivo concorso del ceto operaio propriamente detto; ma trattasi di cifre limitatissime, nello spazio e nel tempo (3).

---

(1) Un cenno però egli ne fece, in senso non diverso da quello da noi prospettato, là dove considerò gli effetti probabili sul dividendo nazionale, e quindi in ultima analisi sulla condizione delle classi povere, d'un diretto trapasso di ricchezza a favore delle medesime dagli strati superiori, e formulò il dubbio che l'investimento che esse le avrebbero dato potesse risultare meno economicamente efficiente. Cfr. *Wealth and welfare*, Londra, 1912, p. 355 e sgg.

(2) Cfr. J. Lescure, *L'épargne en France*, Parigi, 1914, p. 35 e sgg.

(3) Cfr. B. Seebohm Rowntree, *Comment diminuer la misère* (trad. fr.), Parigi, 1910, p. 472 e sgg.

Deplorando la lacuna che presentano su questo oggetto le statistiche di tutti gli stati, il "Board of trade" britannico calcolava, nel 1904, su dati che esso stesso dichiarava imperfettamente raccolti e male comparabili, che la percentuale degli appartenenti alle classi lavoratrici, rispetto al totale dei depositanti negli istituti collettori, era del 55 % in Francia, del 63 nel Belgio, del 53 nel Baden, del 48 nell'Alsazia-Lorena, del 64 nel Regno Unito; ma che di costoro gli operai industriali costituivan soltanto il 15,73 in Francia, il 18,49 nel Belgio, il 20,39 in Inghilterra (1).

D'altronde i semplici confronti del risparmio monetario significano poco, essendo ben noto che le classi agricole tendono a convertire immediatamente ogni somma di cui dispongano in acquisto di terre o di animali, costruzioni, bonifiche, ecc.; mentre la previdenza degli operai cittadini assume spesso figura di assicurazione mutualistica.

Elementi comparativi meno incerti possono quindi di preferenza desumersi da un esame del tenor di vita e della spesa media che, in rapporto ai salari, si osservano nei diversi ambienti; problema anche questo di varietà pressochè infinita, ma che pure meglio si presta a formulare almeno alcune ipotesi di tendenze.

Fin dai primordi della grande industria gli studiosi degli aspetti etici del fenomeno segnalarono, deplorandole, le abitudini dissipatrici che condannavano a un cronico dissesto troppi bilanci operai (2). E, quando già l'evoluzione capitalistica aveva raggiunto un grado più elevato, continuavano i migliori conoscitori degli ambienti popolari a rilevare la somma difficoltà con cui si manteneva e sviluppava, nei proletariati cittadini, lo

(1) Cfr. *Second series of memoranda, statistical tables and charts prepared in the Board of trade with reference to various matters bearing on british and foreign trade and industrial conditions*, Londra, 1904, p. 190 e sgg.

(2) Cfr. H. A. Frégier, *Les classes dangereuses de la population dans les grandes villes et des moyens de les rendre meilleures*, Bruxelles, 1840, pagine 55 e sgg.; 405 e sgg. e *passim*.

spirito della previdenza (1). Alquanto più tardi René Lavollée registrava, in tutta l'Europa, numerosi casi nei quali la viziosità e l'intemperanza delle classi lavoratrici le manteneva in uno stato di vera indigenza, con salari che consentivano ad altri gruppi un tenor di vita decoroso e civile (2). Ma soltanto negli ultimi anni le numerose indagini, ufficiali e private, sui bilanci di famiglia popolari han procurato al riguardo un materiale di studio abbastanza vasto da permettere qualche generalizzazione non troppo arbitraria. Informazioni copiose forniscono fra le altre, all'aprirsi del presente secolo, le ampie inchieste dell'ufficio del lavoro inglese; in cui leggesi che, in ogni paese, sono più frequenti i disavanzi che i pareggi od i margini attivi nelle gestioni famigliari operaie, mentre notevoli percentuali delle entrate medie si convertono in spese di carattere estraneo al miglioramento del cibo, dell'alloggio e del vestito, e cioè, in massima parte, in tabacco e in alcoolici (3). L'alta proporzione delle uscite varie rispetto al totale appare anche più largamente confermata nei recenti confronti critici di Maurice Halbwachs, che giustamente osserva inoltre non doversi considerare come necessarie o fisiologicamente utili neppure tutte le spese di alimentazione e di abbigliamento, costituenti anzi spesso una delle forme preferite dell'intemperanza e dello spreco delle classi inferiori (4). Del che è nuova prova il fatto rilevato dall'inchiesta germanica del 1907, secondo il quale il numero dei bilanci operai in stato di disavanzo cronico cresce anzichè diminuire con l'aumento delle entrate complessive (5). Concordemente deplorano infine il difetto assoluto di spirito d'ordine

---

(1) Cfr., fra gli altri, A. Audiganne, *Les populations ouvrières et les industries en France*, Parigi, 1860, t. II, p. 300 e sgg.

(2) *Les classes ouvrières en Europe*, 2ª ediz., Parigi, 1884, vol. I, pp. 169 e sgg., 501; II, 96, 203 e sgg.

(3) Cfr. *Memoranda, statistical tables and charts prepared in the Board of trade with reference to various matters bearing on british and foreign trade and industrial conditions*, Londra, 1903, p. 242 e sgg.

(4) Cfr. *La classe ouvrière et les niveaux de vie. Recherches sur la hiérarchie des besoins dans les sociétés industrielles contemporaines*, Parigi, 1913, pp. 488, 387 e sgg.

(5) Cfr. M. Porte, *Budgets de familles et consommations privées*, Grenoble, 1913, p. 81.

e di economia, che condanna all'indigenza innumerevoli famiglie, frustrando le più ben concepite iniziative filantropiche, i migliori conoscitori dei quartieri operai di Londra, primo fra tutti Carlo Booth (1).

È cosa troppo nota che fra i moventi essenziali del crescente urbanismo — spesso non giustificato da vero dislivello di salari reali — sta in prima linea la suggestione psicologica che esercita il contrasto fra la vita parca e monotona dei campi e le distrazioni d'ogni specie che offre il soggiorno in città. Trattasi, osservano gli scrittori francesi, di una crisi analoga a quella che determina la restrizione della natalità; fenomeno morale assai più che economico, di cui il servizio militare ed un erroneo indirizzo scolastico sono spesso gli agenti inconsapevoli (2). Basterebbe d'altronde la prosperità di talune industrie, alimentatrici dei gusti caratteristici delle masse operaie, e l'importanza di certi consumi, prevalentemente popolari, per dare un'idea della generalità e della gravità delle tendenze scialacquatrici.

Chi può calcolare l'enormità delle somme sottratte annualmente ai bilanci operai dall'infezione cinematografica, che, oltre ad esasperare gli effetti anti-educativi ravvisati, fin dal 1840, dal Fregier negli spettacoli a uso popolare (3), crea una classe numerosa e costosa di oziosi improduttivi? E come non rimanere impressionati di fronte alle cifre che esprimono il consumo mondiale degli alcoolici; le quali raggiungerebbero, secondo un recente calcolo (per dir vero, alquanto incerto), l'incredibile

---

(1) Cfr. D. Pasquet, *Londres et les ouvriers de Londres*, Parigi, 1914 p. 57 e sgg. A Roma è stato osservato che la tendenza a risparmiare accenna a scomparire non appena il popolano provinciale s'inurba. L'operaio cittadino, anche se guadagna salari relativamente forti, li spreca al gioco, al cinematografo, all'osteria, approfittando, per la famiglia, delle forme più varie della pubblica carità. Cfr. D. Orano, *Come vive il popolo a Roma*, Pescara, 1912, pp. 559 e sgg., 677 e sgg.

(2) Cfr. A. Souchon, *La crise de la main-d'œuvre agricole en France*, Parigi, 1914, p. 123 e sgg. Attenua, ma non contesta l'importanza di questi fattori E. Vandervelde, *L'exode rural et le retour aux champs*, Parigi, 1903, pp. 110 e sgg.

(3) Cfr. *Les classes dangereuses de la population dans les grandes villes et les moyens de les rendre meilleures*, p. 405 e segg.

somma di quasi 20 miliardi annui per l'Europa e l'America del nord (1); o, più attendibilmente, di oltre quattro miliardi nella sola Inghilterra (1913) (2)?

Meglio assai che nella entità assoluta, la gravità del preoccupante fenomeno risiede nel suo inasprirsi progressivo in misura più che proporzionale alla curva ascendente dei salari (3), con sbalzi improvvisi nei periodi di eccezionali guadagni.

Senza ripetere le prove che altre volte ne addussi (4), aggiungerò soltanto che, come dalla spesa nelle bevande intossicanti, così le crescenti tendenze dissipatrici dei proletariati cittadini risultano manifeste dalle statistiche alimentari, in cui abbondano sempre più i generi raffinati e costosi. Il gettito del dazio consumo per capo nei grandi comuni chiusi italiani, dove gli alimenti fondamentali sono esenti, documenta in modo indiscutibile il malinconico rilievo (5). Del quale riconosce d'altronde la verità uno dei più spietati denunziatori del lusso borghese, allorquando scrive: " The thriftlessness of the poor, and the " terribly bad use that they make of the pittance that civilized " society hands out to them, are lamented by all who have " worked among them. The marvels that the really destitute " achieve in keeping body and soul together on next to nothing, " are almost paralleled by the recklessness with which those " who are rather better off take no thought for the morrow, and " waste on betting or drink or cheap finery money that is needed " for their food and clothing „ (6).

Per la loro repentinità inattesa, per la precarietà che li distingue, per le incertezze dell'oscuro avvenire, i sopra-salari di

---

(1) Cfr. L. Jacquet, *L'alcool, étude économique générale*. Parigi, 1912, p. 779.

(2) Cfr. H. Withers, *Poverty and waste*, Londra, 1914, p. 175 *n*.

(3) Cfr. E. Cauderlier, *Il progresso economico nel secolo XIX* (tr. ital.). Roma, 1904, p. 84 e sgg.

(4) Cfr. *La serrata degli avvelenatori*, in " Riforma sociale „, gennaio-febbraio 1914, p. 52 e sgg. dell'estr.; e *I primi rilievi dei provvedimenti repressivi dell'alcoolismo*, " Ibid. „, febbr.-marzo 1916, p. 16 e sgg.

(5) Il gettito è passato, dal 1897 al 1908, da L. 35,52 a 52,80 a Genova; da 16,65 a 34,35 a Milano; da 14,53 a 35,87 a Bologna, da 19,38 a 43,26 a Torino.

(6) Cfr. Withers, *Poverty and waste*, p. 174.

guerra sembrano assai più adatti a incoraggiare che a moderare le velleità scialacquatrici di coloro che li ricevono. Nè i fatti han mancato di confermarlo. In Inghilterra si è disputato assai, dacchè scoppiò il conflitto, sull'inasprimento dell'ubbriachezza dovuto a tale causa e sulla diminuzione che ne derivava alla produttività dei lavoratori (1).

Ma se la sapiente organizzazione della propaganda educativa, favorita dai sagaci allettamenti offerti nelle emissioni di prestiti e di buoni bellici al minuto risparmio, van correggendo alquanto, in quel paese ed altrove, l'andazzo pericolosissimo, ben poco, è d'uopo convenirne, si ottenne finora in altri luoghi nello stesso senso. Agli Stati Uniti la frenesia di facili godimenti raggiunse una specie di parossismo. Chiunque viva del resto in uno dei centri industriali italiani dove la produzione di guerra è più intensa non ignora che fra i principali fattori del colossale rincaro, quindi della mancanza di molti generi — ivi particolarmente sensibile —, deve ascriversi lo spreco insensato che ne fecero le masse favorite dagli iperbolici salari. A Torino l'ultimo bilancio della popolaresca e socialistoide Alleanza cooperativa rivela, in confronto al precedente, aumenti impressionanti in certi articoli di vendita (2). Ed è spettacolo piuttosto doloroso che scandaloso quello della ressa ai pubblici spettacoli, della gara alle vendite degli oggetti preziosi presso i monti di pegno, dell'affluire d'una nuova clientela alle botteghe dei gioiellieri di second'ordine, della universale ostentazione del lusso costoso quanto volgarissimo, in cui si esprime, in basso più che in alto, il materialismo egoistico dei privilegiati dagli altrui sacrifici.

Il quale fenomeno, indizio d'uno spirito di irresponsabilità economicamente pernicioso quanto moralmente cinico, dovrebbe

---

(1) Cfr. G. D. H. Cole, *Labour in war time*, Londra, 1915, p. 200 e sgg.

(2) Il vino consumato passa da 75,822 el. a 83,245 con un aumento di spesa, dati i prezzi altissimi dell'annata, di quasi 2 milioni e mezzo; il caffè da 24,655 a 29,500 kg., il burro da 115,118 a 176.086 kg.; il formaggio da 110,774 a 142,910 kg. La vendita dello zucchero cresce di 140.000 kg. Cfr. " Avanti „, 20 gennaio 1917. Negli ultimi mesi l'Alleanza ha visto crescere a dismisura la sua vendita di biscotti e gallette, in sostituzione del pane di guerra sdegnosamente boicottato dai suoi clienti operai. " Ils n'ont pas " de pain? — esclamava la sensibile principessa versagliese —; mais qu'on " leur donne des brioches! „

considerarsi come frutto di esagerazione patologica transitoria della incoscienza economica che presiede abitualmente alle operazioni di consumo (1) — quale suol manifestarsi in strati non ancora redenti dalla brutale ignoranza primitiva — soltanto nel caso potesse constatarsi che in senso nettamente contrario si esercita l'azione delle forze e delle propagande pretendenti al monopolio educativo della psiche popolare.

Disgraziatamente però la verità è tutt'altra. Alle predicazioni autorevoli dell'economia doverosa, non meno che alle proposte varie di risparmio obbligatorio, poste innanzi da parecchie parti anche fra noi, l'opposizione più decisa sorse nelle sfere dirigenti demagogiche, fattesi difenditrici a oltranza dello sperpero e della gozzoviglia festaiuola. Rimase invero esempio isolato la buona fede di chi, anche nel campo popolare, riconobbe la necessità della previdenza coattiva per gli operai " doppia-" mente privilegiati, che, lontani dal fronte, guadagnano enor-" mente, godono d'un *comfort* spesso degenerante in cattive abi-" tudini e, lungi dal dare al paese un qualsiasi contributo di " aiuto alla guerra, non pensano affatto al domani ed alle sue " dolorose sorprese „ (2). Un linguaggio ben diverso ebbe, fin dal principio, l'organo socialista ufficiale, predicando agli operai un'unica forma di risparmio: quella intesa a costituire delle riserve sindacali per intensificare la lotta di classe (cioè per ostacolare il risveglio produttivo) nella crisi del dopo-guerra (3). Nè un miglior contegno tenne il periodico della Confederazione del lavoro, che nel crescente rincaro della vita non vide fuorchè una buona occasione di rinfrescare fra il popolo le superstizioni antiche sul potere malefico degli untori, e sugli specifici legislativi adatti ad esorcizzarli (4). Rispondono alla logica dell'edu-

(1) Cfr. W. Smart, *Second thoughts of an economist*, Londra, 1916, pagine 116 e sgg.

(2) Cfr. D. Bachi, *Il risparmio operaio*, in " Popolo d'Italia „, 14 dicembre 1916.

(3) Cfr. *Sul risparmio operaio*, in " Avanti „, 11 novembre 1916.

(4) Cfr. particolarmente i nn. 339, 340, 341, 343, 344, 346, 347, 351-52, 359, 362, dove si sostiene ostinatamente una politica di basso costo artificiale della vita pei proletariati cittadini, a base di provvedimenti empirici contro il rincaro naturale, e a spese delle classi agricole, taglieggiate

cativo insegnamento manifestazioni simili all'ordine del giorno votato dalla Federazione italiana dei metallurgici, insorta violentemente contro la minaccia della previdenza coattiva, nel nome del diritto alla libera baldoria dell'imboscato cosciente e organizzato (1). Documento che non sorprende affatto chi per poco conosca gli ambienti dove l'evangelizzazione socialista delle masse prese maggior sviluppo, ed abbia assistito alla metamorfosi psicologica profonda che mutò in pochi anni popolazioni di sobrietà e parsimonia quasi proverbiale in turbe assetate di godimento materiale, aliene dalla piccola proprietà fondiaria vincolatrice, sperperatrici improduttive di salari spesso assai superiori alla media dei redditi della piccola borghesia. Il Biellese informi.

Essenza del giacobinismo rivoluzionario fu in ogni tempo la creazione d'una morale convenzionale, che non domanda se un'azione è buona o cattiva, vantaggiosa o dannosa in sè stessa, ma se è conforme o no agli scopi della nuova ortodossia sociale. Nei mesi in cui la Francia sperimentò la sanguinaria teocrazia politica del terrore, si ebbero dei curiosi esempi degli equivoci nascenti dall'interpretazione arbitraria data dai funzionari e dal pubblico al concetto della predicata " virtù ". Tra i quali nessuno più tipicamente si richiama al caso nostro del veemente discorso pronunciato da Robespierre il 9 luglio 1794 contro certi comitati locali, che, imbevuti di principî reazionari, avevan creduto di applicare i decreti educativi della Convenzione incarcerando gli ubbriaconi; di modo che i patriotti erano entrati in prigione e gli scellerati, " buoni mariti o coltivatori " pacifici ", eran scandalosamente rimasti in libertà (2).

La psicologia ed i segreti di successo dei cortigiani delle plebi non mutano col cambiar dei tempi e dei nomi dati alla predicazione demagogica. Dalle incriminazioni giacobine contro

---

da requisizioni e calmieri; e dove si condanna il risparmio individuale come antisociale e non educativo, ammettendosi soltanto quello che si converte in stipendi di organizzatori e pennaiuoli dei sindacati.

(1) Cfr. " Gazzetta del popolo ", 6 novembre 1916.

(2) Cfr. A. COCHIN, *La crise de l'histoire révolutionnaire, Taine e M. Aulard*, 2ª ed., Parigi, 1909, p. 39.

i colpevoli per anti-patriottica sobrietà, alla apologia dell'intemperanza popolare opposta da Brofferio alle tasse sugli alcoolici volute da Cavour (1); alla sregolatezza incoraggiata fra le agglomerazioni proletarie attuali e strenuamente difesa dai loro interpreti contro ogni attentato di previdenza obbligatoria, vi è continuità logica manifesta di indirizzo e di moventi (2).

Ma un orientamento siffatto della propaganda di cui i ceti operai subiscono sempre meglio l'influsso sembrami costituisca un elemento non trascurabile di un obbiettivo giudizio circa le attitudini risparmiatrici che è lecito presumere in queste classi della società.

Problema, come ho premesso, supremamente incerto, per l'insufficienza di dati precisi; assai interessante però ad essere approfondito più largamente (specie quando saran note le statistiche della vita economica dell'attuale periodo); e fonte certamente allora di deduzioni più sicure ed istruttive di quelle che al presente sia possibile ricavarne.

---

(1) Cfr. A. Brofferio, *La storia del parlamento subalpino*, Milano, 1868, vol. IV, p. 252 e sgg.

(2) Ne offriron testè una nuova prova edificante le volgari ingiurie da cui le sue ben note simpatie per la causa proletaria non salvarono Achille Loria, allorchè, con intenti profondamente benevoli ed educativi, osò accennare alle “ orgie brutali ed ai selvatici tripudi „ in cui si disperdevan le eccezionali mercedi. Cfr. “ Gazzetta del popolo „ del 16 maggio 1917 e “ Avanti „ dei giorni successivi.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Giugno 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Senatore D'Ovidio Direttore della Classe, Naccari, Segre, Jadanza, Guareschi, Mattirolo, Somigliana, Panetti e Parona Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Guidi e Grassi.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza.

Il Socio Jadanza presenta in omaggio da parte del Professore G. Boccardi l'*Annuario Astronomico pel 1918* pubblicato dal R. Osservatorio di Pino Torinese e la Nota *Problèmes des probabilités.*

Il Segretario presenta le seguenti Note inviate dal Socio corrispondente W. Kilian: Kilian et J. Révil, *Sur les discontinuités de sédimentation et les niveaux de brèches dans les Alpes françaises.* — Kilian et P. Reboul, *Sur la présence de Céphalopodes à affinités indo-africaines dans le Crétacé moyen de Cassis.* — P. Fallot, *Sur la présence de l'Aptien dans la Sierre de Majorque.*

Presentano per la stampa negli *Atti*:

Il Socio Guareschi, una sua comunicazione col titolo *Ricerche su alcuni prodotti gasosi della fermentazione putrida e*

l'odore dei tartufi, ed una Nota del Dr. Epaminonda Crivelli, *Sull'origine inorganica o sintetica del litantrace.*

Il Socio Panetti, la Nota 2ª di Antonio Capetti, *Contributo allo studio dell'equilibramento delle masse rotanti (Esperimenti col moltiplicatore meccanico applicato al fasometro stroboscopico Ricci).*

Il Segretario, a nome del Socio Guidi, le due Note: C. Guidi, *Sui ponti ad arco in cemento armato*; G. Albenga, *Sull'attrito volvente nei veicoli ordinari*, e, a nome del Socio Grassi, la Nota 3ª del Dott. A. G. Rossi, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate.* Presenta inoltre la Nota della Sig.na Dott. F. Balzac, *Su alcuni notevoli cristalli di Fluorite del granito di Baveno.*

Il Presidente toglie l'adunanza, ultima dell'anno accademico della Classe, porgendo ai colleghi i migliori augurî.

LETTURE

Ricerche su alcuni prodotti gasosi della fermentazione putrida e l'odore dei tartufi.

Comunicazione del Socio ICILIO GUARESCHI.

Già da moltissimi anni, sino dal 1883 e 1887, io mi sono occupato dello studio dei prodotti della putrefazione, specialmente per esaminare quei composti chimici scoperti da Francesco Selmi nel 1871 detti *ptomaine* (1); quelle lunghe ricerche furono in parte fatte insieme al compianto amico e collega Angelo Mosso (2), io per la parte chimica ed egli per la fisiologica. Allora io non mi occupai in modo particolare dei gas che si sviluppano nella putrefazione, ma bensì delle sostanze basiche, alcaloidee. Dei gas si occupò il Gautier.

Nelle mie ricerche recenti sulla attività chimica della calce sodata (3) io ho fatto osservare che quando mediante una corrente di aria si fanno passare i gas e i vapori che si sviluppano da materie putrefatte animali o vegetali (uova, carne, intestini, piante, ecc.) attraverso uno strato di calce sodata i prodotti

(1) In quest'anno si è compiuto il centenario della nascita di Francesco Selmi (aprile 1817). Una via di Bologna sarà intitolata al suo gran nome.

(2) I. Guareschi e A. Mosso, *Les ptomaïnes. Recherches chimiques, phisiologiques et médico-légales.* “ Arch. Ital. de Biologie „, 1883, t. II, p. 367 e t. III, p. 241; e “ Journ. f. prakt. Chem. „, 1883, t. 27, p. 425 e t. 28, p. 504; e “ Boll. Soc. Chim. „, 1884; ed *in extenso* pure, in “ Rivista chim. med. e farm. „, anni 1883 e 1884. — I. Guareschi, *Ricerche sulle basi che si trovano fra i prodotti della putrefazione,* “ Ann. di Chim. e Farmacol. „, 1887, VI.

(3) I. Guareschi, *La calce sodata quale energico reagente generale e sua grande attività chimica,* in “ Suppl. Ann. „, 1915, vol. XXXI, e *Delle singolari proprietà della calce sodata,* in “ Atti R. Accad. delle Sc. di Torino „, 1916, t. LI, p. 1111.

puzzolenti rimangono fissati dalla calce sodata, e dalla parte opposta non si sente più nessun odore nauseoso, ma bensì quello analogo all'odore del *tartufo* fresco. Io notai il fatto e mi proposi di studiarlo.

La calce sodata, specialmente quella recentemente preparata e ben conservata in vasi chiusi alla lampada, agisce in modo straordinario su un gran numero di gas e di vapori, come io dimostrai pel primo; e di conseguenza agisce pure sui molteplici gaz e vapori prodotti nella putrefazione delle sostanze le più diverse, quali sono: le carni, le uova, il cervello, il sangue, il fegato, le intestina, i pesci, le piante e specialmente quelle monocotiledoni, ecc. I gas o vapori puzzolenti che si sviluppano, fatti passare anche rapidamente attraverso la calce sodata, vengono fissati, eccetto l'ammoniaca, la trimetilamina, le carbilamine e qualche altro gaz non ancora determinato. In ogni caso il miscuglio gasoso che passa oltre alla calce sodata non ha più affatto l'odore sgradevole. Ciò si spiega tenendo conto dei fatti da me esposti in ricerche precedenti, cioè del facile assorbimento dell' acido solfidrico, del mercaptano, delle aldeidi, ecc. per mezzo della calce sodata. L'*indolo* e lo *scatolo* sono due sostanze che contribuiscono a dare l'odore nauseante ai prodotti della putrefazione, ed anch'essi sono assorbiti dalla calce sodata. Anche gli acidi grassi volatili (acidi: propionico, butirrico, valerianico, caproico) si trovano fra i prodotti della putrefazione e contribuiscono a produrre il cattivo odore, ma anch'essi vengono facilmente assorbiti dalla calce sodata.

Gli esperimenti furono quasi sempre da me fatti col lasciar putrefare le sostanze entro matraccio munito di un tappo a due fori, per uno dei quali passa un tubo di vetro ricurvo che termina quasi al fondo del matraccio stesso, e l'altro più corto per l'uscita dei gas. Oppure anche dentro grosse boccie di Habermann. Si può mediante un gasometro od un aspiratore far passare una regolare corrente di aria che sposta i gas o vapori del matraccio ed insieme passano attraverso un tubo ad U contenente la calce sodata e dopo questa attraverso a dei tubi a bolle o piccole boccie di Habermann coi reattivi adatti, quali il nitrato d'argento, la soluzione alcalina di piombo, il cloruro mercurico, il permanganato potassico, o l'acido solforico concentrato con poco acido cromico, ecc. ecc.

Se occorre, si fa passare il gas attraverso un piccolo tubo a bolle di Mitscherlich, contenente poca soluzione satura di acido cromico, e scaldato a b. m. Si può anche far putrefare la sostanza entro al matraccio sovraindicato e tenere chiuso il tubo ricurvo che va sino al fondo. Così il gas si accumula e per successivi spostamenti dell'aria si può avere più gas con odore di tartufo. Così si opera quando è grande la quantità di gas sviluppato, come ad esempio nel caso del pesce putrefatto. Allora con una morsetta si può regolare lo sviluppo del gas e raccoglierlo in un azotometro.

Cosa curiosa, sino dai primi giorni notai che i gas provenienti specialmente dalla putrefazione del fegato, delle feci, dell'intestino ed in particolar modo dal cervello e dal pesce, e che non sono fissati dalla calce sodata, posseggono un odore non sgradevole, anzi gradevole, il quale ricorda in modo molto evidente ed intenso quello dei *tartufi*!

Quando il gas proviene da liquidi putrefatti alcalini che producono ammoniaca, trimetilamina, ecc., quale è il caso specialmente del pesce e del cervello, è bene farlo passare prima attraverso una boccia o un tubo a bolle contenente dell'acido solforico al 50-60 $^0/_0$.

Nei mesi da maggio ad agosto 1916 provai anche con molte e diverse piante, quali: il tulipano, l'*iris germanica* e *florentina*, l'*aster chinensis* delle Asteroidee, il *Phlox paniculata* delle Palemoniacee, colle grosse margherite ordinarie, colle ortensie, ecc.

Questo odore così caratteristico e sensibile si mantiene a lungo; ed invero ancor dopo otto mesi, o un anno, dacchè le materie sono putrefatte, manifestano, operando come ho detto, l'odore del tartufo.

Ho fatto delle esperienze anche con funghi mangerecci freschi:

Grammi 175 di boleto ordinario, di qualità ottima, furono posti in una boccia di Habermann. Dopo alcuni giorni incominciarono a liquefarsi (1) e dopo 15 giorni tutta la massa era liquefatta ed aveva reazione acida. Fatto passare il gas attraverso la calce sodata, non dava odore di tartufo.

---

(1) Il 30 sett. 1916; temp. 15°-20°.

Dopo un mese il liquido ha lievissima reazione acida, quasi neutra, odore sgradevole. Dopo il passaggio del gas attraverso calce sodata si nota l'*odore gradevole di tartufo fresco*, la calce si scalda per l'acido carbonico ed imbrunisce assai poco, perchè si sviluppa pochissimo acido solfidrico.

Quest'anno il 28 maggio ho saggiato nello stesso modo il liquido che era rinchiuso nella boccia di Habermann e si sente ancora l'odore gradevole del tartufo, anche dopo il passaggio attraverso all'acido solforico 50-60 %.

Considerato dal lato alimentare, il tartufo fresco, a cagion d'esempio quello della Dordogna, ha, secondo Balland (1905) (1), la composizione seguente:

	normale	secco
Acqua	74,2	0,0
Materie azotate	6,6	25,7
„ grasse	0,75	2,9
„ estrattive	14,8	57,3
Cellulosa	1,1	7,5
Ceneri	1,7	6,5.

La quantità delle materie azotate non sarebbe dunque tanto piccola.

Se si lascia alterare, a sè, entro boccia di Habermann del tartufo fresco, l'odore del tartufo non cresce e non si sente quasi mai l'odore di materie putrefatte; il liquido si mantiene acido per lunghissimo tempo, e molto acido, mentre nelle altre sostanze da me esaminate l'odore di tartufo si manifesta principalmente quando si ha la vera putrefazione ed il liquido ha reazione neutra o meglio alcalina.

Benchè mi sia accorto che la quantità del nuovo prodotto sia piccolissima, ho voluto esaminarne alcune proprietà. Innanzi tutto dirò che nella putrefazione specialmente del pesce e del cervello, i gas più abbondanti prodotti sono l'acido carbonico, l'idrogeno, l'acido solfidrico, che vengono assorbiti, eccetto l'idrogeno. Raccogliendo il gas, dopo scacciata l'aria, in un azotometro con potassa al 40 %, il gas che non è assorbito, è infiamma-

(1) A. Balland, *Les aliments*, II, p. 36.

bile, ha i caratteri dell' idrogeno, ma mantiene, anche attraversata la potassa concentrata, l'odore del tartufo.

Per saggiare il gas l'ho fatto passare prima attraverso l'acido solforico al 50-60 % per trattenere i gas di natura alcalina, poi attraverso un lungo strato di calce sodata.

Questo prodotto gazoso, o allo stato di vapore, ha i caratteri seguenti:

1. Possiede l'odore caratteristico del *tartufo*.

2. Non ha reazione alcalina, nè reazione acida. Cioè non ha proprietà alcaline nè acide.

3. Non intorbida nè riduce il nitrato d'argento in soluzione acquosa.

4. Non altera la soluzione alcalina di acetato di piombo.

5. Non è fissato dalla calce sodata nemmeno se fatto passare per un lungo strato (40 a 50 cm.).

6. Non contiene bromo.

7. Riduce a temperatura ordinaria la soluzione acquosa di permanganato potassico neutra o acidulata con acido solforico.

8. Riduce l'acido cromico sciolto in piccola quantità nell'acido solforico concentrato e la soluzione si colora in verde azzurro.

9. Non è alterato passando attraverso ad acido solforico al 50-60 %.

10. È assorbito dall'acido solforico concentrato ed allora il gas perde il suo odore gradevole di tartufo. La soluzione solforica riduce prontamente l'acido cromico.

11. Fatto passare attraverso alla soluzione acquosa satura di acido cromico scaldata a 100°, l'odore del gas scompare e parte dell'acido cromico rimane ridotta (1).

12. Il gas fatto passare attraverso una soluzione di cloruro d'oro al 2,5 % la colora in ranciato, poi precipita. Se la soluzione è acidulata con acido cloridrico, il precipitato è appena giallognolo. Le soluzioni diluitissime di cloruro d'oro si colorano con questo gas o vapore in giallo più intenso.

Non riduce il nitrato d'argento ammoniacale.

---

(1) Alcune di queste reazioni possono essere in parte dovute anche all'idrogeno.

13. Non ho potuto ancora riconoscere se contenga o no dell'azoto e nemmeno se contenga del solfo. Ma spero di poter proseguire queste ricerche, dopo che avrò, se non esaurito, almeno esposto in gran parte il mio programma, che mi sono proposto, sulla chimica nella alimentazione.

Purtroppo intorno alla natura di questo gas, o forse nuovo prodotto della putrefazione, che possiede l'odore e le reazioni indicate, nulla o quasi nulla posso dire. A me pare ora un nuovo prodotto della putrefazione rimasto mascherato dagli altri gas e vapori, ma riconosciuto solamente alle reazioni chimiche negative e all'odore. Ho tentato di raccoglierlo in matraccio a lungo collo raffreddato con miscela di ghiaccio e sale, ma senza risultato. Ho fatto delle esperienze con solventi speciali, quali olì, olio di paraffina, ecc.; ma ne sciolgono poco; nell'acqua si scioglie poco. Però anche dopo che il gas con odore di tartufo fresco ha gorgogliato attraverso varie bolle piene di acqua (tubo di Mitscherlich) conserva il suo odore gradevole e dà le reazioni sovraindicate. L'acqua saturata di questo prodotto conserva a lungo l'odore del tartufo fresco e dà pure le reazioni descritte. Certamente non ha funzione acida, anche debole, nè fenolica, nè di aldeide e probabilmente nemmeno di etere, perchè questi composti sarebbero assorbiti dalla calce sodata.

Non è idrogeno fosforato PH^3, o arsenicale, diluito con gas inerti (idrogeno o metano), e in questo caso anche l'aria, perchè non ha azione riducente sul nitrato d'argento.

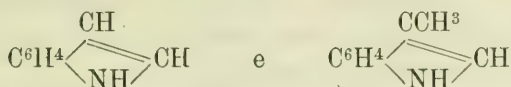
Il profumo del tartufo è come quello del muschio, e di alcuni fiori, così acuto che bastano delle minime traccie per percepirne la sensazione, e non se ne conosce la natura, come non si conosce quella del muschio e di alcuni profumi delle piante.

Notevole è il fatto della sua, direi, stabilità, e permanenza, fra i prodotti della putrefazione.

Berthelot ha fatto delle ricerche interessanti sulla sensibilità dell'olfatto per percepire l'esistenza di traccie minime di sostanze odorose. Sensibilità che supera quasi quella dello spettroscopio.

Nessuno di coloro che si sono occupati della putrefazione, e sono moltissimi, ha mai accennato al fatto da me osservato, appunto perchè non hanno mai pensato di fissare colla calce sodata o con miscela intima di calce e soda, i materiali che producono l'odore nauseoso dei prodotti della putrefazione.

Perchè questo prodotto si trova fra le sostanze formatesi nella putrefazione, non vuol dire che anche il profumo naturale del tartufo si formi per un processo putrefattivo. Ed invero l'*indolo* e lo *scatolo*:

$$C^6H^4 \langle \begin{matrix} CH \\ \| \\ NH \end{matrix} \rangle CH \quad \text{e} \quad C^6H^4 \langle \begin{matrix} CCH^3 \\ \| \\ NH \end{matrix} \rangle CH$$

non trovansi forse fra i prodotti della putrefazione? Ebbene noi li troviamo nel profumo di alcuni fiori. Hesse (1) trovò 2,5 $^0/_0$ di indolo nell'essenza del *Jasminum grandiflorum* L. Si pensi che 100 chilogr. di fiori di gelsomino diedero 2,5 grammi di essenza.

Le feci umane, le più puzzolenti, le più putrefatte, e nauseose, dànno lo stesso odore di tartufo; basta far passare il gas prima attraverso all'acido solforico al 50-60 $^0/_0$ (e non è necessario), poi attraverso alla calce sodata. Questo odore permane ancora dopo più di un anno dacchè le feci erano in inoltrata putrefazione. E si noti che la calce sodata fissa anche l'indolo e lo scatolo.

Che certi odori o profumi gradevoli possano contenere delle sostanze di odore sgradevole ne abbiamo molte altre prove. L'*indolo* fu trovato nella essenza di Neroli insieme all'antranilato di metile (2). Verschaffert (3) trovò l'indolo nei fiori di varie specie di *citrus*. Riguardo all'indolo nei fiori della *Visnea Mocanera* delle Ternstromiacee, si vegga in un lavoro di Borzi (4).

Lo scatolo fu trovato da Dunnstan nel legno del *Celtis reticulosa* di Giava, Ceylan, ecc. (5) e secondo Schimmel (6) il *pirrolo* C^4H^4NH si troverebbe nell'essenza del *Citrus Bigaradia* Risso, e un *N-alchilpirrolo* si troverebbe nell'essenza di Neroli (7).

(1) *Berichte*, 1899, t. XXXII, p. 2611.

(2) Hesse e Zeitschel, " J. pr. Chem. „ (2), t. 66, p. 504.

(3) " Rec. Trav. Bot. Néerl. „, I, 1904, e Semmler, *Die Aetherischen Oele*, IV, p. 379.

(4) " Rendic. Lincei „, 1904, XIII, p. 372, e in Semmler, loc. cit., IV, p. 379.

(5) " Pharm. Journ. „, 1889, XIX, p. 1010, e *Berichte*, XXII Ref., p. 441; Semmler, IV, p. 380.

(6) " Schimmel's Bull. „, 1902, II, p. 65.

(7) Semmler, *Die Aetherischen Oele*, vol. IV, 1907, p. 375.

Avevo pensato, nel caso mio, anche alla possibilità della formazione del *solfuro di metile* di Regnault (1) $(CH^3)^2S$, ma questo solfuro ha un odore che è dei più sgradevoli. Egli è vero però che quando fosse in piccolissima quantità potrebbe manifestare l'odore buono. Ma la calce sodata assorbe i mercaptani e gli eteri ed è quindi assai poco probabile che l'odore del tartufo sia dovuto a questo corpo.

Potrebbe venire il dubbio della presenza di qualche carburo non saturo, quali: il *valilene* $CH^3.CH = C = CH^2$, bollente a 50° e che ha odore agliaceo; l'*eritrene* $CH^2 = CH - CH = CH^2$, o crotonilene, che si trova fra i liquidi della compressione del gas illuminante; l'*allilene* $CH^3.C \equiv CH$, gas di odore agliaceo, che si ossida coll'acido cromico dando acido propionico e col permanganato dà acido malonico; l'*allene* $CH^2 = C = CH^2$, gas che non reagisce coi sali rameosi e argentici e col $HgCl^2$ dà precipitato bianco. Non dà le reazioni dell'*acetilene* $CH \equiv CH$.

Ma questi carburi restano esclusi per varie cagioni, ed anche per il fatto che il gas combustibile, l'idrogeno, che rimane, dopo assorbiti l'acido carbonico, il solfidrico, ecc., brucia con fiamma perfettamente incolora; ma delle traccie non possono escludersi.

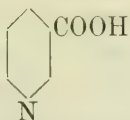
Del resto si sa che le materie albuminoidi putrefacendosi non sviluppano gas idrocarburati. I gas delle uova putrefatte, a cagion d'esempio, constano di:

CO^2	30,5 %
H^2	40,2 „
N	29,3 „
H^2S	piccole quantità.

Pensai inoltre alla possibilità di un nucleo piridinico in quantità minima mescolato all'aria. Ed invero trovasi la piridina nel fuselöl, cioè nei prodotti della fermentazione delle materie amidacee, insieme ad albuminoidi. Ed ora sappiamo che l'acido

---

(1) V. Regnault, " A. Ch. „, 1839 (2), t. 71, p. 391. Si noterà che il $(CH^3)^2S$ si forma anche dall'acciaio o dal ferro con acido cloridrico.

2.*piridincarbonico* o β*piridincarbonico* o *nicotinico* $C^5H^4N.COOH$. ossia:

trovasi nella crusca del riso.

Ma il passaggio del gas attraverso l'acido solforico al 50-60 °/₀ tratterrebbe le supposte traccie di piridina.

Notisi inoltre che molte sostanze hanno odore gradevole se in piccolissima quantità e sgradevole se in quantità grande (1).

Come pure l'odore dipende talvolta dallo stato di purezza: alcune sostanze hanno odore sgradevole se non affatto pure, mentre hanno odore gradevole se affatto purissime.

Alcuni odori si neutralizzano tra loro e ciò dipende molto dalla costituzione chimica. Certi odori mascherano completamente altri odori, benchè questi siano molto sensibili. Questo è il caso mio dei prodotti puzzolentissimi della putrefazione, che mascherano quello di tartufo.

Dalle esperienze soprariferite posso concludere che il profumo o odore del tartufo fresco, da me osservato nelle materie putrefatte, è dovuto a una o più sostanze, gasose o molto volatili, che si formano durante la putrefazione delle materie albuminoidi; ma la loro natura rimane ancora sconosciuta.

Torino, R. Università, giugno 1917.

---

(1) ZWAARDEMAKER (*Die Physiol. des Geruches*, Leipzig, 1895, e l'articolo *Oli Essenziali* in “ Nuova Enciclop. Chim. „, IX, p. 1192) ha proposto un olfattometro.

Contributo allo studio dell'equilibramento delle masse rotanti. Metodi pratici.

Nota II di ANTONIO CAPETTI.

(Con 1 Tavola).

Dopo aver dimostrati nella I[a] Nota i vantaggi che si possono attendere, usando nell'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità un apparecchio moltiplicatore delle ampiezze delle oscillazioni, scopo di questa appendice è l'indicazione di una via che si potrebbe praticamente seguire per giungere all'equilibramento d'una massa rotante.

L'ing. Ricci ha già dato nella Memoria citata (*) la dimostrazione teorica delle diverse operazioni necessarie: nella presente Nota queste operazioni sono raccolte ed esposte schematicamente nel loro ordine pratico, e sono infine corredate da un esempio di equilibramento eseguito sull'equilibratore del Laboratorio di Meccanica applicata del R. Politecnico di Torino usando il fasometro stroboscopico Ricci munito del moltiplicatore meccanico precedentemente descritto, di cui le fig. 1, 2, 3, 4 della tavola riproducono i particolari costruttivi.

Supponendo che sia simmetrico il sistema elastico delle molle vincolanti i sopporti dell'equilibratore (il che facilmente si può ottenere nella pratica), è opportuno distinguere se si tratta di una massa che ammette o non ammette un piano di simmetria normale all'asse di rotazione.

(*) " Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ,, anno 1915-16, vol. LI, dispense 2[a] e 5[a]. Adunanze del 28 novembre e 12 dicembre 1915.

I° Caso. *La massa rotante non ammette un piano di simmetria normale all'asse di rotazione.* — I punti nodali sono entrambi a distanza finita e vanno quindi determinati. Per questo, disposti alle estremità dell'albero due fasometri muniti di moltiplicatori delle ampiezze, si imprima alla massa in esame la velocità di risonanza corrispondente all'oscillazione forzata intorno al primo punto nodale e si leggano contemporaneamente sui due apparecchi le fasi e le ampiezze. Si portino quindi normalmente a una retta in cui sono segnate le posizioni dei punti d'osservazione, due segmenti che rappresentino in una scala qualunque le ampiezze misurate col proprio segno: la congiungente gli estremi di tali segmenti taglia la retta nel punto nodale cercato.

Analogamente si opera per la ricerca del secondo punto nodale.

Si inverta quindi il verso della rotazione dell'albero, e con eguale velocità angolare si faccia una nuova lettura sul fasometro (basterà d'ora innanzi un solo apparecchio): la media delle due letture dà la fase della forza eccitatrice incidente nel secondo nodo.

Si introduca allora, mediante spostamenti esattamente misurati delle apposite masse, una forza eccitatrice nota in direzione e grandezza: poichè il piano in cui si operano gli spostamenti non sarà coincidente col piano nodale considerato, bisogna decomporre la forza introdotta secondo due passanti per i punti nodali per avere quella componente di essa che sommandosi alla forza eccitatrice primitiva dà luogo all'attuale. Di quest'ultima si ricercherà la fase con due letture fatte come prima sul disco rotante con velocità eguali ed opposte. Basta allora decomporre la componente della forza aggiunta, secondo le linee d'azione note delle forze eccitatrici primitiva e attuale per conoscere questa anche in grandezza e poterla quindi equilibrare, provocando mediante opportuni spostamenti delle masse mobili la formazione d'una forza centrifuga eguale e contraria.

Si passerà poi alla correzione della forza eccitatrice agente nell'altro punto nodale seguendo un procedimento affatto analogo al precedente, avendo solo l'avvertenza, quando, sia per la determinazione che per la correzione delle forze eccitatrici, si introducono nel sistema forze estranee, che queste non am-

mettano componenti passanti pel secondo punto nodale per non alterare l'equilibrio prima raggiunto.

Per ottenere sufficiente rapidità nell'operazione è conveniente l'uso di due schemi grafici riproducenti, l'uno la sezione longitudinale dell'albero colle traccie dei piani d'osservazione, dei piani nodali e dei piani contenenti le masse mobili, l'altro una sezione trasversale dell'albero, che potrà rappresentare contemporaneamente uno qualunque dei piani predetti.

II° Caso. *La massa rotante ammette un piano di simmetria normale all'asse di rotazione.* — I punti nodali coincidono uno col centro di figura del sistema rotante, l'altro col punto all' ∞ dell'asse di rotazione: la loro posizione è quindi nota *à priori* e si può senz'altro procedere alla seconda parte della prova, che si effettua ancora come nel primo caso, salvo alcune modificazioni e semplificazioni.

Si riferisce a questo secondo caso l'esempio di cui la tabella qui appresso riportata e la fig. 5 della tavola rappresentano i successivi risultati e le costruzioni grafiche relative.

Numero della prova	Verso della rotaz.	Giri al minuto	Fase del moto	Fase della forza eccitatrice	Forze aggiunte		Osservazioni
					Grandezza	Fase	
1	+	310	290°	252° 30′			Moltiplicatore regolato in modo che $n = 5$.
2	—	310	215°				
					$F_1 = -\frac{239,5}{981}\omega^2$ gr.	0°	Sposto di 1cm verso il centro il blocchetto radiale N. 4.
3	+	300	40°	97° 30′			
4	—	300	155°				
					$F_2 = -\frac{479}{981}\omega^2$ gr.	0°	Sposto ancora di 1cm verso il centro il blocchetto N. 4.
5	+	305	70°	120°			Equilibro F'' (v. Tav.) cogli spostamenti $\delta_1 = +2^{cm},55$ (*) $\delta_2 = +2\ ,55$.
6	—	305	170°				
7	+	490	50°	190°			
8	—	490	330°				
					$M_1 = \frac{239,5}{981}\omega^2.64$ grcm.	0°	Sposto di -1^{cm} il blocchetto N. 2; di $+1$ il blocchetto N. 4.
9	+	480	110°	210°			
10	—	480	310°				
					$M_2 = \frac{42}{981}\omega^2.64$ grcm.	0°	Sposto di $+0,175$ il blocchetto N. 3; di $-0,175$ il blocchetto N. 6.
11	+	480	140°	225°			Equilibro M'' (v. Tav.) cogli spostamenti $\delta'_2 = -0,59$ $\delta'_3 = -0,45$ $\delta'_4 = +0,59$ $\delta'_6 = +0,45$.
12	—	480	310°				

(*) Si ritengono positivi quegli spostamenti dei blocchetti che li allontanano dal centro di rotazione del disco di cui fanno parte.

Le due oscillazioni sono ora una traslazione normale all'asse e una rotazione intorno all'asse verticale centrale; le forze eccitatrici sono una finita e l'altra infinitamente piccola e lontana, ossia una coppia. Allora, determinata la velocità angolare di risonanza corrispondente alla prima oscillazione forzata ($\sim$ 310 giri al minuto) si imprime questa velocità alla massa, prima in un verso poi nell'altro, facendo ogni volta una lettura sul fasometro. Si ha cosí come media delle due letture la fase della forza eccitatrice incognita F: s'introduce (spostando di 1^{cm} il blocchetto radiale N. 4, il cui peso è 239,5 gr.) la forza $F_1 = \frac{239{,}5 \,.\, 1}{g} \omega^2$ gr. di fase 0°; si determina come precedentemente la fase della risultante F' di F e F_1 e si ricava la sua grandezza decomponendo F_1 secondo le rette d'azione di F e F'. Per maggior garanzia di precisione s'introduce un'altra forza $F_2 = \frac{239{,}5 \,.\, 2}{g} \omega^2$ gr. di fase 0° e in base a questa si determina un altro valore di F: ritenendo la media come piú probabile valore (nella figura 5 quasi coincidono) si ricava in base a questo la piú probabile F'' che si equilibra introducendo cogli spostamenti $\delta_1 = \delta_4 = 2^{cm},55$ dei blocchetti 1 e 4 le forze $F_1{}^*$, $F_4{}^*$.

Si determina poi la seconda velocità di risonanza ($\sim$ 480 giri al minuto) e si procede in modo identico al precedente sostituendo soltanto alle coppie $M\ M_1\ M_2$ ... i loro *assi-momenti*, cioè segmenti normali ai piani delle coppie ed eguali in grandezza al loro momento.

Seguendo il corso dell'esperienza si rileva che mentre i mezzi attuali d'osservazione permettono di apprezzare nella misura della fase il grado sessagesimale e nella misura dell'ampiezza il decimo di millimetro, gravi perturbazioni porta nella lettura il fenomeno della pulsazione periodica delle vibrazioni fra massimi e minimi relativi molto diversi, e con forti scarti nella fase del moto.

Tali perturbazioni, dovute forse alla sovrapposizione sull'onda fondamentale di altre onde armoniche, obbligano a speciali cautele nell'osservazione, e meriterebbero quindi ulteriori studî.

Torino, maggio 1917.

Fig 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig 4
Fig 5
Block 2 4
Block 3,6
Block 1,5
Scala forze 0,5 cm = 47,9/981 ω² gr
» momenti » = 16 84/981 ω² gr cm

Sulla origine inorganica o sintetica del litantrace.

Comunicazione del Dr. E. CRIVELLI.

Alla circolazione dell'acqua sulla superfice della terra, corrisponde, nell'interno, la circolazione degli idrocarburi. l'una ci dà il così detto *carbone bianco*, e si presenta come un fattore della massima importanza per la geologia, l'altra ha preparate le vastissime riserve di *carbone nero*, e continua a produrre in quantità non meno grande il *carbone liquido*, cioè i petroli. e nello stesso tempo alimenta una serie lunghissima di reazioni altrettanto importanti, per la genesi dei minerali, di quelle attribuite alla circolazione idrica.

L'Ing. E. Toso (1) osserva che " gli idrocarburi inerti sopra " tutte le altre roccie, agiscono a temperatura ordinaria sul gesso " producendo calcare ed acido solfidrico, il quale ultimo può, ossidandosi, formare minerale di solfo ".

Non si limita certamente alla formazione dei giacimenti solfiferi l'azione degli idrocarburi dei petroli nella genesi dei minerali. In un mio precedente lavoro (2) ho ricordata l'osservazione fatta sul trasporto del nichelio, da masse compatte quali quelle offerte dai cubetti di nichel dati dal commercio, trasporto operato dagli idrocarburi gassosi prodotti nella decomposizione pirogenica del petrolio greggio e dei residui della sua distillazione. Credo che questo fenomeno possa collegarsi a quelli osservati nella formazione del nichel carbonile, del ferro carbonile o degli acetilenuri.

(1) *Sul modo di formazione dei giacimenti petroliferi e solfiferi.* " Boll. Reg. Com. Geol. ", vol. 45, pagg. 7-92.

(2) *Sulla trasformazione degli olii minerali in benzina.* " Archivio di Chim. " diretto dal Prof. I. Guareschi, 1917, pag. 20 e seg.

È sorprendente vedere come due metalli, dei quali il rame fonde a 1200° circa ed il nichelio fra 1400° e 1600°, e che si legano solo a temperature elevate, per le quali non bastano i forni fusori a crogiuolo abitualmente impiegati per i bronzi comuni, ma occorre l'intervento della combustione forzata e l'impiego di materiale refrattario particolarmente resistente, reagiscano l'uno sull'altro a temperature comprese fra i 200° ed i 300° e si ritrovino al raffreddamento con una forma identica a quella che loro è data dalla fusione.

Le proprietà del nichelcarbonile, utilizzate dal Mond nel ben noto procedimento metallurgico, il quale permette di estrarre il nichelio da minerali poverissimi senza ricorrere alla fusione, possono spiegare numerosi fenomeni per i quali i geologi oggi ricorrono all'intervento di temperature esageratamente elevate, accompagnate da ipotesi che per quanto eleganti risultano più spesso poco convincenti.

Il nichelcarbonile ed il ferro carbonile sono conosciuti oggi, molto superficialmente, e non si trovano ancora neppure nei Trattati di più recente pubblicazione, notizie di composti simili per altri metalli, nè si accenna a carburi metallici volatili capaci di offrire delle reazioni paragonabili a quelle sopra ricordate. Tuttavia la formazione di questi composti volatili degli idrocarburi coi metalli, non solo è possibile in laboratorio, ma credo si possa effettuare anche a freddo o coll'intervento di un leggero riscaldamento, quando si mettono in presenza gli olii minerali in polvere finissima e con pressione, sopra i metalli e le loro leghe in date condizioni di suddivisione.

Recentemente ho avuto occasione di osservare la profonda trasformazione avvenuta negli organi in bronzo di una valvola rimasta durante alcuni anni sotto la pressione di una corrente d'aria tiepida a 5 atm., carica di goccioline microscopiche di olii minerali provenienti dalla lubrificazione del cilindro di un compressore d'aria al servizio di un apparecchio per l'acido solforico (1).

---

(1) Questi organi, sede, cappelletto e parte dell'asta contenuti nella scatola della valvola di ghisa, avvicinati alla fiamma coll'intenzione di liberarli da una leggera incrostazione di olio resinificato, scoppiarono senza lasciare traccia del bronzo, ciò che mi fa pensare che la lega si sia vola-

I carburi metallici, che, chimici e geologi ammettono esistere nelle parti profonde della terra, soggetti all'azione dell'idrogeno o degli idrocarburi a temperature anche relativamente basse (200°-300°), possono dare origine a composti gassosi i quali raffreddandosi abbandonano, in alcuni casi favoriti dall'azione catalitica di certe roccie, il metallo allo stato nativo, o nelle condizioni di solfuro, se è presente il solfo. L'elemento od il solfuro metallico, darebbero poi luogo ai prodotti di ossidazione, di carbonatazione, di solfatizzazione, di silicatizzazione, ecc. ecc., che costituiscono le principali varietà di minerali metallici.

Un bellissimo esempio della stretta relazione che passa fra i giacimenti metalliferi, i petroli, gli asfalti ed i carboni fossili è dato dallo studio dei giacimenti minerari del Perù, la famosa " patria dei metalli „ dell'epoca moderna.

Gli idrocarburi liquidi risultano sparsi in tutti i terreni metalliferi di questo paese fortunato.

Il Perù è ugualmente ricco di antracite e di carboni bituminosi, almeno da quanto lasciano sperare le ricerche fatte con numerosi sondaggi. Vi è del carbone grasso a Junin, Cajamarca, Aucachs, Chimbote, Huarmey, Recuay, Huaras e nelle provincie di Libertad, Cajamarca, ecc., asfalto e bitume a La Brea. Vi sono depositi di petroli a Negritos, La Brea, Zorritos, Lobitos, Huancane e nelle provincie di Pirin, Chimbote, Sauja, Huancavelica, Ica, ecc. (1).

Le esplosioni di *grisou* alle quali vanno soggette alcune miniere metallifere, a cagione d'esempio, quella avvenuta nel 1843 a Montecatini, hanno probabilmente origine dalla rimanenza nei giacimenti metalliferi di idrocarburi del petrolio.

tizzata e non abbia avuto luogo un semplice fenomeno di deiscenza che potrebbe attribuirsi alla occlusione degli idrocarburi liquidi nel bronzo per effetto della pressione. La composizione del bronzo mi era ben nota per essere stati, questi pezzi, prodotti nella fonderia annessa allo stabilimento. Rame elettrolitico 85, stagno vergine 15. I getti dovevano essere porosi, come ho potuto constatare sopra getti di forma identica e della stessa colata conservati a magazzino.

(1) " Journ. of the Royal Soc. of Arts „, LXII, 639. " Mercure Scientif. „, 1916, pag. 28.

Il calcare carbonifero che contiene il terreno antico sul quale si formarono i bacini, fu detto anche calcare metallifero per i tesori minerali che frequentemente ricetta.

Anche i bacini carboniferi possono ripetere la loro origine da antiche concentrazioni di petrolî e collegarsi così alla circolazione degli idrocarburi nell'interno della scorza terrestre.

Il prof. I. Guareschi nel mirabile studio sui Petrolî ed Emanazioni terrestri (1), studio che mi ha suggerite le presenti note, fa osservare che " del petrolio si trova in giacimenti più " antichi che non quelli in cui trovasi il carbone fossile; si tro- " vano dei petroli nelle formazioni devoniane e siluriane, cioè " prima ancora che esistesse il carbon fossile ".

Possiamo aggiungere che concentrazioni di petrolio si hanno in terreni senza distinzione di epoche, e si è pure d'accordo nell'ammettere che i giacimenti petroliferi fino ad oggi scoperti, non sono originari o primari, cioè non provengono da una formazione *in situ*, ma da immigrazioni di idrocarburi derivati dal basso per fenditure attraverso alle roccie primitive, o per attraversamento dei banchi per capillarità o spinti in alto dalla pressione dei gaz che sono inseparabili compagni dei petrolî, quando nella loro immigrazione fanno capo alla superficie terrestre.

Distribuzione geografica dei petrolî e dei carboni fossili. — Esistono sorgenti di petrolio a tutte le altezze, sulle Ande come nei mari più profondi (2).

---

(1) Prof. I. Guareschi, *Petrolii ed emanazioni terrestri e loro origini*. Torino, Unione Tip. Ed. Torinese, 1917. Estratto dal " Suppl. Ann. Encicl. Chim. ", pag. 33.

(2) Chi ha attraversato l'Atlantico ha notata certamente l'esistenza di ampie zone che offrono quel meraviglioso giuoco di colori dato dagli olii minerali quando sono distribuiti in strato sottile sulla superfice dell'acqua. Osservando questo fenomeno che si presenta frequentemente in alto mare, si è indotti a pensare alla perdita di olii minerali lubrificanti fatta dai piroscafi che frequentano quei paraggi. Spesso le macchie d'olio alla superficie del mare sono così abbondanti che si potrebbe essere tentati di attribuirle alla distruzione di un sommergibile colle sue riserve di combustibili liquidi.

Darwin, che nel viaggio della *Beagle* ha notate queste iridescenze in

L'osservazione fatta da Fraas (1) del petrolio stillante dai coralli del Mar Rosso, oltre ad indicare l'esistenza di sorgenti di idrocarburi sottomarine, conferma anche la stretta relazione fra il vulcanesimo ed i petroli e le emanazioni terrestri di gas idrocarburati, poichè i banchi di corallo e le isole madreporiche, devono, secondo la ipotesi di Darwin, la loro formazione a movimenti di sollevamento ed abbassamento causati dal vulcanesimo (2).

" I carboni fossili — scrive il prof. I. Guareschi (3) — escludono la presenza del petrolio; ove abbondano i carboni fossili non vi è quasi nulla di petrolio. I paesi che producono molto carbone fossile non producono che poco o niente petrolio, e viceversa ".

Così impostato il problema della distribuzione dei giacimenti di carboni fossili, dei concentramenti di idrocarburi e delle sorgenti petrolifere, crea un rapporto negativo fra petrolî e carboni fossili, il quale rapporto è però sempre a vantaggio dell'ipotesi più sopra accennata.

Se è vero che i carboni fossili propriamente detti ed i petroli si escludono a vicenda, ed in generale le regioni che hanno giacimenti di litantrace e di antracite non offrono concentramenti o sorgenti di petrolio, non è meno vero che i giacimenti di carbone si accompagnano coi vulcani spenti, mentre i terreni nei quali il vulcanesimo è attenuato ma non cessato completamente, dànno a preferenza produzione di petrolio.

---

tempo precedente quello della navigazione a vapore, così si esprime in proposito: " L'unico caso di questa specie che io abbia da menzionare, è uno straticello oleoso sull'acqua, che spiega colori iridescenti. Sulla costa del Brasile, vidi un tratto notevole dell'Oceano coperto in tal modo; i marinai lo attribuiscono al carcame di una balena che probabilmente galleggiava non molto lontano da quel punto ". *Viaggio di un Naturalista intorno al Mondo.* Unione Tip. Ed. Torinese, pag. 22.

(1) Citato dal Guareschi, opera ricordata, pag. 26.

(2) Si confronti la carta segnante la " Distribuzione delle diverse specie di banchi di corallo colla posizione dei vulcani attivi " inserita nell'Edizione della Unione Tip. Ed. Torinese dell'opera *Struttura e distribuzione dei Banchi di Corallo e delle isole Madreporiche*, colla carta delle principali località petrolifere della terra, in Guareschi, op. cit.

(3) Ibidem, pag. 166.

I litantraci sembrano il prodotto del vulcanesimo manifestatosi in epoche remote, mentre le grandiose accumulazioni di petrolî del Canadà, della Pensilvania, della Virginia, quelle del territorio di Bakou sul mar Caspio, per lo più associate ad acque saline ed a gas combustibili, come le emanazioni di idrocarburi dei petrolî studiate da Volta a Pietramala, da Spallanzani a Barigazzo, le salinelle e i vulcani di fango, ecc. si possono ascrivere allo stesso ordine di fenomeni, che se qualche volta sembrano affatto indipendenti dal vulcanesimo propriamente detto, più spesso rappresentano, usando la espressione dell'Issel, " la eco affievolita dell'attività vulcanica „ (1).

Anche i depositi di carboni fossili si trovano a tutte le altezze, ed anche in terreni appartenenti ad epoche diverse dal carbonifero, e forse, quando la teoria che fa derivare questi depositi dai vegetali, avrà cessato dall'avere l'autorità di un dogma, a molti giacimenti di carboni attualmente attribuiti al carbonifero si riconoscerà una età diversa.

Si hanno giacimenti di litantraci a 4000 metri come nel Sud America, e di antraciti a notevoli altezze, come si osserva nella Valle d'Aosta, mentre altri depositi sono posti ad oltre 100 metri sotto il livello del mare, come nelle miniere di litantrace di Withe-Haven in Inghilterra.

Riguardo alla distribuzione dei carboni fossili notiamo anche come i combustibili fossili in generale ed i litantraci e le antraciti in particolare siano molto scarsi nella zona torrida ma si trovino di preferenza nelle zone temperate del globo.

Se questa osservazione sarà dimostrata esatta dalle future ricerche in quelle regioni, industrialmente ancora inesplorate, sarà confermato il rapporto geografico fra i giacimenti di litantrace e le torbiere, le quali ultime si trovano nelle zone temperate e polari anche nei bassipiani ed a piccola altezza sul livello del mare, mentre nei paesi tropicali ed equatoriali si incontrano solamente ad altitudini nelle quali regna un clima relativamente freddo.

Se è vero che sotto l'equatore i giacimenti di litantrace

---

(1) Issel, *Compendio di Geologia.* Torino, Unione Tip. Ed. Torinese, vol. 1°, pag. 276.

sono molto scarsi, non è meno vero che poco abbondanti risultano pure le sorgenti di petroli, e le stesse relazioni che passano fra i depositi di carboni fossili, i concentramenti di petroli ed i vulcani spenti od attivi, persiste in questa come nelle altre zone.

In terreni di manifesta attività vulcanica si possono osservare le numerose sorgenti di petrolio dell'Arcipelago Malese, ed a Sumatra si è scoperto un vasto giacimento di litantrace, nel Perù, nella Columbia, nel Venezuela e nel Messico esistono accanto alle sorgenti petrolifere depositi di litantrace e di bitume, che ci offrono altrettanti esempi di terreni di transizione fra i terreni litantraciferi ed i petroliferi.

Riassunto delle teorie sulla genesi dei carboni fossili. — Si attribuisce al celebre botanico A. L. De Jussieu la ipotesi che fa derivare i carboni fossili dai vegetali. Essa è stata quindi enunciata in quel periodo della storia della Geologia al quale si riferiva Arago quando scriveva: " Cicéron disait qu'il " ne concevait pas comment deux augures pouvaient se regarder " sans rire. Ce mot, il y a un certain nombre d'années, aurait été " appliqué aux géologues sans qu'ils eussent trop le droit de s'en " plaindre; car la science qu'ils professaient était alors une " simple collection d'hypothèses bizarres et dont aucune ob- " servation précise ne montrait la nécessité „ (1).

Tuttavia l'accumulo in date località di una enorme massa di vegetali, quale era richiesta dai considerevoli depositi di carbone fossile, lasciava dubbiosi i più, che preferivano attribuire la formazione dei bacini carboniferi ad antiche torbiere intassate e nascoste in seguito a movimenti del terreno.

Accanto a questa scuola, che conta ancora discepoli numerosi e devoti, come provano i diversi Congressi geologici tenuti in questi ultimi anni, un'altra attribuiva la formazione dei bacini carboniferi a vere alluvioni vegetali in tutto paragonabili a quelle che formarono i banchi sterili che coprono e spesso compenetrano, nei giacimenti, gli strati di carbone.

---

(1) *Annuaire du bureau des longitudes pour l'année 1830*, citato da S. Meunier, *L'Évolution des Théories Géologiques*. Paris, 1911, pag. 118.

Già Élie de Beaumont volendo stabilire una teoria sulla formazione del litantrace, calcolando il cambiamento di volume di uno strato di legno che si trasforma in carbone, notava che, per fare una stratificazione di 1 metro bisognerebbe formare prima una catasta di legname galleggiante di m. 26.52 di spessore, e per uno strato di 30 metri, quale quello di Aveyron, un mucchio di 788 metri, per conchiudere che simili accatastamenti non sono possibili.

Tuttavia, Fayol, che con Grand-Eury è stato uno dei più autorevoli difensori dell'origine organica dei carboni fossili, persiste nell'idea condannata e il De Lapparent nell'esporre con tanti dettagli le dimostrazioni di questi due autori, escludendo o dando una parte insignificante alle altre ipotesi, si schiera con essi.

A. Brongniart, che coi suoi disegni ideali della miniera di Treuil a Saint-Étienne, disegni riprodotti in tutti i trattati di geologia, ha contribuito tanto a divulgare opinioni errate sulla distribuzione dei fossili nei giacimenti carboniferi, ha pure fatto una descrizione così poetica della superfice terrestre all'epoca carbonifera da fornire colle sue lussureggianti foreste e colla massa enorme di carbonio che mette in giuoco, del materiale per formare riserve di combustibili ben più vaste di quelle attualmente misurate, ma anche queste descrizioni non hanno maggior valore dei suoi disegni.

Secondo le idee di altri studiosi, i giacimenti di carboni fossili non sarebbero dovuti a piante trasportate dall'acqua o cresciute nei luoghi ove attualmente si trovano i carboni fossili.

Il Renault, ad esempio, giunge alla conclusione che la carbonizzazione dovette essere anteriore al trasporto del carbone per opera delle acque e solo avrebbe in seguito subìte delle variazioni nella sua struttura e più specialmente nella sua densità per opera della pressione degli strati alluvionali sopraincombenti.

Qui dovrei accennare ad una lunga serie di ipotesi basate sullo studio delle sedimentazioni in acque tranquille, in acque correnti, sulle modificazioni subìte dai sedimenti, e che interpretano in vario modo i fenomeni di trasporto della materia legnosa originale od in via di trasformazione o già carbonizzata, ipotesi basate tutte su problemi di meccanica idraulica.

L'intervento dell'opera dei batterii, determinante, secondo Renault, è da alcuni autori, accettato come ausiliario, mentre altri accenna all'azione di una energia *radiante* che avrebbe agito, non nel senso accennato da Sir William Ramsay quando scrive della trasformazione del silicio, del titanio, dello zinco, del piombo e di altri elementi in carbonio per azione della radioattività, ma soltanto come l'energia chimica nella formazione degli idrocarburi.

In ogni caso però i diversi autori ritornano alle leggi che regolano le sedimentazioni per spiegare la formazione dei bacini carboniferi.

Già il celebre chimico Proust (1) metteva in dubbio che i carboni fossili provengano realmente da piante e parlando del bitume scriveva: “ quelles données avons-nous, après tout, pour “ attribuer aux plantes l'origine des bitumes? „.

Questa visione della genesi dei litantraci è stata difesa in seguito da altri autori, specialmente dai chimici.

Recentemente (1894) Rigaud, senza negare che i vegetali abbiano preso parte a formare i depositi di carbone fossile, come sarebbe per la torba e per alcune ligniti, afferma che per altri carboni non si può riconoscere solamente una origine organica, ma alla loro formazione avrebbero contribuito il bitume ed il petrolio d'origine inorganica e le materie estranee trasportate da petroli nella loro ascesa dalle parti più profonde della terra (2).

Con maggior coraggio H. Lenicque in una Memoria comunicata nel 1903 alla Société des Ingénieurs civils de France (3) e svolta in seguito in un trattato (4), nel quale non sorprende meno l'audacia che la superficiale mentalità dell'autore, espone apertamente l'ipotesi della provenienza dei principali carboni fossili dai petroli.

Il prof. Pictet invece ammette (5) che i carburi ottenuti distillando il carbone fossile nel vuoto preesistano e si sieno formati

---

(1) *Faits pour servir à l'histoire des charbons de terre,* in “ Journal de Phys. „, 1806, pag. 325, citato da Guareschi, ibidem, pag. 19.

(2) Citato dal Prof. E. Di Poggio in *Elementi di Paleofitologia.* Torino, Unione Tip. Ed. Torinese, 1906, pag. 22.

(3) Citata dal Prof. I. Guareschi, opera accennata, pag. 68.

(4) *Géologie Nouvelle.* Paris, 1910.

(5) *Archives des Sciences Phys. et Nat.* Genève, 1917, 15, pag. 167.

per via sintetica in epoche remote ed ora restano ad imbevere un idrocarburo solido di origine organica. Però quando nella Memoria presentata all'Académie des Sciences, in collaborazione con Ramseyer e Kayser, nella tornata del 9 ottobre 1916 (1), afferma che una parte almeno degli idrocarburi del *goudron du vide* esiste già formata nel carbone fossile e che la distillazione a pressione ridotta li separa soltanto per semplice volatilizzazione, senza che abbiano luogo reazioni pirogenate. e conchiude presentando il carbone fossile " come un idrocarburo solido im- " bevuto di un liquido chimicamente affine al petrolio ", stabilisce una parentela così stretta fra i petrolî ed i carboni fossili propriamente detti, che ben poco manca per dare ad entrambi i prodotti una origine sintetica.

In pubblicazioni di data anteriore (2), Kayser esprimeva lo stesso concetto a proposito della composizione del bitume, quando considerava l'asfalto di Pechelbronn come una soluzione di un idrocarburo solido solforato quale l'*asfaltene* in un idrocarburo liquido come il *petrolene*.

La genesi dei litantraci quale è veduta dal Pictet, cioè di una diffusione di idrocarburi liquidi affini al petrolio, in stratificazioni di carboni solidi, mi rammenta quanto il De Lapparent scriveva a proposito della fossilizzazione, ed appunto nel capitolo che tratta della formazione dei litantraci (3): " De toutes " manières, pour qu'un corps organisé puisse être conservé et " devenir un fossile, il faut d'abord qu'il soit soustrait aux in- " fluences atmosphériques soit par incrustation, soit par enfouis- " sement au milieu d'un dépôt. Mais cela même ne saurait " assurer sa conservation intégrale, qui n'est possible que si le " dépôt protecteur offre une imperméabilité absolue ".

Credo lecito osservare che i petrolî sono antisettici per eccellenza, ed il prodotto della loro ossidazione o resinificazione, il bitume, appunto per questa proprietà e per essere impermeabile all'aria ed all'acqua è stato usato in epoche remotissime nella conservazione dei cadaveri e lo si trova in tutti i processi di imbalsamazione praticati dalle civiltà del mondo antico. Si

(1) *C. R.*, t. 163, 9 ott. 1916.

(2) V. " Monit. Scientif. ", 1900, pag. 717.

(3) De Lapparent, *Traité de Géologie*, Paris, 1885, pag. 691.

rimane quindi sorpresi che, in un processo di mummificazione ideale, non si sieno conservate traccie di organismi almeno come quelle offerte dalle inclusioni dell'ambra, ma i fossili compresi nelle masse di carbone siano così rari da fare ritenere la loro presenza del tutto accidentale.

Il carbone fossile, se di origine organica, sarebbe l'unica merce che non offre il certificato della propria nascita, mentre tante altre di indubbia origine biologica, come la farina fossile, i calcari a lumachelle, certe fosforiti, il quarzo xiloide o legno agatizzato, opalizzato, ecc., ecc., hanno conservato tutte abbondantissime prove della loro formazione.

Nella massa dei carboni fossili le traccie di forme organizzate sono rarissime, solo in alcuni casi e particolarmente negli schisti bituminosi, nel *boghead*, nei *cannels*, e simili carboni, che per la loro affinità col bitume si è ancora incerti se debbano considerarsi come litantraci, si trovano qualche volta delle impronte di foglie, di macrospore, microspore, granelli di polline, radichette, e spesso anche le sostanze stesse conservate come se fossero rimaste occluse in una sostanza gelatinosa o vischiosa passata poi allo stato solido.

Tale fenomeno si può seguire anche oggi nei giacimenti di asfalto, ove le foglie ed altri materiali sono portate dal vento e rimangono fissate sulla superficie peciosa.

Le piante fossili, alle quali si attribuisce la formazione del litantrace, non sono mai completamente occluse nei letti di carbone, ma con altri fossili sono comprese nei depositi sovrapposti o sottoposti costituiti da materiali detritici che subirono un trasporto per opera delle acque.

In alcune miniere furono trovati degli interi alberi giganteschi che attraversavano gli strati di carbone e quelli che loro erano sovrapposti.

I giacimenti di litantrace e di antracite offrono quasi sempre la classica forma di bacino ed il combustibile forma delle stratificazioni parallele fra loro ed all'antico fondo della conca. Di queste stratificazioni ne esistono al solito parecchie intercalate da strati sterili. Lo spessore degli strati di carbone varia da pochi centimetri sino ad 1-2 metri, qualche volta anche 6-7 metri e 30-40 metri.

La struttura del materiale formante gli strati di carbone

è costituita da numerose zone sovrapposte che si separano con grande facilità. I carboni fossili propriamente detti sono generalmente di un bel nero e qualche volta la loro superficie è iridescente, caratteri questi che, a mio parere, indicano che la sostanza è passata per uno stato fluido prima di solidificarsi.

La forma zonata dice che questa solidificazione è avvenuta in modo intermittente, e che una zona ha preso consistenza quando la zona sottostante era già tanto indurita od alterata da non permettere che le due superficie combacianti si saldassero fra loro.

È questo un fenomeno che si può seguire anche oggi nei laghi di asfalto, nei quali i petrolî, che affluiscono dalle sorgenti vicine, si induriscono per resinificazione sulla superficie delle acque salse.

Il petrolio greggio, anche quando è molto denso, ha sempre un peso specifico inferiore a quello dell'acqua, e poichè le sorgenti di petrolio sono quasi sempre accompagnate da acque mineralizzate, i laghi nei quali vi ha formazione di bitume tengono a galla dei materiali a peso specifico più elevato di quello dell'acqua semplice, come si osserva appunto nel lago Asfaltide, nel lago dell'isola Trinidad ed altrove.

Nella formazione dei bacini carboniferi si formò probabilmente, sulla superficie di antiche lagune, uno strato di bitume, che procedendo la resinificazione, acquistava una densità sempre maggiore, favorito, può darsi, da una temperatura tropicale.

Anche solo con una densità uguale a quella del bitume della Trinità (1.39-1.43), o del bitume della Giudea (1.10-1.20), se interveniva una diluizione della salsedine delle acque, il lenzuolo di bitume scendeva nel fondo, e sulla superficie libera della laguna si formava un nuovo adunamento di petrolî che iniziava un nuovo periodo di trasformazione.

Il lavoro di condensazione e di precipitazione del bitume si ripeteva durante un tempo più o meno lungo segnato dall'altezza degli strati di carbone fossile, sino a quando, cessata l'attività delle sorgenti petrolifere, il deposito veniva coperto da materiali di trasporto.

Gli strati sterili di questi materiali offrono sempre un notevole spessore in confronto colle stratificazioni di carbone, e continuano a mantenersi paralleli all'antico fondo del bacino. Per

spiegare questa stratificazione può interessare quanto S. Meunier scrive a proposito della formazione dei sedimenti (1): " La " disposizione orizzontale della maggior parte degli strati alla " formazione dei quali noi possiamo assistere, ha radicata l'opi- " nione che gli strati obliqui sono necessariamente stati smossi " dalla loro posizione originale. Ciò non ostante alcuni autori " pensano che si possono avere dei depositi nei quali la incli- " nazione e le ondulazioni sono originali. Wiegmann ha appog- " giata con esperienze l'ipotesi che molte stratificazioni abbiano " potuto sovrapporsi sopra dei piani inclinati quando la loro " inclinazione non era superiore ai 40° ".

In alcuni giacimenti, come succede nella *grande masse* del bacino carbonifero di Saint-Étienne, il litantrace assume la forma di stratificazioni con andatura variabile, o riempie delle cavità irregolari nelle quali il litantrace può essere giunto sotto la spinta della pressione esercitata sui depositi originali, quando questi non avevano ancora raggiunta la completa solidificazione, oppure queste formazioni si devono ad incrostazioni prodotte da vene di petrolio che si sono diffuse nel terreno occupando delle fenditure o dei vuoti lasciati da precedenti depositi di sali asportati da un processo di lisciviazione naturale, od anche dei depositi di grafite depositati da reazioni pirogene alle quali furono soggetti dei petrolî di formazione più antica.

Lo spazio non mi consente di insistere oltre sulla parte geologica della presente trattazione. Vediamo invece come la chimica appoggi la concezione dell'origine inorganica dei carboni fossili propriamente detti.

Prodotti della distillazione dei carboni fossili e dei petrolî. — Gli studi di Pictet e dei suoi collaboratori (2), sulla distillazione del carbon fossile a pressione ridotta, sono particolarmente interessanti per dimostrare la stretta relazione esistente tra i litantraci ed i petrolî.

Dal catrame esente da fenoli, *goudron du vide*, ottenuto distillando il carbone fossile a 450° C. ed alla pressione di 12-15 mm.,

---

(1) Meunier, loco citato, pag. 287.

(2) V. articolo *Distillazione del carbon fossile nel vuoto*, in " Supp. Ann. Enc. Chim. ", 1916, pag. 293 e seg.

Pictet e Bouvier ottennero gli idrocarburi C^9H^{18} e $C^{11}H^{22}$ e degli alcooli aromatici. In altre esperienze isolarono gli idrocarburi da C^9H^{18} a $C^{13}H^{26}$ corrispondenti agli idrocarburi già trovati nei petroli del Caucaso e del Canadà. Ottennero anche l'idrocarburo solido $C^{30}H^{60}$ identico al *melene* del petrolio di Galizia.

Pictet e Ramseyer hanno estese le loro ricerche sui prodotti dell'estrazione del carbone fossile col benzene bollente, incontrando nelle soluzioni gli stessi idrocarburi ed alcooli ottenuti colla distillazione a pressione ridotta, il che prova che nel processo seguìto nella distillazione non si verifica alcuna decomposizione pirogenata.

Fra i composti isolati delle soluzioni benzeniche, si è individuato l'esaidruro di fluorene $C^{13}H^{16}$, che scaldato al rosso vivo genera il fluorene con sviluppo di idrogeno.

Già Lissner (1) aveva isolato dai bitumi aderenti alle pietre di volta di differenti bacini carboniferi un composto che stimò essere il β. metilantracene. A questo composto della serie idroaromatica, suscettibile di essere estratto dal carbone col benzene bollente, si attribuisce la fluorescenza offerta dalle soluzioni benzeniche dell'estrazione dei carboni fossili.

Le soluzioni che si ottengono facendo agire il benzene bollente sul litantrace in polvere, presentano sempre una fluorescenza verde gialla, verde rossa o bleu rossa, ed a questa proprietà si ricorre appunto per distinguere le ligniti dai litantraci.

Le soluzioni provenienti dal trattamento delle ligniti col benzene bollente sono più o meno colorate in giallo o giallo bruno, ma non sono fluorescenti o lo sono in modo inapprezzabile.

Pictet e collaboratori non hanno trovato nel *goudron du vide*, e neppure nelle soluzioni benzeniche, gli idrocarburi della serie C^nH^{2n+2} che costituiscono i petrolî americani, ma sappiamo che nei processi di raffinazione dei petrolî russi, formati, come è noto, da 80 a 90 % di idrocarburi della serie C^nH^{2n}, si ottengono altri idrocarburi le cui costanti fisse sono del tutto identiche a quelle degli idrocarburi ricavati dai petrolî americani.

Oltre al catrame del vuoto Pictet ottenne, nella distillazione a pressione ridotta, una grande quantità di gas idrogeno, metano, etilene e poco o nulla di acetilene. Poichè si è escluso

(1) " Oesterr. Zeit. f. Berg. u. Huttenwessen ", n. 41, 1910, pag. 46.

l'intervento di reazioni pirogeniche, bisogna ammettere che questi gas si trovano già formati nel litantrace, quindi non tutto l'H, il CH^4, il C^2H^4 che si hanno nel frazionamento dei petrolî greggi e nella distillazione del gas illuminante dal carbon fossile, è prodotto delle reazioni pirogenate.

Si era già osservato che, quando si scaldano i carboni fossili a *grisou*, fra 50 e 300° lasciano sfuggire del gas metano, 1-2 litri per chilogramma di carbone, e 10-15 gr. di un prodotto liquido che ha l'odore della benzina (1). In questo caso, più che di una occlusione del metano, come si osserva anche per altri gas, nelle pietre meteoriche, nei basalti, in molti campioni di grafite, nelle lave ed in un numero grandissimo di minerali, sembra trattarsi di una vera e propria dissoluzione negli idrocarburi liquidi, che entrano, secondo le conclusioni del Pictet, nella formazione del carbone fossile.

Nel mio lavoro precedentemente ricordato, notavo che quando si raccolgono nel petrolio da illuminazione i gas non riducibili prodotti dalla decomposizione pirogenica dei petrolî greggi e dei loro residui, gas che contengono molto metano, si hanno delle soluzioni così stabili da potersi distillare ottenendo una miscela di idrocarburi liquidi che ha tutti i caratteri peculiari della benzina del commercio. Dopo qualche tempo, e specialmente se il liquido è agitato, i gas abbandonano il solvente e resta il petrolio da illuminazione.

Io penso che qualche cosa di simile avvenga nella produzione del *grisou*. Il metano disciolto negli idrocarburi del carbone fossile, abbandona il solvente favorito dall'abbassamento della pressione barometrica, dall'agitazione microsismica, e per altre cause accennate da De Rossi, da Chesneau, da Zenger e da altri per spiegare la formazione del *grisou* (2).

È noto quale pericolo presenta il *grisou* per gli operai che lavorano in certe miniere di carbone fossile. Nelle miniere di lignite invece il gas dannoso alla vita dei minatori è l'anidride carbonica quasi pura, e solo eccezionalmente si incontrano degli idrocarburi (3).

---

(1) GUARESCHI, ibidem, pag. 103.
(2) V. GUARESCHI, loco citato, pag. 108.
(3) GUARESCHI, ibidem, pag. 127.

La distillazione pirogenica della lignite dà, come quella del litantrace, due serie di prodotti, in parte gassosi ed in parte catramosi ed acquosi.

Nel caso della lignite, l'acqua presenta quasi sempre una reazione fortemente acida, qualche volta neutra, solo in casi eccezionali è debolmente alcalina. Al contrario nella decomposizione del carbon fossile il distillato presenta una reazione costantemente basica per la presenza di combinazioni ammoniacali.

I gas forniti dalla distillazione della lignite, si compongono per metà di acido carbonico, azoto ed ossigeno, e solo il 50 % circa è formato da gas combustibili, mentre i gas che si hanno dalla decomposizione degli idrocarburi pesanti del petrolio. come il gas del litantrace, sono sempre molto ricchi di idrocarburi e presentano una grande analogia coi gas, emanazioni naturali che in molti casi si impiegano essi pure per la illuminazione.

Il catrame del carbon fossile è sempre ricco di derivati della serie aromatica, benzene, naftalene, antracene, toluene, ecc. Il gas illuminante contiene in sospensione una certa quantità di tali composti, che pure si incontrano ugualmente abbondanti, e colla serie completa, nel barilotto degli apparecchi che producono il gas d'olio colla decomposizione del residuo del frazionamento del petrolio. Alcuni procedimenti industriali ottengono il benzolo ed il toluolo colla decomposizione pirogenata dei residui del petrolio greggio.

Nei prodotti catramosi della distillazione secca delle ligniti, si trovano anche alcuni derivati ossigenati della serie aromatica, ma sono quegli stessi composti che si trovano pure nella distillazione del legno, provenienti dalla decomposizione della lignina e delle sostanze albuminoidi.

Nel catrame di lignite, gli idrocarburi aromatici sono in minima quantità, se si paragona la loro percentuale nel catrame del litantrace e dei processi derivati dal *cracking*. Spesso questi composti mancano nel catrame di lignite nel quale abbondano invece gli idrocarburi alifatici e particolarmente la paraffina.

Se noi distilliamo il petrolio greggio od i residui del frazionamento dei petroli, nelle stesse condizioni di temperatura dei litantraci, otteniamo dei prodotti identici, o così poco diversi da far ritenere che le materie dalle quali derivano abbiano una composizione uguale o molto affine.

Nella decomposizione pirogenica dei petrolî greggi e dei residui del loro frazionamento, si ha idrogeno e metano, accompagnati da altri idrocarburi più ricchi di carbonio e più poveri di idrogeno, benzolo, toluolo, naftalina, quella indiavolata naftalina, che colla ostruzione dei refrigeranti mi ha create tante noie nei primi tempi della mia pratica nella distillazione pirogenata dei petrolî, antracene, crisene, fluorene, ecc...., e coke.

Azione dei solventi. — Per quanto si riferisce all'azione dei solventi, si assiste ad un graduale cambiamento, colla concentrazione degli atomi di carbonio nei prodotti derivati dai petrolî.

I petrolî sono solubili o miscibili in tutte le proporzioni nel solfuro di carbonio, nell'etere, nel benzene, ed in altri solventi, mentre il bitume è solubile solo in proporzione di 5 % nell'alcool, solubilissimo nell'etere, nel solfuro di carbonio, insolubile nell'essenza di trementina, nel petrolio, nel cloroformio. Il solfuro di carbonio ed il benzolo estraggono quantità estremamente piccole di elementi idrocarburati dai litantraci magri, e quantità sensibilmente maggiori dagli schisti bituminosi, *bonghead*, *cannels* e simili.

Un comportamento analogo è offerto dalla gomma elastica, la cui solubilità nel benzolo, nella benzina e particolarmente nel solfuro di carbonio, va diminuendo col crescere della durezza, cosicchè dal lattice solubilissimo nei solventi sopra ricordati, si giunge alla gomma elastica vulcanizzata, che risulta soltanto gonfiata e rammollita dall'immersione prolungata nei solventi, ed alla ebonite, la quale resiste ottimamente all'azione di tutti i solventi ordinarî della gomma *para*.

Il comportamento dei petrolî e del bitume di fronte ai solventi ha fatto attribuire la trasformazione dei petrolî in bitume ed asfalti all'azione del solfo.

Kaiser, ad es., trascura completamente l'ossidazione nella formazione dell'asfaltene dal petrolene, e corregge la formola $C^{20}H^{32}O^{3}$, data da Boussingault per l'asfaltene estratto dal petrolio di Pechelbronn, sostituendo il solfo all'ossigeno come segue: $C^{25}H^{45}S^{2}$.

Nei petrolî il solfo varia entro limiti relativamente ristretti, da 0.4-0.6 % nei petrolî del Canadà e del Ohio, si sale a 0.06-2.08 % nei petrolî della California, ed a 9-12 % nei residui

della distillazione di questi ultimi. Alcuni petroli però sono quasi completamente privi di solfo, così i petroli di Tegernsee ed altri avuti da giacimenti a nord-ovest del Canadà.

Gli asfalti contengono più spesso da 2 a 10 % di solfo che può esservi apportato da composti organici o dalla disaggregazione dei calcari per opera dei petroli.

Nei litantraci l'elemento solfo varia da 2 a 3 %, alcuni tipi molto puri ne contengono soltanto traccie, in altri il contenuto in solfo sale a 5-6 % ed oltre, in gran parte legato col ferro nella forma di pirite, in parte colla forma di solfati alcalini ed alcalino-terrosi e parte in composti organici.

Tutti i carboni fossili contengono quantità variabili di sali, cloruri di magnesio, calcio, sodio, potassio, alluminio, ammonio, solfato di calcio, silice, ecc.

L'estrazione con acqua di questi composti, è estremamente lenta e sopratutto incompleta anche trattando il carbone in polvere impalpabile e prolungando il contatto per 24-36 ore. Si tratta di sali, alcuni dei quali sono solubilissimi, che il carbone trattiene con ostinazione anche quando si liscivia a lungo con una soluzione di acido nitrico 10 %.

Evidentemente questi sali sono contenuti nella massa del litantrace, e poichè la loro natura è sensibilmente affine ai composti contenuti nelle acque salse che accompagnano le sorgenti petrolifere, e si ritrovano tutti, a cagion d'esempio, nelle acque del lago Asfaltide, credo si possa riallacciare la loro presenza nel litantrace alla formazione dal bitume e dai petroli.

Riguardo alla struttura dei combustibili fossili, si può osservare come in certe ligniti il tenore di acqua può salire a 60 %, ed essiccate completamente queste stesse ligniti riprendono tutta l'acqua perduta se esposte in una atmosfera satura di umidità. Il carbone fossile invece appena estratto non contiene più di 2-3 % di umidità, tenore che nei tipi di litantraci più friabili può essere riferito ad una condensazione di acqua alla superficie.

Per contro alcuni tipi di carboni fossili come certe ligniti brillanti nere a frattura concoide e certi carboni grassi, stratificati a zone molto spesse, non sono affatto igroscopici o lo sono in modo inapprezzabile.

La pirite che, più o meno abbondante si ha in tutti i cam-

pioni di carboni fossili, forma delle laminette sottilissime sulla superficie di contatto delle zone, il che lascia supporre che il ferro sia stato depositato alla superficie degli strati da una azione simile a quella che si osserva nella formazione della limonite delle torbiere e fissato poi dal solfo contenuto nel bitume.

Conclusione. — Da quanto precede credo di poter conchiudere che la ipotesi, la quale attribuisce al litantrace una origine inorganica o sintetica appaia meno fantastica di quanto generalmente si pretende.

La struttura dei litantraci, delle antraciti e di alcune ligniti, la forma e la distribuzione geografica dei loro giacimenti, e sopra tutto lo studio delle proprietà chimiche di questi combustibili, li pongono più vicini al bitume ed ai petrolî che non alle ligniti xiloidi ed alle torbe.

Torbe, ligniti, asfalti, bitume, schisti bituminosi, nafta, litantrace ed anche il legno, dànno alla distillazione pirogenica alcuni composti identici, ma ben più evidenti esempi la Natura ci offre di composti prodotti per sintesi ed anche attraverso le forme della vita.

Alle apatiti di origine endogena delle roccie azoiche, alle apatiti di indubbia origine idrotermale, ed alle apatiti dei meteoriti, fanno riscontro le apatiti cristallizzate prodotte nella metamorfosi dei giacimenti di guano quaternarî e dell'epoca attuale, le apatiti delle breccie ossee, ecc.; i calcari cristallizzati, molti composti dell'acido silicilico ed altri numerosi esempi si hanno di composti naturali prodotti per sintesi e d'origine organica.

Le reazioni reciproche dei gas combustibili che formano le emanazioni terrestri (idrogeno, metano, etano, ossido di carbonio, ecc.), le quali, dopo avere prodotto i petroli, hanno creato i depositi di asfalto, di litantrace, di antracite e di grafite, si possono effettuare al completo coi mezzi oggi acquisiti dalla tecnica dei laboratorî chimici.

Queste reazioni, che, ripeto, il chimico può dimostrare facilmente, ci raccontano la storia del litantrace e degli altri carboni meno idrogenati, con una serie i cui termini estremi sono l'idrogeno ed il coke.

La serie in natura sarebbe rappresentata dai prodotti elencati nella tabella seguente:

Schema di classificazione, in base al tenore di idrogeno, dei gas combustibili delle emanazioni naturali, dei petrolî e derivati.

	H	C	O	
Gas delle emanazioni terrestri:				
idrogeno	100	—	—	
metano.	25.1	74.9	—	
etano	23.4	76.6	—	
Gas delle sorgenti petrolifere ed eteri dei petrolî . . .	25 - 16	75 - 84	—	nei petrolî americani, dai termini più semplici a C^6H^{14}.
Petrolî:				
americani (*Pensilvania*, *Canadà*, *Ohio*, *Virginia*, ecc.) . . .	13.1 - 14.8	84.9 - 82	1.4 - 3.2	composti quasi esclusivamente da idrocarburi della serie, satura dai primi termini al composto $C_{26}H_{54}$.
intermedî (*Rumenia*, *Galizia*, ecc.)	14.8 - 12.1	82.2 - 86.6	2.1 - 5.7	miscele di idrocarburi saturi e polimetilenici.
russi	12.5 - 13.6	86.3 - 86.6	1 - 0.1	80-90 % di idrocarburi della serie C_nH_{2n} o nafteni.
italiani	12.2 - 13.4	81.9 - 86.4	1.4 - 5.6	affini ai petrolî russi.

di Pechelbronn	9.6 - 12	85 - 86.9	1.3 - 4.5	
Bitume:				
petrolene	11.8	88.2	—	
asfaltene	9.9	74.25	—	solfo 15.85 - (?)
Asfalti	8 - 11.5	77.5 - 86.1	0.5 - 11.5	solfo 2-10 %.
Schisti bituminosi: cannels, bon-ghead, naftoschisti	10 - 5.5	70 - 75	?	con oltre 50 % di materie volatili.
Litantraci:			(O + Az)	
secchi a lunga fiamma . . .	5.5 - 4.5	75 - 80	19.5 - 15.0	materie volatili 40-48 %.
grassi „ „ . . .	5.8 - 5.0	80 - 85	14.2 - 10	„ „ 32-40 „
„ propriamente detti . .	5.0 - 5.5	84 - 89	11 - 5.5	„ „ 24-32 „
„ a corta fiamma . . .	5.5 - 4.5	88 - 91	6.5 - 4.5	„ „ 14-24 „
magri antracitosi	4.5 - 4.0	90 - 93	5.5 - 3.0	„ „ 7-10 „
Antracite	2 - 4	93 - 95	3	„ „ 4-7 „
Grafite (*Ceylan* e *Madagascar*) .	0.05 - 0.2	98 - 9	—	
Carbonio	—	100	—	

Sui ponti ad arco in cemento armato.

Nota del Socio C. GUIDI.

I ponti in cemento armato a grandi arcate, nei quali il piano stradale viene foggiato a guisa di solaio riposante su muretti trasversali, o più spesso su pilastri che trasmettono il carico all'arcata, rappresentano l'esplicazione più spinta di quel tipo di ponti in muratura a grandi arcate con timpani a giorno, che ha avuto negli ultimi tempi così splendide applicazioni. Ed in taluni di questi ponti in cemento armato, più che in quelli in muratura, destano la più grande ammirazione l'arditezza e l'eleganza delle forme, ottenute con spessori talmente ridotti, che allo sguardo del tecnico vengono soltanto giustificate dalla esistenza delle interne armature metalliche che egli vi intravede, e che rendono l'arcata efficacemente solidale colla soprastruttura, talchè questa (quando non sia interrotta da giunti di dilatazione, ma sia invece continua e solidale colle spalle) presta un efficace aiuto alla resistenza dell'arcata. I costruttori, col loro pratico intuito, fanno affidamento su tale contributo, e riducono, in relazione ad esso, le dimensioni radiali dell'arcata.

Con questa breve Nota vogliamo accennare ad una valutazione del suddetto contributo, se non esatta, molto approssimata, che può ottenersi con metodo semplice.

Rappresenti la fig. 1_a lo schema di un ponte del tipo sopra indicato, nel quale l'impalcatura, in corrispondenza del vertice dell'arcata, si fonde colla medesima. Lo studio rigoroso del regime iperstatico di tutta la costruzione, risultante dall'arcata solidale colla soprastruttura, richiederebbe calcoli laboriosissimi; ma una notevole semplificazione può conseguirsi osservando che mentre l'impalcatura oppone una resistenza notevolissima allo sforzo assiale, non può offrirne che una molto limitata rispetto

alla sollecitazione a flessione, in causa del limitato modulo di resistenza della sua sezione trasversale alla flessione, in riguardo alla sua lunghezza, come pure molto limitato è l'intervento dei pilastri provocato dagli spostamenti delle loro sezioni d'attacco coll'arcata. In altri termini il sistema iperstatico resistente può, con grande approssimazione, essere ridotto all'arcata solidale, al vertice, coll'impalcatura, solidale, quest'ultima, anche colle spalle, riservando ai pilastri la funzione soltanto di trasmettere i carichi verticali dall'impalcatura all'arcata.

Su di un tale sistema il contributo di resistenza offerto dall'impalcatura per condizioni di carico simmetriche, quindi

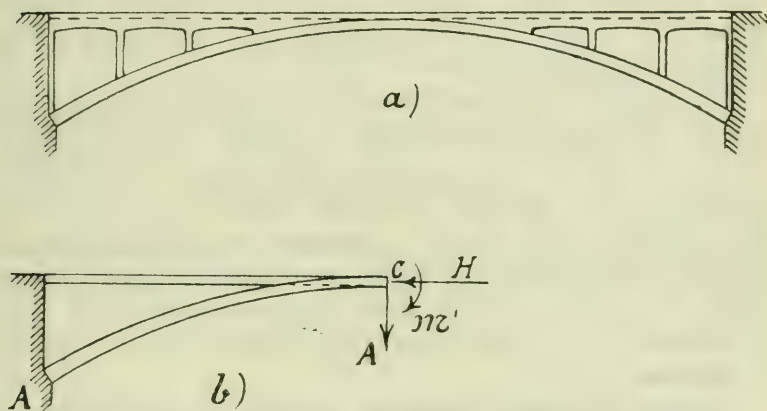



Fig. 1.

anche per il peso proprio (quando il ponte è simmetrico), è ben piccolo, perchè, essendo simmetrica la deformazione dell'arcata, il vertice di questa si sposta soltanto verticalmente e non induce, per conseguenza, nell'impalcatura alcuno sforzo assiale, bensì delle sollecitazioni a flessione che, come si è detto, non possono essere che molto moderate.

Al contrario, per carichi accidentali dissimmetrici il vertice della arcata tende a spostarsi anche orizzontalmente, e ciò è contrastato dall'impalcatura.

Supponiamo, per fissare le idee, che l'arcata risulti di un solettone rinforzato da nervature, e che parimenti il piano stradale sia formato da una soletta rinforzata da nervature tra-

sversali e longitudinali. Consideriamo il complesso formato da una nervatura dell'arcata colla porzione di solettone che le appartiene (che chiameremo *arco*) e dalla sovrastante nervatura longitudinale dell'impalcatura colla soletta che le appartiene (che chiameremo *trave*).

Carichi accidentali insistenti su di una metà dell' arco (*se si prescinde dalla presenza della trave*) agiscono sul semiarco scarico, per es. il sinistro, fig. 1_b, con una forza eguale ed opposta alla reazione dell'imposta A, per modo che, indicando, al solito, con $\mathfrak{M}$, A, H i parametri di quest'ultima rispetto al baricentro elastico dell'arco, si avrà sul baricentro C della sezione al vertice una spinta orizzontale H diretta verso sinistra, una forza verticale diretta al basso $= A$, ed un momento $\mathfrak{M}'$ dato da $\mathfrak{M}' = - \mathfrak{M} + Hh$, se h è l'altezza di C al disopra del baricentro elastico dell'arco.

La rigidità della trave rispetto alla flessione è troppo piccola per modificare sensibilmente il regime di sforzi prodotti nell'arco da $\mathfrak{M}'$ e da A; invece la trave reagisce intensamente contro la H con due forze orizzontali applicate al vertice dell'arco, rivolte verso la parte caricata: una μH_0 di tensione, sviluppata dalla semitrave destra, che compie l'ufficio di catena; l'altra $(1 - \mu) H_0$ prodotta dalla semitrave sinistra che funge da puntone, dove μ rappresenta una frazione, di cui si troverà in appresso il valore.

Queste due forze orizzontali modificano notevolmente il poligono delle pressioni dell'arco. Indicando con H_A la nuova spinta orizzontale per il semiarco scarico e con H_B quella per il semiarco caricato, si dovrà avere evidentemente

$$H_A + H_0 = H_B, \tag{1}$$

come pure

$$H_A + (1 - \mu) H_0 = H_B - \mu H_0 = H$$

quindi anche

$$H_A = H - (1 - \mu) H_0. \tag{2}$$

Ciò posto, sia δ'_a lo spostamento orizzontale del punto C del semiarco, prodotto da una spinta 1 orizzontale agente in C sul semiarco scarico, supposto svincolato dalla trave, e δ'_0 lo spostamento dello stesso punto, considerato come appartenente alla

trave, prodotto dalla stessa forza 1 agente invece sulla semitrave scarica svincolata dall'arco. Per la solidarietà fra arco e trave, deve risultare

$$\frac{H_A}{1}\,\delta'_a = \frac{(1-\mu)\,H_0}{1}\,\delta'_0$$

da cui, in grazia della (2), si deduce

$$H_0 = \frac{H}{1-\mu}\,\frac{\delta'_a}{\delta'_a + \delta'_0}. \tag{3}$$

Gli spostamenti δ'_a e δ'_0 ed il coefficiente di ripartizione μ si calcolano nel seguente modo:

Sia $\mathbf{J}_x$ il momento d'inerzia dell'*arco elastico* rispetto all'asse x orizzontale, passante pel baricentro elastico dell'arco [1]; quello $\mathbf{J}_{x'}$ relativo all'orizzontale passante pel baricentro C della sezione al vertice dell'arco, orizzontale che dista h dall'asse x, è dato da

$$\mathbf{J}_{x'} = \mathbf{J}_x + h^2\,\Sigma w,$$

dove Σw rappresenta, al solito, la somma dei pesi elastici, e si ha dalla teoria dell'ellisse di elasticità

$$\delta'_a = 1\,.\,\frac{\mathbf{J}_{x'}}{2}. \tag{4}$$

Siano poi E ed F, rispettivamente, il modulo di elasticità e l'area della sezione trasversale della semitrave compressa ed l la lunghezza totale della trave, si ha:

$$\delta'_0 = 1\,\frac{\frac{l}{2}}{EF}. \tag{5}$$

---

[1] Colle notazioni da me adottate nella *Teoria dei ponti* e giovandosi delle note costruzioni grafiche si ha

$$\mathbf{J}_x = \lambda_2\,.\,\lambda_4\,.\,n$$

nella quale una delle tre dimensioni del secondo membro, per es. la n, va letta nella scala dei pesi elastici e le altre due nella scala delle lunghezze. Se nel calcolo dei pesi elastici si suppose $E=1$, si ricordi di dividere ancora l'espressione per l'effettivo valore di E.

Indicando inoltre con E_1 ed F_1 le quantità analoghe per la semitrave tesa, ed osservando che l'accorciamento *effettivo* della semitrave compressa deve risultare eguale all'allungamento *effettivo* della semitrave tesa si avrà

$$(1-\mu)\, H_0 \frac{\frac{l}{2}}{EF} = \mu H_0 \frac{\frac{l}{2}}{E_1 F_1}$$

da cui

$$\mu = \frac{1}{1+\frac{EF}{E_1 F_1}}. \tag{6}$$

Il complesso *semiarco-trave* sinistro sopporta adunque la spinta $H_B - \mu H_0$, di cui la parte $(1-\mu) H_0$ viene sostenuta dalla semitrave, e la rimanente parte $H_B - \mu H_0 - (1-\mu) H_0 =$ $= H_B - H_0$ viene sopportata dal semiarco. La tensione μH_0 della semitrave caricata ha per vantaggioso effetto di rialzare il poligono delle pressioni verso l'imposta del semiarco caricato, diminuendo in conseguenza notevolmente le sollecitazioni.

Essendo in ogni caso molto piccolo lo sforzo unitario di tensione a cui rimane cimentato il beton della semitrave tesa, si può ritenere $E = E_1$ e quindi anche $F = F_1$, con che la (6) fornisce

$$\mu = \frac{1}{2} = 1 - \mu \tag{7}$$

e perciò la (3) diviene

$$H_0 = 2H \frac{\delta'_a}{\delta'_a + \delta'_0}. \tag{8}$$

La (6) suppone trascurabili i cedimenti degli ancoraggi della trave alle spalle, mentre il più delle volte non lo saranno; ma l'effetto di tali cedimenti (in ogni caso speciale, noto il tipo di costruzione, è facile calcolare il cedimento elastico prodotto dalla forza unitaria) può anche essere conglobato colla variazione elastica di lunghezza della semitrave, attribuendo un opportuno valore fittizio ad E. Anche esistendo tali cedimenti, l'effetto prodotto dalla trave sull'arco è notevolissimo.

Esempio. — La fig. 2 rappresenta l'applicazione delle cose dette ad un caso pratico.

La corda l dell'asse geometrico dell'arco vale m. 44,60.

L'area della sezione trasversale della trave ridotta in beton è di cm² 6590. Supponiamo pure per il modulo di elasticità della trave un valore molto basso, $E = 50\ {}^{t}/_{cm^2}$, e sia m. 0,001376 il cedimento elastico unitario degli ancoraggi, si ha in totale

$$\delta'_0 = \frac{1}{2}\ \frac{44,60}{500000 \times 0,659} + 0,001376 = \text{m. } 0,001444.$$

Scale: $1^{cm} = 4^{m} = 10^{t}$

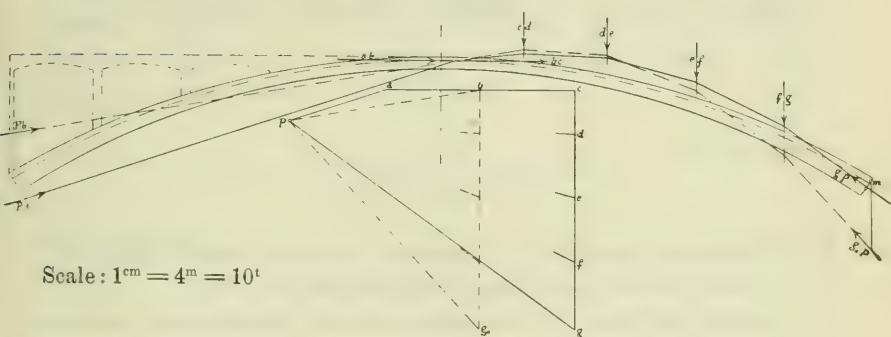



Fig. 2.

Si ha inoltre per l'arco preso in esame, per il quale sono stati eseguiti i noti calcoli grafici, che qui non si riportano,

$$\mathbf{J}_{x'} = \mathbf{J}_x + h^2 \Sigma w = 0,001685 + 1,29^2 \times 0,000702 = 0,002854\ {}^{m}/_{t}$$

e quindi, secondo la (4),

$$\delta'_a = \text{m. } 0,001427$$

con che la (8) fornisce

$$H_0 = 0,994\ H.$$

Supponendo *l'arco svincolato dalla trave* e che sul semiarco destro insistano i carichi $cd = $ t. 5,81, $de = $ t. 8,44, $ef = $ t. 8,66 $= fg$ (prodotti da un carico accidentale uniforme di 500 ${}^{kg}/_{m^2}$, nella

posizione che rende massimo lo sforzo di compressione all'intradosso della sezione d'imposta destra) si sono ricavati (per mezzo dei noti poligoni funicolari p_1, p_3, p_5) i parametri della reazione d'imposta sinistra dell'arco, i quali hanno i valori seguenti

$$\mathfrak{M} = \text{tm. } 29{,}381 \; ; \qquad A = \text{t. } 4{,}267 \; ; \qquad H = \text{t. } 24{,}751.$$

Determinata così completamente la reazione d'imposta sinistra Pb, si è disegnato *a tratti* il poligono delle pressioni per l'arco *supposto svincolato dalla trave.*

Lo sforzo unitario massimo all'intradosso della sezione d'imposta destra, viene calcolato colla nota formola

$$\sigma_i = \frac{H h_m}{F \mathfrak{d}_i}$$

nella quale

$$H = \text{Kg. } 24751$$

h_m = distanza verticale del punto di nocciolo m dalla linea $g_0 P$ della reazione d'imposta destra = cm. 368,

F = area, ridotta in beton, della sezione d'imposta dell'arco = = cm² 11735,

$\mathfrak{d}_i$ = raggio del nocciolo, ossia distanza (dal baricentro della sezione) dell'antipolo relativo al lembo d'intradosso = = cm. 12,15,

cosicchè

$$\sigma_i = \frac{24751 \times 368}{11735 \times 12{,}15} = 64 \ {}^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}. \tag{9}$$

Vediamo ora il contributo offerto dalla trave. Portiamo sul poligono delle forze

$$ab = bc = \mu H_0 = (1 - \mu) H_0 = \frac{1}{2} H_0 = 0{,}497 \ H = \text{t. } 12{,}301$$

con che resta determinata la nuova reazione d'imposta sinistra Pa dell'arco, la cui linea d'azione passa pel punto d'intersezione della Pb colle ab e bc. Si può quindi costruire il nuovo poligono delle pressioni, disegnato nella fig. 2 a *tratto pieno.*

Il nuovo sforzo unitario σ_i risulta

$$(10) \qquad \sigma_i = \frac{37052 \times 44}{11735 \times 12{,}15} = 11 \ {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}.$$

Abbiamo costruito i due poligoni delle pressioni perchè più chiara apparisse l'influenza esercitata dalla trave; ma evidentemente in pratica si può limitarsi a costruire quello definitivo. Oppure, se fosse costruito quello tratteggiato, basterebbe sottrarre, per il semiarco destro, gli sforzi prodotti dalla μH_0, e per il semiarco sinistro quelli prodotti dalla $(1 - \mu)H_0$.

Così, per lo sforzo σ_i all' imposta destra si arriva al medesimo risultato della (10) se si sottrae da (9) lo sforzo σ_i' prodotto dalla $\mu H_0 =$ t. 12,301, il cui braccio di leva rispetto al punto di nocciolo m vale m. 6,15, e cioè

$$\sigma_i' = \frac{12301 \times 615}{11735 \times 12{,}15} = 53 \ {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}.$$

Si ha infatti

$$\sigma_i = 64 - 53 = 11 \qquad \text{»}$$

Torino, giugno 1917.

Sull'attrito volvente nei veicoli ordinari.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

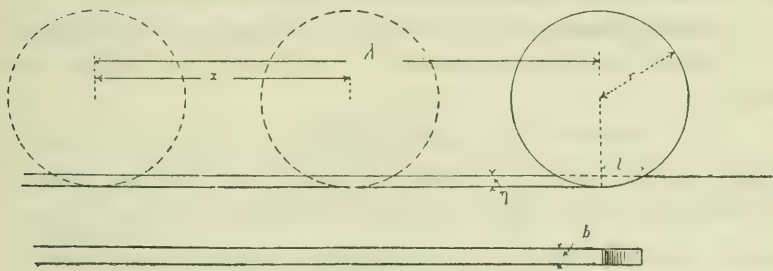
Al moto di una ruota sopra una strada si oppongono resistenze passive che si studiano di solito separando l'azione dell'attrito nel perno da quella dell'attrito volvente. Levi Civita ha mostrato come tale semplificazione sia lecita nei casi ordinari. Partendo dai risultati sperimentali, che oggi si posseggono, è facile calcolare le resistenze d'attrito nel perno con l'approssimazione richiesta dalla pratica. Meno ben conosciuto è l'attrito volvente, il quale risulta da un complesso di cause svariate. Fra le principali di esse sono: deformazioni permanenti della via, fenomeni di isteresi elastica e di elasticità susseguente, urti contro piccoli ostacoli e schiacciamento di rugosità della carreggiata, adesione e scorrimenti fra il cerchione e la via. L'azione contemporanea di tutte queste cause, alcune delle quali non assoggettabili ad un calcolo, neanche grossolano, spiegano le contraddizioni stridenti fra le conclusioni di vari sperimentatori che operarono in condizioni a primo aspetto identiche e toglie ogni speranza di un calcolo rigoroso e generale dell'attrito volvente. Tuttavia, considerando isolatamente ciascuna delle cause sopra accennate e prendendo in esame qualche caso particolarmente semplice, si può giungere a qualche risultato interessante per l'andamento qualitativo del fenomeno.

La resistenza al moto proviene, per cerchioni metallici, in massima parte dagli urti della ruota contro gli ostacoli della via (e questa parte si calcola facilmente, come è indicato nei Trattati di Meccanica applicata) e dalla imperfetta elasticità del cerchione e della massicciata stradale: di essa ci occuperemo brevemente in questa Nota.

---

[1] Cfr. Atti del R. Istituto Veneto, 1913-14, pag. 931.

***

La ruota e la strada per effetto del carico si deformano: se ambedue fossero perfettamente elastiche e se i cedimenti sparissero istantaneamente con il cessare delle pressioni che li provocarono, noi non avremmo resistenza al moto in causa delle deformazioni. Invece ruota e strada non riprendono la forma primitiva con tutta precisione ed impiegano un certo tempo nel loro ritorno allo stato non deformato, così che una certa frazione $^1/_n$ del lavoro L di deformazione del cerchione e della ruota deve essere compiuto a spese del lavoro eseguito dallo

sforzo di trazione T. Per il moto uniforme e sull'orizzontale, indicando con W la resistenza al moto, con λ lo spazio percorso e con L il lavoro di deformazione contemporaneamente eseguito, avremo

$$T = W$$

e

$$T\lambda = W\lambda = \frac{1}{n} L. \tag{1}$$

Indichiamo con p la pressione specifica sul terreno; con η il cedimento di esso, con dF l'elemento di superficie, avremo, per una ruota rigida o perfettamente elastica,

$$L = \int_F \int_0^\eta p\, dF\, d\eta\,,$$

dove la integrazione va estesa a tutta la superficie deformata durante il percorso λ. Ora con le notazioni della figura è

$$dF = dx\,db\,,$$

e poichè p ed η sono indipendenti dall'ascissa x del centro della ruota

$$L = \lambda \int_0^b \int_0^\eta p\,db\,d\eta$$

e per la (1)

(3) $$W = \frac{1}{n} \int_0^b \int_0^\eta p\,db\,dy\,.$$

Per determinare la resistenza d'attrito radente dovuta ad imperfetta elasticità, dovremo quindi conoscere:

la legge che lega fra loro cedimenti e pressioni,

la distribuzione delle pressioni p sulla larghezza dell'ormaia,

il valore delle pressioni o dei cedimenti in funzione del carico P,

e la frazione $\frac{1}{n}$: questa frazione sarà tanto più prossima all'unità quanto più tardo è il ritorno del terreno e quanto più veloce è il moto della ruota. Per un terreno plastico $\frac{1}{n} = 1$ perchè tutto il lavoro di deformazione di esso contribuisce a formare la resistenza al moto.

Se la ruota è rigida e cilindrica, l'ormaia è rettangolare e la pressione p si distribuisce uniformemente sulla larghezza b. Abbiamo allora

(4) $$W = b \int_0^\eta p\,d\eta\,.$$

* * *

Nei testi di meccanica tecnica [1] si suppone spesso che la p sia uniformemente distribuita sulla zona di contatto fra ruota e ruota: sarà quindi

$$P = p\,.\,b\,.\,l\,.$$

---

[1] Cfr. ad esempio H. Lorenz, *Lehrbuch der Technischen Physik. I. Technische Mechanik starrer Systeme*, pag. 389.

Si ritiene ancora che l dipenda soltanto dalla natura del terreno: con ciò, per la (4),

$$W = \frac{P}{l} \eta$$

e per essere con grande approssimazione

$$\eta = \frac{l^2}{2r}$$

sarà anche

$$W = \frac{l}{2} \frac{P}{r},$$

e poichè per ipotesi $\frac{l}{2}$ dipende unicamente dalla natura del suolo, rappresentando tale quantità con un coefficiente di attrito volvente ζ

$$W = \zeta \frac{P}{r}. \tag{5}$$

Nelle ipotesi precedenti avremo quindi che la resistenza alla trazione:

è direttamente proporzionale al carico,
inversamente proporzionale al raggio delle ruote,
indipendente dalla larghezza del cerchione.

Si ottengono cioè le leggi di Morin (almeno in parte): l'analisi precedente mostra come le supposizioni da cui queste leggi derivano siano nel nostro caso irrazionali e non rispondenti al vero.

***

Per ovviare alla irrazionalità della teoria precedente Alfred Lechner (¹) proponeva di recente una nuova teoria dell'attrito volvente, fondandosi sulla ipotesi che pressioni e cedimenti fossero quelli che si ottengono applicando la teoria di Hertz.

(¹) A. Lechner, *Theorie d. Rollreibung*, " Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften in Wien ", 1914, vol. 122, II, pag. 2069.

Un lungo calcolo conduce ad una espressione che con i nostri simboli può scriversi

$$W = \zeta \frac{P^{3/2}}{r^{1/2} b^{1/2}},$$

cioè, secondo Lechner, la resistenza alla trazione sarebbe:

proporzionale alla potenza $^3/_2$ del carico,

inversamente proporzionale alla radice quadrata della larghezza del cerchione,

inversamente proporzionale alla radice del raggio della ruota.

Quest'ultimo risultato concorda con le esperienze di Dupuit: gli altri due non corrispondono alla realtà: essi esagerano molto l'influenza del carico e della larghezza del cerchione.

***

Più vicini al vero si giunge ricorrendo alla semplicissima ipotesi fatta da v. Gerstner, nota sotto il nome di legge di Winkler nella tecnica ferroviaria, espressa dalla relazione

$$p = C\eta$$

dove C rappresenta un opportuno coefficiente. Con tale ipotesi la (4) diviene

$$W = \frac{1}{2} Cb\eta^2. \tag{6}$$

Ora indicando con η_m il cedimento medio sotto la ruota e ritenendo, data la sua piccolezza, che l'arco di contatto fra ruota e suolo sia parabolico, sarà

$$\eta_m = \frac{2}{3} \eta$$

e

$$P = C\eta_m lb = \frac{2}{3} C\eta lb.$$

Dalla figura si ha poi

$$l^2 = \sim 2r\eta$$

ed eliminando l fra le due precedenti

$$\eta = 2\left(\frac{P}{3\,C b r^{1/2}}\right)^{2/3}$$

per cui

$$W = \frac{2}{3^{4/3}}\,\frac{P^{4/3}}{C^{1/3}\,b^{1/3}\,r^{2/3}}$$

e posto

$$\zeta = \frac{2}{3^{4/3}\,C^{1/3}}$$

(7) $$W = \zeta\,\frac{P^{4/3}}{b^{1/3}\,3^{2/3}}\,.$$

La (7) è la formola di v. Gerstner, che i Francesi usano chiamare forma di Coriolis ed è quella che meglio rappresenta i risultati sperimentali. Che la resistenza cresca un po' più rapidamente del carico era già noto a Navier fin dai primi anni del secolo scorso: v. Gerstner controllò la (7) per quanto si riferisce alla larghezza del cerchione: e le esperienze recenti, indicando per l'influenza del raggio un valore intermedio tra quelli di Dupuit $\left(-\frac{1}{2}\right)$ e di Morin (-1), concordano abbastanza bene con quanto si ricava dalla espressione precedente, nella quale l'esponente a cui va elevato il raggio è $-\frac{2}{3}$ [1].

---

[1] Cfr. le larghe ed interessanti esperienze contenute nel Bollettino n° 39 della “Missouri Agricultural Station„ del luglio 1897.

Un trasformatore dinamico per correnti alternate.

Nota III di A. G. ROSSI.

1. — Della macchina che ho chiamato trasformatore dinamico ([1]), venne realizzato un modello di piccola potenza, composto di nove dischi di rame (diam. 110 mm., spessore 1,5 mm.), calettati (equidistanti di 12 mm.) sopra un albero comune, per costituire il rotore; e di uno statore, comprendente cinque coppie di elementi avvolti a bobine, disposti nelle intercapedini fra detti dischi. Di fronte alle due faccie di ciascun disco, vengono quindi a presentarsi a piccola distanza le estremità polari di due elementi statori, l'uno primario, l'altro secondario, fra loro angolarmente spostati di un quarto di passo, come suppone la teoria svolta e come indica la fig. 1 della I Nota citata. I cinque elementi di ordine dispari e i cinque di ordine pari, fra loro aggruppati in serie o in parallelo, costituiscono i due avvolgimenti, indifferentemente il primario e il secondario del trasformatore. Ciascun elemento di statore comprende 8 bobine in serie, a polarità alterne, nucleate di ferro laminato e fessurato (lunghezza radiale dei nuclei 31 mm., spessore 3 mm.), cosicchè ciascun avvolgimento consta di 40 bobine (a 960 spire) ed ha 20 coppie di poli; con i collegamenti in serie, ha una resistenza di circa 2000 ohm e un coefficiente di autoinduzione dell'ordine di 1 henry.

Sebbene tali dati caratteristici e la struttura stessa del modello, caratterizzata da una notevole dispersione di flussi, non rappresentino condizioni ottime in quanto all'efficacia dell'apparecchio considerato in generale come trasformatore, —

([1]) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. 51, 1915-16. Adunanze del 20 febbraio e del 19 marzo 1916.

avendo la costruzione di esso, eseguita per uno scopo speciale, preceduto lo svolgimento della discussione teorica, — pure le esperienze preliminari finora eseguite, e di cui questa Nota contiene il riassunto, confermano in modo abbastanza soddisfacente le principali previsioni teoriche, che fu possibile sottoporre a riprova malgrado la debole potenza della macchina. D'altra parte il tipo di questa, sul quale abbiamo fissato le nostre considerazioni, possiede tutti gli inconvenienti elettromeccanici delle " macchine a disco „ che contribuirono a farle cadere in disuso. Non occorre spender parole per dimostrare che la stessa teoria si applicherà senz'altro ad una " macchina a cilindro „ con *rotore massiccio*, e con statori multipolari a poli sporgenti secondo il tipo corrente degli alternatori per alte frequenze. Avvertasi però, che le proprietà di una macchina consimile sono ben differenti da quelle di un ordinario motore bifase con rotore chiuso (a gabbia) *fatto funzionare nelle stesse condizioni*, — come contrariamente potrebbe far ritenere la rassomiglianza, più esteriore che intima, fra i due apparecchi. Ciò è dimostrato da risultati di speciali esperienze, che vengono riferiti più innanzi.

2. — Giova qui richiamare gli elementi fondamentali della teoria del trasformatore dinamico, che essenzialmente richiedevano il controllo della esperienza.

Le sue equazioni sono di forma identica a quelle di un ordinario trasformatore statico, ove però il *fattore d'induzione* è una funzione lineare *complessa* della velocità del rotore:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{I}_1 \mathcal{Z}'_1 - j \mathcal{K} \mathcal{I}_2$$
$$0 = \mathcal{I}_2 \mathcal{Z}'_2 - j \mathcal{K} \mathcal{I}_1 .$$

$\mathcal{Z}'_1$ e $\mathcal{Z}'_2$ sono le impedenze *apparenti* del primario e del secondario, modificate cioè dalla reazione induttiva statica del disco rotore; $\mathcal{K}$ tiene il posto del fattore d'induzione $(2\pi n M)$ ed ha l'espressione complessa:

$$\mathcal{K} = K(g' + jb') = \mu(g + jb) \, . \, \kappa u (1 - \mu b + j \mu g),$$

ove g, b sono la conduttanza e la suscettanza originarie dei circuiti indotti di rotore, μ è il fattore d'induzione fra questi e gli avvolgimenti di statore, u la velocità lineare e κ un coef-

ficiente di proporzionalità, privo di dimensioni, dipendente dai caratteri costruttivi. L'apparecchio si comporta dunque come uno speciale trasformatore, privo di mutua induzione statica, nel quale il movimento del rotore faccia nascere un fattore di induzione complesso, rappresentato dal prodotto di $\kappa\mu u = K$ per l'*ammettenza apparente* $g' + jb' = \mathcal{Y}'$ del rotore, le cui componenti sono

$$g' = g(1 - \mu b) - b \cdot \mu g, \qquad b' = b(1 - \mu b) + g \cdot \mu g.$$

Il modulo di questo *fattore d'induzione dinamico* è quindi:

$$Ky' = \mu y \cdot \kappa u \sqrt{(1 - \mu b)^2 + \mu^2 g^2}.$$

Ciò posto, l'impedenza primaria è una funzione della velocità del rotore. Le sue componenti, *resistenza* e *reattanza apparenti* (modificate, cioè, dall'azione dinamica), son date da

$$r_{1\kappa} = r_1' - K^2 [g_2' (b'^2 - g'^2) + b_2' 2b'g'],$$
$$\lambda_{1\kappa} = \lambda_1' + K^2 [b_2' (b'^2 - g'^2) - g_2' 2b'g'],$$

espressioni di struttura analoga a quelle corrispondenti per un trasformatore statico, funzioni paraboliche di K, o della velocità u, come per quello lo sono di μ_{12}.

L'impedenza

$$z_{1\kappa} = \sqrt{r_{1\kappa}^2 + \lambda_{1\kappa}^2} =$$
$$= \sqrt{z_1'^2 + K^4 y'^4 y_2'^2 - 2K^2 y'^4 y_2'^2 [R_{12}^2 (\lambda'^2 - r'^2) + \Lambda_{12}^2 2\lambda' r']},$$

ove $R_{12}^2 = r_1' r_2' - \lambda_1' \lambda_2'$, $\Lambda_{12}^2 = r_1' \lambda_2' + r_2' \lambda_1'$, col crescere della velocità da zero in un verso qualunque, parte dal valore z_1' con gradiente iniziale nullo, diminuisce fino ad un minimo, per una certa velocità (u'), poi torna a crescere indefinitamente, ripassando per il valore iniziale z_1' con la velocità $(u'\sqrt{2})$. Corrispondentemente, la *corrente primaria*

$$I_1 = \frac{V_1}{z_1'} \sqrt{\frac{R_{12}^4 + \Lambda_{12}^4}{[R_{12}^2 - K^2 (b'^2 - g'^2)]^2 + [\Lambda_{12}^2 - K^2 2b'g']^2}},$$

partendo dal valore $I_{10} = V_1 / z_1'$, sale ad un massimo e poi diminuisce indefinitamente (fig. 1).

La *corrente secondaria*, $I_2 = K y' y'_2 . I_1$, similmente, parte da zero col gradiente iniziale: $\kappa u I_{10} y' y'_2 = y'_2 \operatorname{tg} \epsilon$, sale verso un massimo, posteriore al massimo della corrente primaria, per poi diminuire lentamente al di sopra di I_1.

Le due curve della fig. 1 sono quelle stesse che si potrebbero costruire per un trasformatore statico in funzione del fattore d'induzione μ_{12}, a tensione costante e circuito secondario invariabile, quando *si supponesse* di far crescere indefinitamente da zero il fattore d'induzione medesimo.

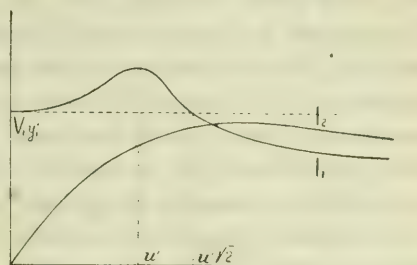



Fig. 1.

Un elemento importante è la *forza elettromotrice indotta dinamica*, o tensione secondaria a vuoto, $\mathcal{E}_2 = j K \mathcal{Y}' \mathcal{Y}'_1 \mathcal{V}_1$, la cui grandezza *è funzione lineare della velocità del rotore*:

$$E_2 = V_1 K y' y'_1, \qquad \text{col gradiente} \qquad \operatorname{tg} \epsilon = \kappa \mu y' . V_1 y'_1 .$$

Il *potere amplificatore* della macchina è implicitamente espresso dal *rapporto di trasformazione delle tensioni a vuoto*:

$$P = \frac{E_2}{V_1} = K y' y'_1 = \frac{\kappa u \mu}{z^2} \sqrt{\frac{\mu^2 r^2 + (z^2 - \mu\lambda)^2}{(r_1 \lambda + r \lambda_1)^2 + (\lambda_1 \lambda - r_1 r - \mu^2)^2}},$$

poichè da questo rapporto dipenderà, per ogni data u, la grandezza della corrente secondaria in un determinato circuito esterno. Quanto più grande sia (per costruzione) il fattore di u in questa formola e tanto maggiore sarà il gradiente della retta, $\operatorname{tg} \epsilon$; e tanto minore sarà la velocità ($u_0 = z' z'_1 / \kappa\mu$) per la quale $E_2 = V_1$. Per questa stessa velocità, *la corrente secondaria di corto circuito* uguaglia la corrente primaria, poi la sorpassa.

3. — La verifica più interessante per la teoria del trasformatore dinamico, doveva dunque vertire sulla legge di proporzionalità della forza elettromotrice secondaria con la velocità del rotore, a tensione primaria costante.

Data la limitata potenza della macchina, come strumento reometrico in una prima serie di esperienze venne adoperato un galvanometro termoelettrico Duddell, con il riscaldatore (di 804 ohm) posto in serie con una notevole resistenza ohmica. Per rendersi indipendenti dalla legge delle deviazioni dello strumento e dalla incostanza del suo *zero*, le deviazioni stesse, corrispondenti alle tensioni E_2 della macchina, venivano riprodotte, con la possibile identità, mediante tensioni prese sopra un circuito potenziometrico a corrente continua: la manovra di un commutatore permetteva di raffrontare rapidamente le deviazioni ottenute con le due sorgenti, per uguagliarle nel minimo tempo, regolando il potenziometro.

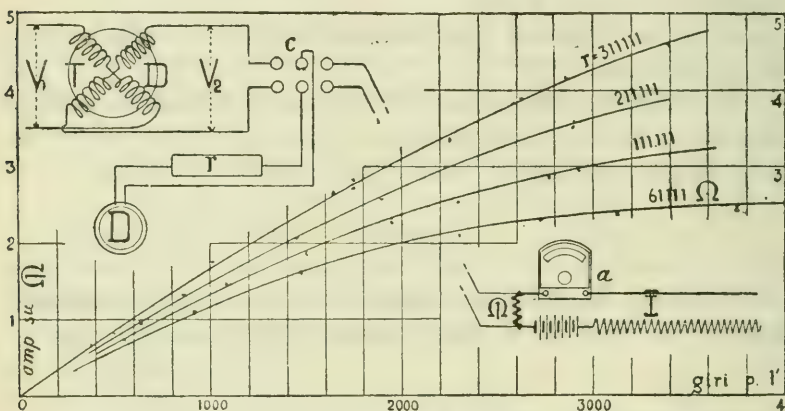



Fig. 2.

Secondo lo schema indicato nella fig. 2, applicata la tensione V_1 di 27 volt a 50 periodi, costante per tutte le esperienze, al primario del trasformatore dinamico T. D., il secondario, mediante il commutatore c inclinato a sinistra, poteva chiudersi sul circuito *voltometrico* del reometro Duddell D; la deviazione osservata, per una data velocità costante, veniva tosto riprodotta, volgendo c a destra, con la tensione presa sopra 1Ω campione percorso dalla corrente potenziometrica, fornita da accumulatori e misurata con un milliamperometro a, opportunamente derivato. Variando resistenze in quest'ultimo circuito, era possibile uguagliare prestamente le due deviazioni, lette sopra una scala millimetrica a 1300 mm. dal Duddell. La lettura dell'am-

perometro a dava allora senz'altro i volt efficaci che misuravano E_2, o per meglio dire, V_2. La velocità era letta sopra un tachimetro Schäfer-Budemberg a punzone di gomma, costantemente applicato all'albero della macchina.

Le curve tracciate sul diagramma in fig. 2 riassumono i risultati di una serie di esperienze così eseguite, aumentando di volta in volta la resistenza r nel circuito, intenzionalmente voltometrico, del Duddell. Per la curva più bassa la resistenza totale fu di 61915 Ω, per la più elevata, di 311915 Ω. Come si scorge, man mano che si fa diminuire la corrente secondaria, la curva che rappresenta il crescere della tensione secondaria V_2 con la velocità, va raddrizzandosi verso una certa retta limite, che non si raggiungerebbe se non a secondario realmente aperto. Il circuito reometrico del Duddell non era effettivamente in condizioni voltometriche altro che per rispetto al potenziometro.

La caduta di tensione nella macchina è veramente enorme; si può attribuire in parte alla grande resistenza interna e in parte a notevole reazione d'indotto, malgrado la grande dispersione dei flussi induttori.

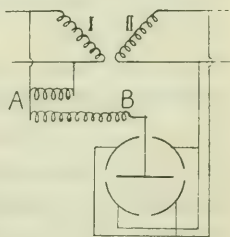
Sebbene dunque le curve di tensione così rilevate non manchino di apportare un contributo favorevole alla cercata conferma, la legge della forza elettromotrice non si può rigorosamente ricavare altrimenti che con una esperienza elettrometrica.

A questa si prestò un elettrometro Mascart, con una specie di metodo eterostatico appropriato al presente caso particolare.

Il metodo consiste nel caricare l'*ago* con una tensione proveniente dalla stessa sorgente alternata che alimenta il primario, ma ad un potenziale sopraelevato rispetto a quello medio dell'avvolgimento stesso, ciò che si ottiene mediante un autotrasformatore; e portando poi alle due coppie di quadranti la tensione sviluppata ai morsetti del secondario, che si vuol misurare.

Fig. 3.

Convenienti condizioni di sensibilità si ottennero nel seguente modo. Vennero applicati 50 volt costanti (a 50 periodi) al primario del T. D. (fig. 3), ricavandoli dalla tensione di linea di una distribuzione trifase a 220 volt col quarto filo a terra, mediante un divisore di tensione AB che manteneva l'*ago* dell'elet-

trometro alla tensione estrema più alta. L'istrumento, in buone condizioni di simmetria (e di isolamento, insieme alla macchina e alla linea) non dava deviazione, con i quadranti comunicanti al secondario, finchè il rotore era immobile. La deviazione elettrometrica si iniziava e cresceva regolarmente, con la velocità della macchina, — salvo perturbazioni saltuarie dovute probabilmente a manovre sulla linea influenzanti l'isolamento, che richiesero di eliminare molte letture o sospendere talvolta le esperienze.

Velocità in giri p. 1′ N	Deviazione elettrometrica α	$\frac{\alpha}{N}$	Velocità in giri p. 1′ N	Deviazione elettrometrica α	$\frac{\alpha}{N}$
360	11,0	0,0305	2980	89,5	0,0300
500	15,5	310	3940	121,0	307
1020	31,5	309	5000	152,0	304
1980	61,0	308	5940	179,0	302

Nella tabella sono riferite alcune delle deviazioni elettrometriche di fronte alle velocità della macchina. Tutti i 20 punti ottenuti, riportati d'altra parte graficamente, delineano una retta per l'origine, con iscarti assolutamente accettabili.

La verifica di questa legge fondamentale del trasformatore dinamico, eseguita col detto metodo elettrometrico (eterostatico), include insieme — con discreta probabilità — anche la conferma dell'altra legge teorica che la differenza di fase fra la tensione primaria e la secondaria sia indipendente dalla velocità.

4. — Vennero anche eseguite varie misure sulle correnti primaria e secondaria, primieramente su un apparecchio rudimentale a un solo disco rotore e quattro coppie di bobine a due a due incrociate, mediante un elettrodinamometro Bellati e con corrente primaria di frequenza telefonica; poi, sulla macchina attuale a nove dischi, con il galvanometro Duddell e corrente di bassa frequenza.

Nella fig. 4 v'ha uno schema della disposizione usata per rilevare contemporaneamente le due correnti; e v'è tracciata una delle coppie di curve determinate.

Nei circuiti dei due avvolgimenti I e II del T. D. erano inserite resistenze campione, per fornire le tensioni di misura al circuito potenziometrico, col commutatore c_1. Con un secondo commutatore c_2, si potevano alternativamente raffrontare sulla scala del Duddell D la deviazione prodotta dalla corrente al-

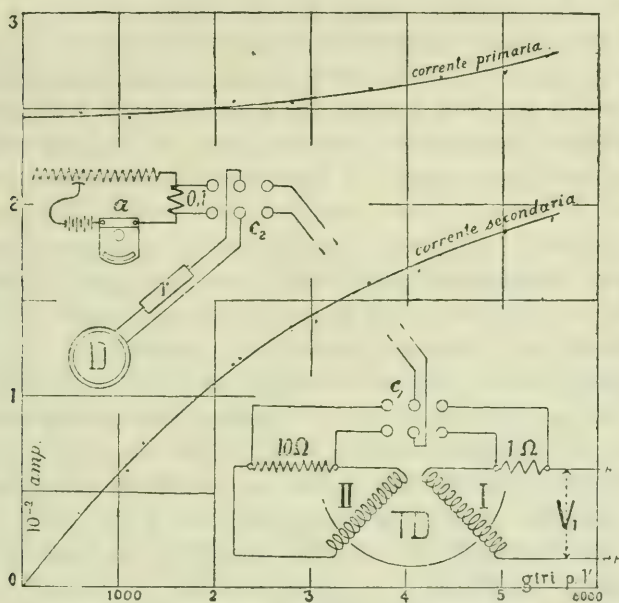



Fig. 4.

ternata proveniente dal T. D. e la deviazione dovuta alla tensione potenziometrica, derivata su un campione di 0,1 Ω percorso dalla corrente continua. Uguagliate le due deviazioni, in corrispondenza di ogni data velocità costante, la lettura dell'amperometro *a* dava il valore efficace della corrente alternata in esame. Ovviamente, il Duddell era in condizioni voltometriche.

Le due curve del diagramma in fig. 4 corrispondono ad una esperienza *con il secondario in corto circuito* (su 10 Ω), essendo al primario applicata la tensione costante di 49 volt a

50 periodi. Inserendo resistenze crescenti nel circuito secondario, si ottengono altre curve simili, di ordinate inferiori.

L'esperienza, protratta fin verso i 6000 giri per 1', non porta ancora nè la corrente secondaria nè la corrente primaria prossime ai loro massimi; ma l'andamento delle due curve è propriamente quello voluto dalla teoria.

Che tali massimi non sieno ora praticamente raggiungibili, ciò è d'importanza secondaria, dipendendo ciò da molteplici condizioni costruttive, le quali non furono nell'attuale modello della macchina indovinate *a priori* per gli effetti ottimi.

Queste esperienze qualitative non costituiscono che un primo gruppo di verifiche della teoria di primissima approssimazione, svolta nelle due Note precedenti; l'a. crede che sieno adeguate a dimostrare la giustezza delle ipotesi e dei ragionamenti fatti per costruire le equazioni del trasformatore dinamico. Deduzioni ulteriori o estreme, come quelle riguardanti il fattore di potenza primario (v. Nota I), non possono col modello attuale della macchina sottoporsi ad esperimento, per la piccola potenza della macchina stessa (La quale fu immaginata e quindi costruita in proporzione allo scopo di costituire un *ripetitore* o *relais telefonico*, prevedendosi che la corrente secondaria dovesse " per l'orecchio „ possedere *la stessa tempera* come la corrente primaria e quindi una sufficiente similitudine con questa, per modo da riprodurre chiaramente il discorso telefonico. Ciò che l'esperienza acustica ha pienamente confermato, anche quando il telefono sul secondario sia *in serie con parecchie migliaia di ohm.* Sulle proprietà del T. D. come apparecchio telefonico, l'A. si riserba però di riferire particolarmente in altro scritto).

5. — Vennero finalmente eseguite esperienze con un motore Brown (monofase), per ricercare quali analogie di funzionamento presentasse col T. D. una macchina composta di uno statore bifase ad avvolgimenti sconnessi e rotore a gabbia. La detta macchina, della potenza di 5 cavalli, porta due avvolgimenti tetrapolari, sfalsati di un quarto di passo, l'uno per il lavoro normale, l'altro per l'avviamento; il primo (A) ha una resistenza ohmica, a caldo, di 0,092 Ω, il secondo (B), di 0,043, e sono fatti per portare rispettivamente 120 volt e 80 volt a 42 periodi.

Le impedenze apparenti di entrambi gli avvolgimenti, con rotore fermo, a 42 periodi, sono fra loro poco diverse, variando da circa 2,85 Ω a 1,0 Ω quando la corrente varia da 4 amp. a 30 amp. (secondo misure wattometriche).

Le esperienze consistettero nell'applicare ad uno dei due avvolgimenti una tensione alternata costante, e trascinare, con un motore a corrente continua, il rotore a velocità crescenti, determinando la corrente J_1 e la potenza W_1 assorbite dall'avvolgimento eccitato alla tensione V_1, la tensione V_2 a circuito aperto sull'altro avvolgimento (secondario), oppure la corrente J_2 in circuito chiuso. Nello schema inserito in fig. 5, J_1, V_1, J_2, V_2 sono istrumenti termici preventivamente confrontati e corretti, W_1 un wattometro Siemens-Halske ed A, B, i due avvolgimenti di statore del motore Brown. La tensione primaria, di circa 30 volt, veniva ricavata con un trasformatore da una linea a 115 volt.

Comandava la macchina Brown un motore a corrente continua in derivazione, di potenza alquanto eccedente, munito di reostati di regolazione pei due circuiti. La velocità veniva misurata all'albero del Brown con un tachimetro magneto-elettrico (una piccola dinamo a eccitazione indipendente, congiunta all'albero con punzone di gomma), la cui tensione si leggeva su di un millivoltometro S.-H. con grande resistenza addizionale; veniva campionato l'apparecchio, prima e dopo, mediante due esperienze eseguite in confronto a un contagiri a secondi.

Le curve dei due diagrammi in fig. 5 mostrano l'andamento generale delle grandezze rilevate, superiormente a secondario aperto, inferiormente a secondario chiuso in corto circuito.

La coppia dinamica fra le due macchine era assai variabile dal principio alla fine dell'esperienza, come ben si comprende osservando le curve dei diagrammi.

Risulta essenzialmente che, col crescere della velocità,

1° la corrente primaria J_1, esista o non la secondaria, diminuisce dapprima lentamente, poi rapidamente verso un minimo acuto, per poi subito risalire;

2° la tensione secondaria a vuoto V_2 sale dapprima lentamente, poi dopo un gradiente quasi ∞ per un breve tratto presso alla velocità N, raggiunge un massimo e decresce.

3° la potenza assorbita W_1, dopo esser salita alquanto,

rapidamente precipita verso zero alla velocità N e diventa poi negativa, raggiungendo in tal territorio un massimo.

4° la corrente secondaria di corto circuito (su amperometro) non è grande in tali condizioni: raggiunge un piccolo

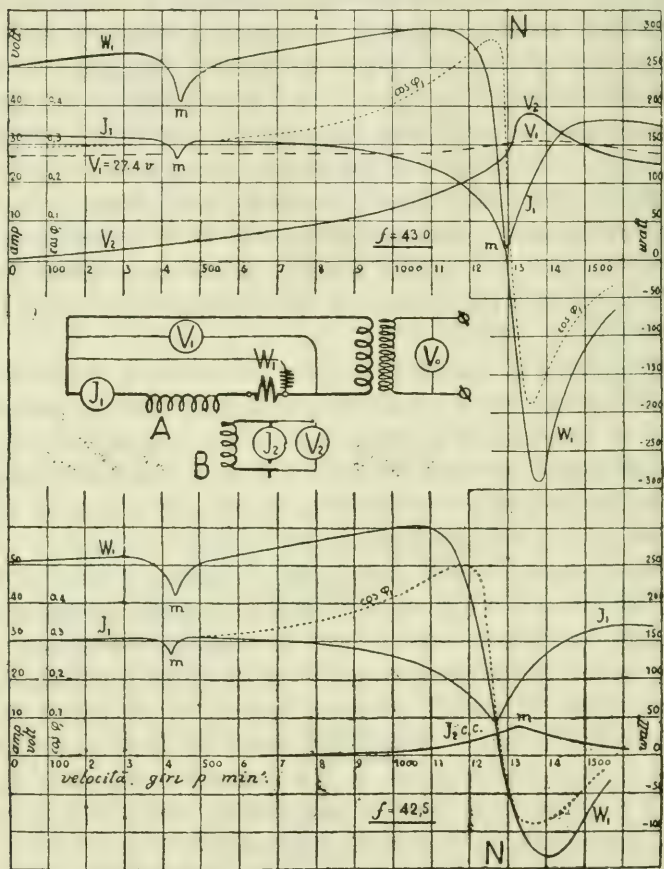



Fig. 5.

massimo acuto, inferiore al minimo della corrente primaria e per una velocità un po' maggiore della N.

La velocità N è quella del sincronismo. La tensione primaria tende realmente anche a salire un po' nelle stesse circostanze: partita da 27,4 volt, raggiunge 31 volt poco dopo N.

Le esperienze medesime vennero ripetute scambiando le spirali A e B, senza che variassero sensibilmente i risultati.

I minimi o massimi m delle curve J_1, J_2, sono generalmente acuti come cuspidi: gli indici degli strumenti li marcano oscillando fortemente, sicchè è piuttosto difficile fissare esattamente la velocità per coglierli. — Disinteressandoci per ora dell'interpretazione di questi diagrammi, ci limitiamo quindi a concludere che nessuna stretta analogia offre un motore bifase a gabbia, fatto funzionare come trasformatore dinamico, con ciò che rappresentano le equazioni di quest'ultimo. In particolare, esse, come l'esperienza conferma, nessuna singolarità assegnano alla velocità di sincronismo.

Su alcuni notevoli cristalli di fluorite del granito di Baveno [1].

Nota di FAUSTA BALZAC.

(Con una Tavola).

Sebbene i minerali del granito di Baveno siano stati per molti mineralisti oggetto di attive ricerche e di accurati studi, le notizie che finora si hanno sulla fluorite di questo giacimento sono assai scarse.

Infatti, se si considerano gli studi pubblicati sul granito di Baveno e di Montorfano, in pochi si trova accennata la fluorite, in pochissimi notizie cristallografiche al riguardo.

Streng (²) nel 1887 fa noto come in alcuni cristalli di fluorite abbia osservato le sole forme }100{ e }111{.

Molinari (³), più tardi, trovò colle due precedenti anche la }110{. Nel 1896, Leuze (⁴) in uno studio cristallografico sui minerali di Motterone, scrisse che in cristalli di fluorite debolmente colorati in roseo o violetto, potè osservare combinazioni del cubo con l'ottaedro ed il rombododecaedro.

Ultimamente, Tacconi (⁵) trattando dei minerali di Montorfano, osserva che, accompagnati a tormalina e gadolinite, trovò alcuni cristalli di fluorite i quali si presentano come cubi

---

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal Prof. F. Zambonini.

(²) Streng, *Ueber die in den Graniten von Baveno vorkommenden Mineralien.* " Neues Jahrbuch für Mineralogie ", 1887, I, 100.

(³) Molinari, *Nuove osservazioni sui minerali del granito di Baveno.* " Atti Soc. it. Sc. Natur. ", 1885, 28, 58.

(⁴) Leuze, *Mineralogische Notizen.* " Zeitsch. für Kryst. ", XXV, 620.

(⁵) Tacconi, *Sopra alcuni minerali del granito di Montorfano.* " Atti R. Acc. Lincei ", 1903, 355.

incolori o debolmente colorati in verde bluastro od in giallognolo.

Complessivamente, dunque, se studi più recenti, a me sconosciuti, non hanno fatto rilevare la presenza di altre forme nella fluorite di Baveno, i cristalli provenienti da questo giacimento non presenterebbero che combinazioni delle forme {100}, {110} e {111}.

Poichè nel Museo di Mineralogia della R. Università di Torino si conservavano alcuni bei cristalli ricchi di faccie, al Prof. Zambonini parve utile studiarli, ed affidò a me tal còmpito. Di buon grado accettandolo, ho potuto, infatti, osservare in essi alcune forme nuove per la fluorite ed altre nuove pel giacimento. Credo non inutile, perciò, riassumere nella presente Nota i risultati del mio studio.

Al Prof. Zambonini che, oltre all'offrirmi il materiale in istudio, le osservazioni al riguardo, come di consueto, mi agevolò tanto con preziosi insegnamenti, quanto colla cortese ospitalità nel suo laboratorio, mi è grato rinnovare i miei ringraziamenti.

Cinque sono i cristalli che ho avuto in esame. Nella tavola che segue riunii i disegni, ridotti a modello, dei quattro presentanti le combinazioni più interessanti. I cinque cristalli sono tutti abbastanza grandi, si presentano colorati in violetto o roseo più o meno intenso, e quattro di essi, alle forme già note {100}, {111}, {110}, mostrano associati vasi tetracisesaedri e triacisottaedri.

Cristallo N. 1 (Fig. 2). — È dei cinque il più piccolo, non misurando che 5 mm. nella sua maggiore dimensione. Si trova impiantato su un cristallo di ortosio; è trasparentissimo, e così debolmente colorato in violetto, da apparire quasi incoloro. Predomina in esso l'ottaedro, meno sviluppati sono il cubo ed il rombododecaedro. Tutte e tre le forme sono, però, rappresentate da faccie splendenti, le quali permettono misure assai precise.

Tra la }100{ e la }110{ esiste un esilissimo tetracisesaedro. Da una faccetta di esso, assai splendente, ebbi le due misure che seguono, dalle quali ho potuto stabilire come a tal forma spetti il simbolo D }810{.

Infatti:

(810) : (100) = 7° 22′ mis. 7° 7′ $^1/_2$ calc.
(810) : (111) = 49° 44′ „ 49° 52 „

Questa forma, nuova pel giacimento, è pure rarissima per la fluorite in genere. Fu scoperta recentemente da Ungemach [1], che la trovò in un cristallo di Plancher Les Mines, associata alle forme }100{, }421{, }310{.

Cristallo N. 2 (Fig. 3). — Come il primo, è associato a cristalli di ortosio e quarzo che sono comunissimi nel giacimento. Misura mm. 6 di spigolo; è colorato assai leggermente in azzurro violaceo ed è quasi trasparente.

Presenta, come fondamentale, la forma }100{, le cui faccie sono, però, assai ridotte per l'esistenza di due tetracisesaedri; discretamente esteso è il rombododecaedro, meno l'ottaedro.

Nitide si presentano le immagini date dalle faccie di }110{ e assai belle, pure, quelle della }111{. Multiple e pallide invece quelle delle faccie dell'esaedro e degli }hko{.

Complessivamente, dalle misure migliori, ho potuto dedurre le forme seguenti:

h }100{ d }110{ o }111{ ε }730{ J }10.1.0{

delle quali }730{ e }10.1.0{ sono nuove per il giacimento, ed entrambe, la seconda specialmente, assai rare nella fluorite in genere.

La }730{ fu trovata da Ungemach in un cristallo proveniente da Robach presso St.-Dié, e, nel 1903, da Weber [2] in

---

(1) H. Ungemach, *Notes cristallographiques sur la fluorine vosgienne.* " Bull. Soc. franç. min. „, 1909, 32, 304.

(2) Weber, *Ueber Flusspath von Epprechtstein in Fichtelgebirge.* " Zeitsch. für Kryst. „, 37, 1903, pag. 433.

altro di Epprechtstein nei Fichtelgebirge, e la {10.1.0} osservata da Ungemach stesso in un cristallo solo proveniente da Badenweiler (Foresta Nera).

Da più misure dedussi le seguenti medie:

(730) :(100)=23°11′ - 23°15′ lim. mis.	23°13′ med.	23°12′ calc.
(10.1.0):(100)= 5°17′ - 6°15′ „	5°39′ „	5°43′ „

Cristallo N. 3 (Fig. 1). — Presenta *habitus* simile al precedente. È, però, più grande, misurando 10 mm. secondo i tre assi quaternari; ha meno estese le faccie di esaedro ed è più intensamente colorato in azzurro violaceo.

Le forme ottenute sono:

h {100} *d* {110} *o* {111} *f* {310} *ε* {730} *J* {940}

delle quali la {940} è nuova per la fluorite e {310}, {730} lo sono per il giacimento.

La {940} si presenta con facciette non molto splendenti, che dànno immagini pallide, ma assai nitide:

(940):(100) = 23°55′ - 24°16′ lim. mis. 24°6′ med. 23°58′ calc.

La {310} fu osservata da Ungemach in più cristalli provenienti dai giacimenti americani [1].

(310):(100) = 17°45′ - 18°48′ lim. mis. 18°28′ med. 18°26′ calc.

Quanto alle forme rimanenti non presentano nulla di notevole. La {730} dà come gli altri tetracisesaedri immagini pallide, ma poco sfumate; meno nitide sono invece quelle dell'esaedro, le cui faccie poco splendenti sono pure assai ridotte, per lo sviluppo predominante degli {*hko*}. Bellissime sono, invece, le immagini date dalle faccie del rombododecaedro, e dell'ottaedro ridottissimo.

---

[1] H. Ungemach, *Sur la fluorine de deux gisements américains inédits.* " Bull. Soc. franç. min. „, 1909, 32, 171.

Cristallo N. 4 (Fig. 4). — Dei cinque è questo il più grande e più interessante pel numero considerevole di forme che presenta. Misura 11 mm. secondo i tre assi cristallografici, è trasparentissimo e debolmente colorato in roseo. Presenta, come forma dominante l'ottaedro, come subordinate l'esaedro ed il rombododecaedro. Tra le faccie di questo e le prime sono compresi vari }*hhl*{ esilissimi, che dànno immagini pallide, ma nitide. Per questi triacisottaedri ho calcolato i simboli:

q }331{ γ }772{ γ_1 }11.11.3{ ϱ }441{ ϱ_1 }992{
η }551{ Θ }661{ Ω }771{ χ }881{

fra i quali }331{ e }441{ soltanto corrisponderebbero a forme note.

Che tali simboli spettino realmente alle forme da me osservate, lo dimostrano le differenze, relativamente piccole, esistenti tra i corrispondenti valori calcolati e quelli da me misurati:

	lim. mis.			
(331) : (111)	= 22° 41′ - 22° 45′	N. 2	22° 43′ med.	22° 0′ calc.
(772) : (111)	= 23° 34′ - 23° 55′	" 4	23° 48′ "	23° 50′ 1/2 "
(11.11.3) : (111)	= 23° 58′ - 24° 45′	" 5	24° 17′ "	24° 21′ "
(441) : (111)	= 24° 59′ - 25° 39′	" 11	25° 20′ "	25° 14′ "
(992) : (111)	= 26° 5′ - 26° 50′	" 12	26° 26′ "	26° 20′ "
(551) : (111)	= 26° 59′ - 27° 37′	" 6	27° 19′ "	27° 13′ "
(661) : (111)	= 27° 58′ - 28° 32′	" 6	28° 14′ "	28° 32′ 1/2 "
(771) : (111)	= 29° 2′ - 29° 34′	" 3	29° 22′ "	29° 30′ "
(881) : (111)	= 29° 59′ - 30° 23′	" 2	30° 11′ "	30° 13′ "

Questi angoli distano poco l'uno dall'altro, sicchè sembra aversi a che fare con una serie continua di forme passanti l'una nell'altra. Effettivamente, se tutti i triacisottaedri indicati si trovassero tra una faccia di }111{ e la contigua di }110{, non sarebbe possibile distinguerli. La loro indipendenza risulta, però, grazie al fatto che su ognuno degli spigoli di combinazione fra }111{ e }110{ se ne trovano soltanto alcuni ben distinti, e non si ripetono su tutti gli spigoli. Dalla tabella degli angoli risulta anche, appunto, quante volte ciascuno è stato osservato.

Cristallo N. 5. — A differenza dei precedenti, questo cristallo è poco importante cristallograficamente, però assai interessante si presenta dal punto di vista chimico.

Infatti è regolarissimo di forma, presentando egualmente sviluppate e dominanti le faccie di rombododecaedro e ridottissime, invece, nè affatto splendenti quelle di ottaedro. Nella direzione degli assi quaternari misura 10 mm., è dunque, come i precedenti, di discreta grandezza. Come quelli è trasparente e privo totalmente di inclusioni; è, però, colorato più intensamente di tutti in azzurro violetto.

Questa colorazione, abbastanza intensa, non comune nella fluorite, mi fece pensare alla possibilità di un qualche contenuto in elementi del gruppo del cerio e dell'ittrio, osservati già in qualche fluorite, e la cui presenza non può sorprendere, data l'esistenza in natura di soluzioni solide di CaF_2, CeF_3 e YF_3, rappresentate dai minerali ittrofluorite e ittrocerite. Come è noto, la fluocerite è, spesso, di colore azzurro-cupo, il che confermava il dubbio che il cristallo in esame fosse un termine di passaggio fra la fluorite e la fluocerite. Non mi tenni, naturalmente, paga di questa osservazione, ma pensai di confermarla mediante la determinazione del peso specifico e dell'indice di rifrazione.

Come è noto, la fluorite è uno di quei pochi minerali nei quali il peso specifico e l'indice di rifrazione hanno un valore pressochè invariabile nei cristalli provenienti dai più vari giacimenti; tanto è vero che Merwin [1] ha proposto recentemente di prendere i valori osservati nella fluorite per l'una e l'altra proprietà fisica come fondamentali.

Nella fluorite tipica il peso specifico oscilla di poche unità della terza cifra decimale intorno a 3.180, mentre dalle ricerche di Vogt e di Zambonini risulta che i cristalli misti ricchi in CeF_3 e YF_3 hanno un peso specifico notevolmente più elevato. Ora, io, per il cristallo di Baveno, in questione, ho trovato a 20°, 3.195, un valore, cioè, nettamente più alto di quello caratteristico della fluorite tipica, e quasi identico a quello di 3.199 trovato da Kenngott in cristalli intensamente colorati in az-

---

[1] Merwin, " Journal Washingt. Acad. Sc. ", 1911, I, pagg. 3, 59.

zurro, che sono, probabilmente, anch'essi dei termini di passaggio all'ittrocerite.

Ugualmente, per l'indice di rifrazione: Merwin propone di usare come " Standard „ il valore di 1.43385, ma è evidente che cinque decimali sono troppe; Baille e Dudenhausen dànno, per la luce del sodio, nei cristalli puri il valore di 1.4338, mentre la presenza di fluoruro di ittrio e di cerio innalza l'indice di rifrazione. Così F. Zambonini [1] ha trovato $n_D = 1.4425$, per un cristallo di ittrofluorite contenente 10.59 di YF_3, e 0.95 CeF_3, e $n_D = 1.4483$ per un secondo, colorato più intensamente in giallognolo, e contenente 16.88 di $Y(Ce)F_3$. Nel mio cristallo, abbastanza limpido, potei eseguire un'esatta determinazione dell'indice di rifrazione, adoperando come prisma rifrangente quello formato da due faccie di rombododecaedro formanti un angolo di 59° 49′.

I valori ottenuti sono i seguenti:

C 1.4335 *D* 1.4352 *Tl* 1.4364.

I valori, dunque, sensibilmente più elevati, relativi al peso specifico ed all'indice di rifrazione, nel cristallo da me preso in esame, rendono assai probabile che esso rappresenti un termine di passaggio all'ittrocerite-ittrofluorite.

Non possedendo che un solo cristallo, non ho creduto opportuno il distruggerlo per eseguire un'analisi chimica quantitativa, e lascio, perciò, la cura di completare le mie ricerche sotto questo punto di vista a chi potrà disporre di maggior quantità di fluorite intensamente azzurra di Baveno.

---

[1] F. Zambonini, *Sulle soluzioni solide dei composti di calcio, stronzio, bario e piombo, con quelli delle " terre rare „ e loro importanza per la Mineralogia chimica.* " Rivista di Mineralogia e cristallografia italiana „.

L'Accademico Segretario
Carlo Fabrizio Parona

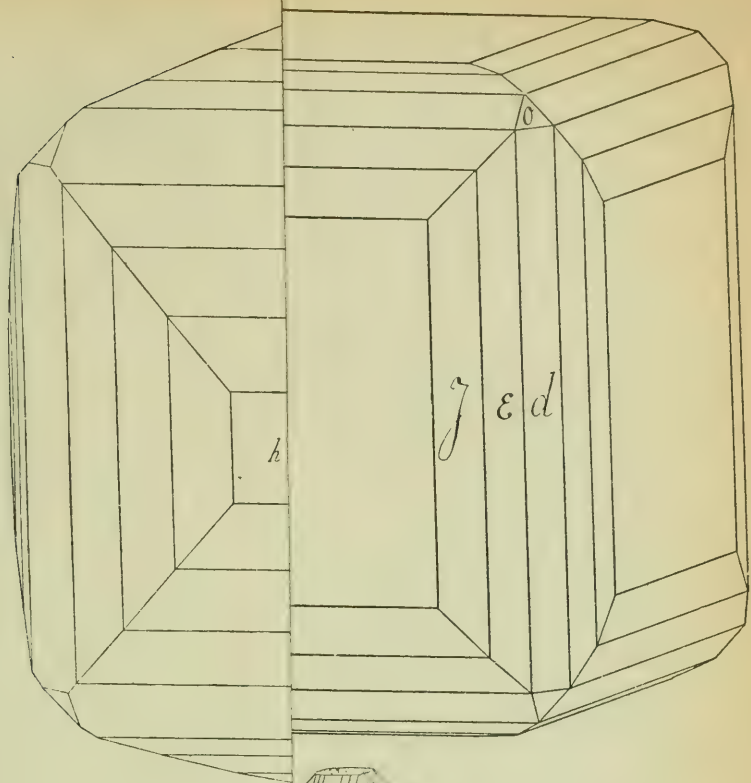
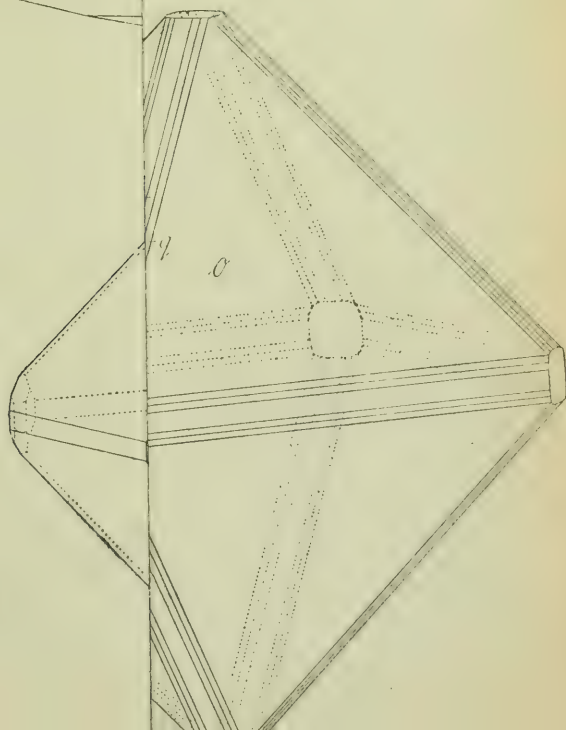



Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 1.

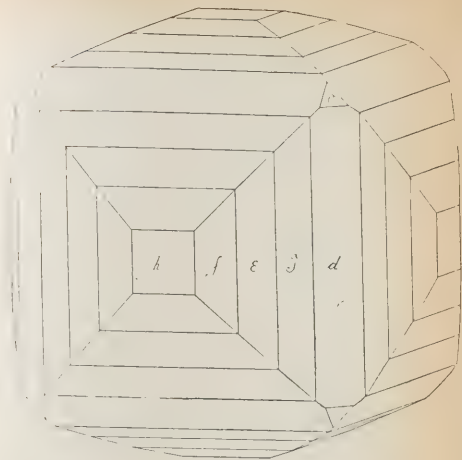



Fig. 3.

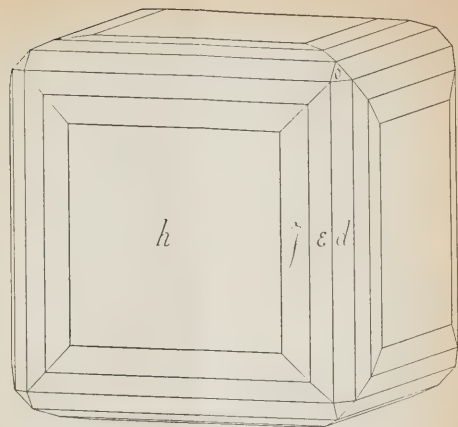



Fig. 2.

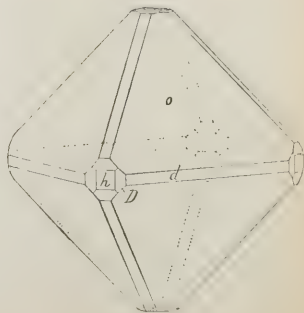
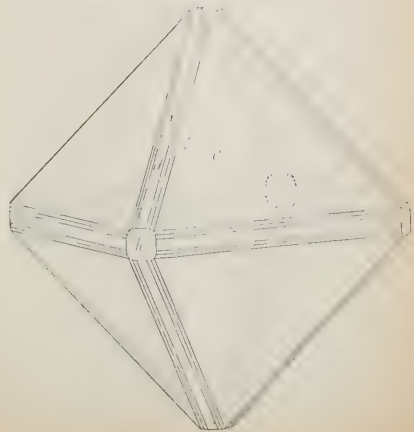



Fig. 4.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Giugno 1917.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Chironi, Vicepresidente dell'Accademia, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci S. E. Boselli, Direttore della Classe, Carle, e S. E. Ruffini.

Si legge e si approva l'atto verbale della precedente adunanza del 10 corr.

Il Presidente dà notizia alla Classe delle lettere che i professori Pietro Egidi e Silvio Pivano gli hanno diretto per ringraziare l'Accademia che loro conferì, diviso in parti uguali, il premio Gautieri per la storia.

Il Socio Segretario Stampini presenta, quale omaggio della Ditta Editrice, il 10° volume del *Corpus scriptorum latinorum Paravianum* intitolato *Cornelii Taciti Dialogus de oratoribus*, per cura di Federico Carlo Wick.

Il Socio Patetta presenta, perchè sia pubblicata negli *Atti*, una sua *Nota* dal titolo *Appunti sopra alcune iscrizioni medievali pisane*.

Il Socio Prato presenta, per lo stesso scopo, la seconda parte del suo studio intitolato *Postilla sul Costo della guerra*.

Il Socio Stampini legge una sua nuova epigrafe latina di linee 71, che porta per titolo *Post XL annos*. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Presidente chiude l'adunanza augurando ai Colleghi presenti e assenti ottime ferie. La Classe ringrazia ricambiando l'augurio.

LETTURE

Appunti sopra alcune iscrizioni medievali pisane.

Nota del Socio FEDERICO PATETTA.

1. — Sono trascorsi ormai quindici anni da quando, fra i temi da discutersi a Roma nel Congresso internazionale di Scienze storiche, fu annunciata la proposta di un *Corpus inscriptionum italicarum medii aevi.*

L'utilità e l'urgenza dell'impresa progettata non potevano porsi in dubbio; ma essa avrebbe richiesto il concorso di molte forze ben dirette e mezzi finanziari cospicui. Invece organizzazione e mezzi in gran parte mancarono, cosicchè non è meraviglia che si sia fatto poco cammino. Importa tuttavia non lasciar cadere l'idea, e attendere intanto, nei limiti del possibile, a quei lavori preparatorii, che non si possono differire senza danni e pericoli evidenti, provvedendo soprattutto alle iscrizioni tuttora esistenti, sia per impedirne la scomparsa, sia per farne eseguire trascrizioni, calchi, fotografie, sia per fissarne definitivamente la lettura, segnalando gli errori e le inesattezze delle varie edizioni.

Appunto come tenue contributo ai lavori per il *Corpus*, presento alcune note su iscrizioni pisane, stampate e ristampate, ma che possono tuttavia dar luogo a parecchie osservazioni.

M'occuperò per ora delle due iscrizioni concernenti la guerra balearica del 1113-1115, d'un epitaffio, che secondo l'opinione comune si connette ad un avvenimento della stessa guerra, e d'un' iscrizione, press'a poco contemporanea, assai meno nota, ma per più riguardi molto interessante.

2. — Le iscrizioni per la guerra balearica e la citata iscrizione sepolcrale (alla quale si dovrebbe ora aggiungere, o sostituire, l'epitaffio pubblicato ed illustrato da me, nel 1911,

negli " Atti „ della nostra Accademia (1)) furono ristampate nel 1904 dal Calisse (2) e nel 1907 da Pio Pecchiai (3).

La prima di queste iscrizioni fu posta a Marsiglia, nella chiesa di S. Vittore, dove i Pisani deposero i loro morti, trasportati fin là dalle Baleari, rinunciando, per non turbare con cerimonie funebri la gioia del ritorno, al primitivo proposito di seppellirli in patria (4).

Il Calisse cita quattro edizioni precedenti, ma ne dimentica parecchie altre (5), fra cui quelle che credo le prime e le sole veramente importanti: le stampe cioè dei *Commentariorum urbanorum octo et triginta libri* di Raffaello Maffei da Volterra. Il *Volaterranus* pubblicò infatti l'iscrizione nel quinto libro della sua celebre opera, dicendola tuttora esistente. Da lui dipendono, se non erro, direttamente o indirettamente, tutti gli altri editori, nessuno dei quali si curò di ricercare se l'epigrafe sia in seguito perita o se si possa ancora rintracciare.

Il libro del *Volaterranus* fu pubblicato nel 1506 e ristampato più volte; ma io non ho disgraziatamente a mia disposizione se non l'edizione di Basilea, 1559. In essa, a pag. 93, è

---

(1) *Il preteso epitaffio di Ugo Visconti*, Torino, 1911, estr. dagli *Atti* dell'Accademia, vol. XLVI.

(2) In appendice all'edizione del *Liber Maiolichinus* (in *Fonti per la storia d'Italia* ed. dall'Istituto stor. ital.), Roma, 1904, pagg. 143-144.

(3) *Gloriosa Pisa. Note storiche*, Roma, 1907, pagg. 49-51.

(4) Il testo dell'iscrizione lascerebbe credere che i Pisani abbiano trasportato a Marsiglia tutti i loro morti, il cui numero doveva essere tutt'altro che piccolo. Si può tuttavia sospettare, che in realtà siano stati portati i soli cadaveri dei capi e degli appartenenti alla nobiltà; tanto più tenendo conto del fatto che il *Liber Maiolichinus*, dopo aver accennato alla grande mortalità dovuta anche alla mancanza del vino e al cambiamento dei cibi, distingue fra i *tumuli*, che coprivano la campagna, e le *capsae* dei nobili deposte sul litorale e pronte evidentemente per il trasporto (vv. 2320-2322):

> Iamque viam tumuli pariter cum rure tegebant,
> Nobiliumque simul positas in litore capsas
> In reliquisque locis aliquis spectare valebat.

Analogamente, dopo la spedizione del 1087 contro Mehdia, era stato portato a Pisa il corpo imbalsamato di Ugo Visconti.

(5) Ho presenti l'edizione di Flaminio Dal Borgo, *Dissert. epistolare sull'origine dell'Università di Pisa*, Pisa, 1765, pag. 28, nota; e quella del Cappelletti, *Le chiese d'Italia*, vol. XVI, Venezia, 1861, pag. 87.

dato il seguente testo, del quale correggo solo la punteggiatura, sostituendo inoltre qualche maiuscola alle corrispondenti minuscole:

Verbi incarnati de Virgine mille peractis
Annis, bis centum, bis septem connumeratis,
Vincere Maioricas, Christi famulis inimicas,
Tentant Pisani, Maumeti regna prophani.
5. Mane neci dantur multi; tamen his sociantur
Angelicae turbae, coelique locantur in urbe.
Terra destructa, classis redit aequore ducta,
Primum ope divina, simul et victrice carina.
O pia victorum bonitas! Defuncta suorum
10. Corpora classe gerunt, Pisasque reducere quaerunt:
Sed simul adductus ne turbet gaudia luctus,
Caesi pro Christo tumulo clauduntur in isto.

Naturalmente, dato che l'epigrafe originale sia perduta, sarebbe necessario rivedere il testo sull'edizione del 1506, ed eventualmente sulle altre anteriori al 1559. Confrontandolo invece, per ora, colla sola edizione del Calisse, e non tenendo conto del *claudentur* che il nuovo editore si lasciò sfuggire nell'ultimo verso, certo per semplice svista, troviamo due sole varianti degne di nota: *post centum* nel secondo verso, in luogo di *bis centum*, e *Macumeti* nel quarto invece di *Maumeti*. Che il *bis centum* sia errato, è fuori di dubbio; e la lezione *post*, sia essa tolta dalle prime edizioni dei *Commentarii* o dovuta ad una posteriore correzione congetturale, è invece ottima. Quanto a *Măŭmēti* (*Māūmēti? Măhŭmēti?*) o *Măcŭmēti*, non essendovi ragioni intrinseche per dar la preferenza ad una delle lezioni, converrà, sempre nell'ipotesi della scomparsa della lapide originale, attenersi all'edizione principe. Notiamo, fra parentesi, che nessuna delle due forme è usata dall'autore del *Liber Maiolichinus*, il quale, con piena libertà sia per la forma che per la prosodia, scrive: *Māchāmătŭs* (v. 1088), *Māchāmătĭs* (1832), *Māchămătis* (294), *Măchāmătĭs* (1500), *Māchāmătă* (2518, 2542), *māchāmătĭcum* (2507).

Passando all'esame intrinseco del testo, non troviamo intoppi se non nei versi 5-6:

Mane neci dantur multi; tamen his sociantur
Angelicae turbae, coelique locantur in urbe.

Che significa, infatti, quel *mane*? In una guerra durata quasi due anni, non ci furono proprio combattimenti e morti se non nelle mattinate? Per parte mia, ritengo che il *mane* sia dovuto ad errore di lettura, e propongo di legger invece *Marte*: “ molti “ caddero in guerra „. Ricordo, a questo proposito, che un'espressione affatto simile è usata nel *Liber Maiolichinus*, v. 956 (*multis nam marte peremtis — Barbarus abscessit*); e che una celebre iscrizione genovese, tuttora esistente, comincia appunto col verso:

Marte mei populi nuper fuit Africa mota.

Non mi pare inoltre infondato il sospetto, che in luogo di *his* debba leggersi *hi*, e che le parole *angelicae turbae* siano quindi dativi singolari e non nominativi plurali. L'*angelica turba* corrisponderebbe in tal caso all'*angelico cetu* d'un'altra iscrizione pisana del secolo duodecimo, cioè dell'epitaffio di Burgundio (1); e il nominativo plurale *hi* reggerebbe i due verbi *sociantur* e *locantur*.

Com'è noto, coloro che morivano nelle guerre contro gli infedeli erano ritenuti *caesi pro Christo*, come dice l'iscrizione, cioè martiri (2). Tutti i caduti nella spedizione balearica dovevano quindi esser passati dal *martirio* alla *pace* della *città celeste*; ed anche per questo riguardo è da respingersi la punteggiatura della citata edizione del 1559 e di parecchie altre, che staccano la parola *multi* da *neci dantur* e la congiungono a *sociantur* e *locantur*, intendendo, a quanto pare, l'*his* come se fosse scritto *ex his*.

Aggiungo ancora, che nelle lapidi pisane sincrone i dittonghi non sono affatto usati. La loro presenza nella nostra iscrizione deve quindi attribuirsi agli editori.

---

(1) Cfr. il mio scritto *L'epitaffio di Burgundio Pisano*, Catania, 1909, estr. dalla parte I del volume in onore di Federico Ciccaglione.

(2) Si vedano, per esempio, le fonti citate nei miei *Studi storici e note sopra alcune iscrizioni medievali*, Modena, 1907, pagg. 110, nota 4, e 203 (estr. dalle *Memorie* dell'Accad. di Modena, S. III, vol. VIII); alle quali si può aggiungere il *Liber Maiolichinus*, v. 2225 e segg. e 2965.

3. — Della seconda iscrizione, già collocata a Pisa sulla *Porta d'oro* e ora sulla porta della chiesa detta volgarmente la Madonna dei Galletti, il Calisse cita tre edizioni (1), oltre alle quali ho presenti quelle di Flaminio dal Borgo e del Cappelletti, nelle opere già ricordate.

Il testo del Calisse è il seguente:

Civibus egregiis hec aurea porta vocatur,
  In qua sic dictat nobilitatis honor.
Hanc urbem decus imperii generale putetis,
  Que fera pravorum colla ferire solet.
5. Maioris Balee rabies erat improba multum,
  Illa quid hec posset victaque sensit Ebus.
Annis millenis decem centum cum quinque peractis
  Ex quo concepit Virgo Maria Deum,
Pisanus populus victor prostravit utramque.
10. Hisque facit strages ingeminata fidem.

Diligite iustitiam qui iudicatis terram.

È quasi superfluo osservare che il settimo verso, quale è dato nell'edizione del Calisse e in tutte le altre che ho presenti, non corre affatto. Basta però, percorrendo il Lungarno regio, dar una guardatina al marmo originale, nel quale è scritto chiaramente *mille* e non *millenis*, per avvedersi che non si tratta d'un errore di metrica dell'ignoto poeta medievale, ma bensì d'un errore molto meno antico, religiosamente ripetuto, come suole accadere, d'edizione in edizione.

Del resto il testo dell'epigrafe non presenta alcuna difficoltà, se non forse nei primi due versi, nei quali la frase *sic dictat nobilitatis honor* appare a primo aspetto alquanto oscura.

Benedetto Varchi, il quale, per incarico di Cosimo I, voltò, poco felicemente, l'iscrizione in versi italiani, ristampati dal Pecchiai, si tolse d'imbarazzo traducendo alla lettera:

È questa, che si chiama Porta d'Oro
  E s'apre ai valorosi cittadini.
  Così l'onor di nobiltade detta

---

(1) Nella citazione del Da Morrona, *Pisa illustrata*, vol. III, è indicata per errore di stampa la pag. 394. Si legga invece 494.

... e così permane anche l'equivoco. Volendo invece possibilmente dissiparlo, dirò che *honor nobilitatis* indica, a parer mio, *la classe dei nobili, la nobiltà,* e che il *sic dictat* deve riferirsi ai due versi successivi, nei quali Pisa è proclamata *decoro di tutto l'Impero,* perchè *suole* incaricarsi della punizione dei perversi e viene così ad assolvere uno dei principali còmpiti dell'autorità imperiale.

Per il significato delle parole *honor nobilitatis* si può confrontare il *Liber Maiolichinus* (versi 2090 e segg.), nel quale è detto, che durante la spedizione balearica clero, nobiltà e popolo avevano accampamenti separati, e per indicare la nobiltà è appunto usata la frase *honor nobilitatis*:

> Nobilitatis honor non longe densus habebat
> Hospicium: fortes steterant a fronte caterve
> Pisani populi, qui vitam duxit in armis
> Totam, perpetuos solitus tolerare labores.

Analogamente sono usate nel v. 953 le parole *pisanus honor* per indicare semplicemente *i Pisani*:

> Hinc pisanus honor, vires animosque resumens,
> Non dubitat vitreas iterum transire per undas.

Credo dunque che l'epigrafe fosse collocata nella Porta d'oro dalla *nobiltà* pisana, in un momento in cui essa, più che contrapporsi al *popolo*, credeva d'esser, di pieno diritto e quasi senza possibile contraddizione, a capo della città; e i consoli nominati per la spedizione erano infatti tutti *de culmine nobilitatis* (1). Notevole, ma facilmente spiegabile, è l'affermazione della nobiltà, che Pisa avesse proceduto alla punizione dei Musulmani quasi come legittima rappresentante dell'Impero. La verità storica era alquanto diversa, perchè la spedizione balearica era stata voluta da papa Pasquale II (2). Non dobbiamo però

---

(1) *Liber Maiolichinus*, v. 49 e segg.

(2) Nella citata nota sul *Preteso epitaffio di Ugo Visconti*, pag. 12, ebbi già occasione d'osservare, che la cronaca di Bernardo Marangone dice esplicitamente esser stata la spedizione balearica intrapresa *iussu domini papae*, e che la stessa affermazione si trova pure nel *Liber Maiolichinus*, v. 2761 e segg. (Cfr. v. 2962 e seg.).

dimenticare, che nel luglio dell'anno stesso in cui finì la guerra, morì la contessa Matilde, e che i Pisani mandarono poco dopo degli ambasciatori all'imperatore Enrico V, il quale, nel privilegio del 26 luglio 1116 (1), dichiarò alla sua volta che essi, colla distruzione di Maiorca, *non poca gloria* avevano aggiunto al suo impero.

È appena necessario dire che l'aggettivo *ingeminata* aggiunto a *strages* accenna alla duplice vittoria su Maiorca e su Iviza; e che l'ammonimento aggiunto in fine corrisponde alle prime parole del *Libro della Sapienza* di Salomone.

Ci resta da osservare, per riguardo alla forma delle lettere, che nella nostra epigrafe la *C*, salvo errore, è sempre quadrata, fuori che nell'iniziale della prima parola, *civibus*; che la *H* ha solo eccezionalmente la forma minuscola e viceversa che è solo eccezionalmente di forma maiuscola la *Q*; che la *M* e la *N* non sono mai onciali, e solo raramente ha forma onciale la *V*; che la *S* è frequentemente soprascritta; che le abbreviazioni sono frequenti, ma tutte delle più comuni ($\overline{DM}$ = *Deum*; ꝗ = *qui*; ꝑ = *pro*, ecc.); che il nesso *ST* in *strages* è di forma assai vicina alla minuscola.

4. — L'iscrizione sepolcrale è per una regina di Maiorca fatta prigioniera col figlio, convertitasi poi al cristianesimo, e morta e sepolta in Pisa. Il testo, secondo l'edizione del Calisse, sarebbe il seguente:

Regia me proles genuit; Pisae rapuerunt.
His ego cum nato bellica preda fui.
Maioricae regnum tenui: nunc condita saxo
Quod cernis iaceo, fine potita meo.
5. Quisquis es, rogo, tuae memor esto conditionis,
Atque pia pro me mente precare Deum.

Il Calisse ricorda cinque edizioni anteriori: ho di più presenti, oltre al citato opuscolo del Pecchiai, le edizioni di Antonio Cocchi, *Dei bagni di Pisa*, Firenze, 1750, pag. 355, nota; di G. B. Fanucci, *Orazione accademica sull'istoria militare pisana*,

---

(1) Cfr. il *Liber Maiolichinus* cit., *Append.* VIII, pagg. 144-145.

Pisa, 1788, pag. 59, nota 33 (incompleta); di LORENZO CANTINI, *Storia del commercio e navigazione dei Pisani*, vol. II, Firenze, 1798, pag. 228; del CAPPELLETTI, nel vol. cit., pag. 89 (scorrettissima).

L'epigrafe originale è nella facciata del Duomo di Pisa, nella prima arcata a sinistra di chi guarda. Anche qui basta un esame superficiale per far conoscere che i dittonghi furono aggiunti dagli editori, e che agli editori stessi è imputabile il grave errore, che si riscontra in quasi tutte le edizioni nel quinto verso, nel quale, invece di *rogo*, è scritto nell'originale *ergo*. Naturalmente, essendo la prima sillaba di *rogo* breve e divenendo la precedente *es* lunga per posizione, il verso, quale è dato dai due ultimi editori e da molti altri, non può reggersi in nessun modo.

Il marmo originale è guasto in un solo punto, in principio del primo verso, dove si legge chiaramente soltanto: ✠ REGIA M...... GENVIT. Dopo la *M* si vede la parte inferiore della *E*, poi le traccie di due segni che furono evidentemente interpretati ꝑL = *prol*, completando di congettura *proles*, come dànno tutte le edizioni che conosco, fatta solo eccezione per quella, affatto dimenticata, del Cocchi. Questo insigne medico e letterato non si contentò, come tanti altri, dei testi a stampa. Volle vedere l'originale e credette di scorgervi le lettere *S* · · *L*, congetturando quindi *soboles*, in luogo di *proles*. Ora, avendo io pure esaminato a lungo il punto in questione, credo di poter affermare che il tratto scambiato dal Cocchi per una *S* seguìta da un segno indecifrabile e dagli altri per il segno d'abbreviazione del *pro*, è semplicemente parte di una *A* colla prima asta ricciuta, alla quale seguiva immediatamente una *L* (MEAL); cosicchè si deve leggere " REGIA ME AL... GENUIT ". La parola, che cominciava con *AL*, poteva essere, o un nominativo, di cui *regia* fosse aggettivo, o, più facilmente, il genitivo di un nome di luogo o di persona. Così l'epigrafe, in cambio di un vago e superfluo accenno alla discendenza della regina da stirpe regia, conteneva verosimilmente l'indicazione del luogo di nascita, avvicinandosi in tal modo sempre più all'epitaffio antico, dal quale fu senza dubbio ispirata, a quello cioè per Virgilio:

Mantua me genuit, Calabri rapuere, tenet nunc
Parthenope . . . . .

Volendo completare la parola mutila riducendola a nome di persona, si potrebbe congetturare, per esempio, *Alantis*, ricordando Alante, ispano, *rex Baleae*, del quale parla il *Liber Maiolichinus*, o, meglio ancora, un altro Alante, il cui nome, come vedremo, doveva essere in Pisa ben noto. Per i nomi di città, ci sarebbe addirittura l'imbarazzo della scelta: *Almerie, Algerie, Alhame*, ecc. Occorrerebbe per altro aver conoscenze, che mi mancano affatto, ed istituire ricerche, che non sono in grado d'intraprendere, per aver qualche probabilità di presentare un'ipotesi non arbitraria; come pure per risolvere la questione, che intendo solo di proporre, sulla persona, alla quale l'epitaffio si riferisce.

Sulla regina fatta prigioniera e morta in Pisa, fiorirono le leggende. Secondo una di esse, alla quale sembra che il Calisse (pag. 132, nota 1) dia la preferenza, si sarebbe trattato della moglie del re Burabe; ma questo re fu fatto egli stesso prigioniero e condotto a Pisa, come attesta il *Liber Maiolichinus* (1), il quale viceversa non parla affatto della regina (2). Come dunque nell'epitaffio si sarebbe taciuto della cattura principale, accennandovisi solo al figlio e non al marito?

Questa difficoltà sarebbe tolta, se si potesse accettare la narrazione del Pecchiai: " il re mauro fu ucciso, la moglie e il " figlio di lui, condotti prigionieri in patria, presero il batte- " simo, chiamandosi l'una Bianca, l'altro Lamberto. Questi fu " poi restituito alle isole native, cui fu buon sovrano. La madre " morì in Pisa e venne sepolta presso la facciata del Duomo, " su la quale si scolpì l'epitaffio „. Tutto questo è però pura-

---

(1) Questo poemetto finisce appunto coi versi:

> Pisanam tandem Burabe transductus in urbem
> Prebuit Italie sese spectabile monstrum.

(2) Nei versi 2885 e segg. è narrata la cattura d'una piccola nave, che partita da Maiorca per la Spagna, aveva toccato Iviza. " *In rate iam dicta fuerat clarissima quedam — In patriam rediens cum parvo femina nato* „: e madre e figlio furono fatti prigionieri. Non doveva però trattarsi di una regina di Maiorca, perchè il poeta non avrebbe mancato di dirlo, ma invece di Mori della Spagna, che cercavano di tornare in patria (" *fines poscebat Hyberos... In patriam rediens* „).

mente leggendario. I re di Maiorca, coi quali i Pisani ebbero successivamente a combattere, furono tre, detti nel *Liber Maiolichinus Nazaredeolus*, *Burabe* e *Alante*. Il primo morì di malattia; il secondo fu preso in un tentativo di fuga e condotto, come s'è detto, a Pisa; il terzo fuggì. L'ucciso non potrebbe dunque essere che Burabe, il quale dovrebbe essere stato messo a morte dopo fatto prigioniero e condotto a Pisa, il che è più che inverosimile, e in ogni modo non attestato dalle fonti. Parimenti non merita alcuna fede la notizia del regno di Lamberto fatto cristiano (1). L'ipotesi, che la prigioniera, di cui si parla nell'epitaffio, fosse la moglie non di Burabe, ma di uno degli altri due re, urterebbe contro il silenzio del *Liber Maiolichinus*, oltrechè, per quel che possono valere, contro le leggende pisane.

In tale stato di cose, non credo che sia senz'altro da escludersi un'ipotesi, che è forse nuova e che presento in ogni modo all'esame dei competenti. Circa un secolo prima della spedizione balearica, i Pisani, combattendo in Sardegna, fecero veramente prigionieri la moglie ed il figlio del famoso Mughâid re delle Baleari, il *Mugetus* del *Liber Maiolichinus* e delle altre fonti occidentali, morto nel 1044-45. Il figlio, Alì o Alante, dopo varie vicende, venne in mano di un Albizone, dal quale fu restituito al padre, succedendogli quindi nel regno. Della madre non si ha più notizia, e nulla vieta di credere che sia morta in Pisa, e che ad essa si riferisca il nostro epitaffio, quand'anche l'esame paleografico possa farlo giudicare del secolo XII piuttosto che del secolo precedente. Va infatti osservato, che le famose iscrizioni poste nella facciata del Duomo di Pisa a commemorare le gesta compiute dai Pisani nel corso dell'undicesimo secolo, sono ritenute da giudici competentissimi del secolo duodecimo, “ *probabilmente* della prima metà „ (2); e che il ricordo, rimasto vivissimo, della cattura della moglie e del

---

(1) Cfr. le *Notizie* di M. Amari, premesse all'edizione del *Liber Maiolichinus*, a pag. LIV; e le note 3 e 4 del Calisse, a pag. 132.

(2) A. Vanni, *Di alcune iscrizioni della Primaziale pisana*, in *Studi storici di* A. Crivellucci *e di* E. Pais, vol. IV, Torino, 1895, pag. 228. Il Vanni s'appoggia, nella nota 3, sull'autorità dell'illustre paleografo prof. Clemente Lupi.

figlio di Mugetto, basterebbe a spiegare come l'epitaffio possa esser stato posto, o rinnovato, anche molti anni dopo la morte della prigioniera. Sappiamo infatti dal *Liber Maiolichinus*, che fra Albizone e Mugetto, grato per la liberazione del figlio, s'era stretto un patto quasi d'affratellamento, che doveva valere anche per i loro discendenti e che perdurava effettivamente anche all'epoca della guerra balearica (1).

Mi sarebbe ora malagevole intraprendere un accurato esame paleografico dell'iscrizione, non disponendo che del mio apografo, fatto parecchi anni or sono. Richiamo tuttavia l'attenzione di chi voglia studiare l'epigrafe sulle varie forme della *A*, della *Q*, della *R*; sulla *E* sempre capitale salvo nella parola *MEO* del quarto verso; sull'unica *H*, capitale; sulla *M* e sulla *N* quasi sempre onciali, sui nessi *TA*, *TE*, *TV*; sulle numerose incorporazioni di lettere, e viceversa sulla scarsità delle abbreviazioni, che non debbono essere più di tre; la lineetta sovrapposta in luogo di *M*, in *regnum*; una delle solite abbreviazioni di *que* in *atque*, e $Q^{S}Q_{I}S$ per *quisquis*, con *V* incorporata in ciascuna *Q*.

Aggiungo ancora un'osservazione. La frase " *bellica preda fui* „ non è certo così caratteristica, che si possa pretendere di indicarne la fonte. Ricordo ciononondimeno, che essa si trova pure in uno dei noti epigrammi d'Ausonio (ediz. Peiper, pag. 114 e segg.) per *Bissula*, giovane sveva fatta prigioniera dai Romani:

> Capta manu sed missa manu, dominatur in eius
> Deliciis, cuius *bellica praeda fuit.*

5. — L'ultima iscrizione, di cui intendo trattare, affissa esteriormente alla parete settentrionale del Duomo di Pisa, è

---

(1) *Liber Maiolichinus*, v. 957 e segg.:

> Barbarus abscessit, capto cum coniuge nato.
> . . . .
> Reddidit hic patri, karissima munera, natum:
> Albicio quare successoresque vocantur
> Mugeti fratres successorumque suorum.
> Ergo quisquis habet regum Balearica sceptra,
> Ex hoc affirmat se fratrem seminis huius.

Cfr. le note all'edizione e le *Notizie* dell'Amari cit., a pag. LI.

in onore di un Enrico, console pisano, fatto prigioniero e probabilmente messo a morte dai nemici.

Avverte il Fanucci (1) che *neppure alla singolare diligenza del cav. Flaminio Dal Borgo* fu possibile *rintracciare l'età, in cui visse* questo Enrico, probabilmente *ammiraglio di armata in alcuna delle tante spedizioni pisane contro i Barbari.* Venne tuttavia accennato da altri (2) alla possibilità, che si tratti di uno dei dodici consoli nominati per la spedizione balearica; nel qual caso la cattura d'Enrico e la sua morte dovrebbero in ogni modo esser posteriori alla spedizione, e non esser ricordate dai cronisti pisani. Non so se la questione sia stata in seguito ripresa; nè per parte mia avrei ora possibilità di approfondirla. Le correzioni, che posso fare al testo dell'iscrizione, sono d'altra parte insignificanti. Mi sono nondimeno indotto a ripubblicarla, sia perchè la credo poco nota, non avendo io conoscenza se non delle edizioni del Fanucci e del Moreni nei due vecchi opuscoli citati, sia per l'importanza intrinseca e per l'alto e simpatico sentimento di romanità, da cui è ispirata.

Ecco, anzitutto, il testo, del quale ho soltanto modificata la punteggiatura:

> Quam sequeris belli fortuna, laude sequaris
> Romam, Pisa, tui consulis egregii.
> " Claruit Henricus „ dic, dic " virtutibus altis,
> Nomen cuius erit semper in ore meis „.

---

(1) *Orazione accad.* cit., pag. 46, nota 29.

(2) Benedicti Mastianii, *I. C. De bello Balearico commentariolum... in lucem editum notisque illustratum a* Dominico Morenio, Firenze, 1810, pag. 20. I nomi dei dodici consoli si trovano nel trattato d'alleanza col conte di Barcellona del 7 sett. 1114 (*Liber Maiolichinus*, Append. I, pagg. 138-139) e nel *Liber Maiolichinus*, v. 57 e segg. Abbiamo fra essi un *Erithonem filium domini Erithonis* (*Erithone satum, genitoris nomen habentem*) e un *Henricum, genus a Vinithone trahentem* (così va letto, non *Vinitihone*, come scrive il Calisse senza tener conto della metrica). Gli storici posteriori parlano di Enrico Erici e di Enrico Masca (cfr. le note del Calisse ai versi citati); ma la denominazione diversa usata dalle fonti sincrone dimostra che l'iscrizione non potrebbe in ogni caso riferirsi se non ad Enrico di Guiniccione, o Enrico Masca, che dir si voglia.

5. Hic tibi nempe Cato fuit, Ector, Tullius alter,
Mente, manu, lingua, par tribus unus homo.
Fabricius castis sprevit temporibus olim
Munera: contempsit hic et in orbe levi.
Regulus iste tibi, captus tua bella gerendo,
10. Blanda, minas, mortem, spernere, ferre, pati
Preposuit pro te; mutans, non vivere perdens.
Clauditur hic, mundi climata corde tenens (1).

Il concetto espresso nei primi due versi, che cioè Pisa rinnovi le glorie di Roma, ha riscontro in parecchie altre fonti pisane dell'undecimo e del duodecimo secolo. Così il celebre carme per la spedizione del 1087 comincia coi versi

Inclitorum Pisanorum scripturus historiam
Antiquorum Romanorum renovo memoriam:
Nam extendit modo Pisa laudem admirabilem,
Quam olim recepit Roma vincendo Cartaginem.

e analogamente, in alcuni versi contenuti in uno dei codici del *Liber Maiolichinus* (ed. cit., pagg. 132-133, n. 4) Pisa dice di sè stessa:

Ego Roma altera iam solebam dici (2)
. . . .
Propter gentes barbaras, quas ubique vici.

---

(1) Le due edizioni precedenti citate hanno nel v. 5 *Hector* in luogo di *Ector*; e quella del Fanucci, nello stesso verso, *namque* in luogo di *nempe*. Nella lapide originale notai un punto in fine d'ogni verso, fatta eccezione per il primo ed il settimo; inoltre, dopo le parole *fortuna* del primo verso; *fuit* ed *Ector* del quinto; *mente, manu, lingua* del sesto; *munera* dell'ottavo; *te* dell'undecimo. Le lettere *E, M, N, V* hanno due forme, la capitale e l'onciale. La *H* e la *Q* sono sempre maiuscole. La *O* è talora quasi appuntata nella parte superiore. Unico nesso dev'essere *VR* in *clauditur*.

(2) Alcuni secoli dopo, nel noto epitaffio di Gian Galeazzo Visconti, morto nel 1402, è detto che Pisa era stata la Roma del Tirreno: " quondam " Tyrrheni Roma profundi ". L'epitaffio fu stampato molte volte. Ho presente il testo dato dal Giovio, *Vitae duodecim Vicecomitum*, Parigi, 1549, pagg. 173-175.

Nello stesso *Liber Maiolichinus*, vv. 778-780, si afferma che Pisa fa ormai ciò, che converrebbe a Roma e a Costantinopoli:

> Si bene belligeras pensent nova secula Pisas
> Per mare, per terras geminas extendere vires,
> Hoc Pise faciunt, Romam quod utramque deceret.

Nell'epigrafe la glorificazione di Pisa è però congiunta col rimpianto del buon tempo antico. I *casti tempi* di Fabrizio sono contrapposti alla corruzione moderna, all'*orbis levis*, così come il *buon mondo* fatto da Roma è contrapposto, molto più tardi, da Dante al *mondo fatto reo* dalla *mala condotta* di chi dovrebbe essergli guida e freno (*Purgat.*, XVI, 103 e segg.).

Nel verso 11 *vivere* è usato, se non erro, nel senso del sostantivo *vita*: " non perdendo la vita, ma mutando la vita " terrena nella celeste ".

Nell'ultimo verso è espresso il solito contrasto fra il piccolo spazio, che racchiude il corpo inanimato, e l'immensità dei desideri e dei progetti accarezzati in vita dall'eroe: " è " chiuso qui colui, che in cuor suo teneva tutte le regioni (1) " del mondo ", che in tutte le regioni del mondo avrebbe voluto, a maggior gloria della sua Pisa, " *geminas extendere vires* ".

" *Mente subegerat orbem* ", scriveva, contemporaneamente o quasi, il francese Baldrico, abate di Bourgueil, d'un altro guerriero del pari sventurato, cioè di Burcardo di Montrésor: ed è notevole che, quantunque, certamente, non corra fra le due fonti alcun rapporto diretto, i suoi versi (2) in onore di Burcardo presentino anche parecchie altre analogie con quelli dell'epigrafe pisana. Così, secondo Baldrico, Tours, patria di Burcardo, aveva superato Roma *militiae titulis et probitate sua*; Burcardo, se più avesse vissuto, sarebbe stato un altro Giulio Cesare;

---

(1) Cfr. il glossario del Du Cange, alla v. *clima*.

(2) Li collazionai coll'unico manoscritto conosciuto e li ristampai integralmente nei già citati *Studi storici e note sopra alcune iscrizioni medievali*, pagg. 25-26; cfr. pagg. 386-387. Baldrico fu abate di Bourgueil dal 1079 al 1107 e morì nel 1131. Burcardo, se sono vere le ipotesi esposte nel lavoro citato, fu ucciso nei primi anni del secolo duodecimo; certo prima del 1110.

aveva sorpassato le gesta d'Achille; era un Cicerone per l'eloquenza e un Ettore per la bravura nei combattimenti; la natura gli aveva prodigato in massa tutto ciò, che, diviso, sarebbe bastato alla gloria di molti:

> Quicquid multarum natura potens probitatum
> Divisit multis, constituendo probos,
> Id, Burcharde, tibi dederat bene prodiga totum,
> Heroas in te quosque simul replicans.
> Quicquid sunt alii sortiti particulatim,
> Tu totum solus pleniter assequeris.
> Providus in verbis, robustus et acer in armis,
> Causidicus Cicero, belliger Hector eras.
> . . . .

Esercitazioni retoriche, non c'è dubbio, così queste come le pisane; ma esercitazioni, così le une come le altre, nelle quali, sotto la veste rettorica e malgrado la povertà e la rozzezza della lingua e del verso, fremono i ricordi e il desiderio della grandezza passata, e par che aleggi già lo spirito del Rinascimento. E, del resto, se la retorica contribuì allora e può contribuir ancor oggi a vivificare il sentimento nazionale dei Latini e a spazzar via la caligine barbarica, sia benedetta anche la retorica!

Postilla sul costo della guerra.

Nota II del Socio GIUSEPPE PRATO.

Riguardo alle quali però, e tornando al nostro punto di partenza, mi sembra per intanto indiscutibile che, ammessa o fondatamente supposta una più spiccata tendenza allo sperpero improduttivo in taluni gruppi, ogni fenomeno economico che abbia per effetto di trasferire ai medesimi una quota di ricchezza sproporzionata ai loro servizi tende ad aumentar la probabilità di distruzione della ricchezza stessa.

Cogli straordinari allettamenti di cui circonda l'impiego in fondi pubblici, la guerra attrae necessariamente dal campo industriale e commerciale al finanziario-politico non soltanto i risparmi nuovamente formati, ma anche una parte notevole di quelli già investiti sotto forma di capitale circolante di imprese produttive momentaneamente ridotte o sospese (1). Perchè, a pace tornata, possa determinarsi la trasformazione in senso inverso indispensabile alla ripresa della vita economica normale, perchè cioè i possessori dei titoli pubblici possano realizzarli e procurarsi un'altra volta i fondi di esercizio, è d'uopo si sia intanto formato un nuovo risparmio capace di assorbirli. Ma le somme affidate allo stato dai primi acquisitori dei certificati di debito concorrono alla accumulazione di questo risparmio soltanto nella parte non improduttivamente sperperata da coloro che li ebbero in cambio di lavoro o di beni necessari alla guerra. Se i favoriti dagli extra-profitti e dai sopra-salari osservarono la virtù dell'astinenza, in tal caso il costo reale del conflitto risulterà effettivamente diminuito in confronto a quello apparente dai consuntivi finanziari. Ma se, sotto lo stimolo dei

(1) Cfr. L. Einaudi, *Guerra e economia*, in " Riforma sociale ", giugno-luglio 1915.

lucri eccezionali, essi si abbandonarono ad una dispersione voluttuaria di ricchezze immensamente superiore a quella che, in circostanze normali, avrebbero potuto praticare; e se, peggio ancora, in conseguenza di ciò, gli aumentati salari determinarono una diminuzione nella produttività di lavoro (1), è chiaro che la redistribuzione avvenuta farà capo a una perdita sociale secca, non attenuata dal minimo compenso. " La guerra, scrive " egregiamente il Graziani, sarà cagione di una redistribuzione " di ricchezze, che avrà considerevoli effetti economici. Molti " beni sono stati distrutti, altri destinati a produrre strumenti " di distruzione e che nella distruzione trovano il loro uso. Bi" sogna distinguere la distruzione dei beni-reddito dalla distru" zione dei beni-capitale: la prima ha diminuite o tolte sod" disfazioni di bisogni che con quelle ricchezze si ottenevano, " ma, dopo la guerra, non impedirà alcun altro appagamento, " salvo eventualmente per la parte di esse che avrebbe potuto " essere utilizzata. In linea normale le soddisfazioni dei bisogni " si ottengono col reddito annuo periodicamente fluente; quindi " la distruzione di reddito scema quelle soddisfazioni, non scema " le soddisfazioni che si attendono dalle correnti successive di " reddito. Invece la distruzione di beni-capitale è distruzione " di sorgente di reddito, quindi toglie tutti quei flussi di red" dito che da essi sarebbero provenuti „ (2). Assorbendo in gigantesca misura i risparmi ed i capitali delle classi che, con la stessa loro sottoscrizione ai prestiti, dimostrano lo spirito e l'attitudine della previdenza, per passarli a quelle il cui contegno rivela spiccate tendenze scialacquatrici, lo stato diviene il tramite precipuo pel quale una parte ingente di capitale si distoglie da impieghi produttivi e si applica a consumi presenti, attenuando la diminuzione di soddisfazioni attuali afferente alla

---

(1) Ciò fu osservato, con viva inquietudine, in Inghilterra. " Higher earnings produced less work „, notò lo Shadwell, *The industrial factor in the war*, in " Nineteenth century „, agosto 1915. Vi accennò anche l'Edgeworth, *The cost of war and ways of reducing it suggested by economic theory*, pp. 27 e sg., 47 e sg., ricordando come le condizioni teoriche del fenomeno fossero state previste e formulate da S. Jevons, *The theory of political economy*, cap. VII.

(2) Cfr. *Le future conseguenze economiche della guerra.*

distruzione dei beni-reddito, ma a scapito della fonte permanente di redditi, quindi della potenza accumulatrice e della ripresa produttiva avvenire. I prestiti, le imposte straordinarie, l'assorbimento dei depositi delle casse di risparmio, espedienti normali della finanza di guerra, non sono il solo processo attraverso il quale si opera il trapasso. Concorrono ad agevolarlo ed intensificarlo le copiose emissioni di carta moneta, che costituiscono un fortissimo spostamento del potere di consumo dai cittadini (danneggiati dal rincaro conseguente al rinvilio del medio circolante) allo stato, e da questo agli agenti produttivi del materiale bellico. Ma se, nelle mani di costoro, la ricchezza così trasferita si evapora in una patologica domanda di beni puramente voluttuari, viene ad essere eliminato il vantaggio che si presume derivante dalla contrazione dei consumi dei pagatori delle imposte straordinarie e dei portatori di biglietti a corso forzoso (1). Nell'economia di guerra, si dice, l'attività interna deve fornire: *a)* i prodotti indispensabili pei combattenti; *b)* il necessario e il più semplice superfluo per la popolazione civile; *c)* merci esportabili per pagare provviste militari e alimenti venuti dal di fuori (2). È evidente però che se una parte notevolissima della popolazione civile non soltanto mantiene, ma raddoppia i proprii consumi per effetto del dislocamento avvenuto nella precedente distribuzione della ricchezza, i supposti compensi sfumeranno e la perdita finale supererà di gran lunga le valutazioni dei calcolatori ottimistici (3). La diminuzione nel

---

(1) Accenna a ciò incidentalmente il Graziani, *Di alcuni sofismi sulle spese di guerra*, in " Riforma sociale ,, marzo-aprile, 1917: " Gli extra-profitti in parte percepiti a spese di altre classi di produttori non denotano incremento di reddito generale. Nè è vero che le spese di questi percettori di massimi profitti determinino nuove produzioni; anzi soltanto l'astensione da spesa, e la conversione di questa ricchezza in accumulazione produttiva ed in capitale potrà accrescere la produzione ,.

(2) Cfr. C. Supino, *Le fonti economiche della guerra*, in " Scientia ,, volume XIX (1916), n. XLVII, 3.

(3) Ciò avverrà tanto più in quanto, come altri ebbe a notare acutamente, la contrazione nei consumi dei danneggiati dall'avversa congiuntura è sempre più lenta a prodursi della tendenza nei favoriti ad elevare immediatamente il tenor di vita. Cfr. G. Mosca, *Razionamento o rincaro*, in " Nuova antologia ,, 1° febbraio 1917.

potere di risparmio di alcuni può esser parzialmente compensata dall'accrescimento in quello di altri soltanto a patto che i secondi risentano non meno dei primi la spinta all'economia che è insita allo stato di guerra. Date invece tendenze ed abitudini nettamente diverse nei varî gruppi, è chiaro che il danno definitivo dipenderà, più che da ogni altra cosa, dalla forma e dalla misura nelle quali la finanza e l'economia bellica ripartiranno fra i medesimi la ricchezza nazionale. Onde la unilateralità e l'imperfezione organica di qualunque calcolo sul costo della guerra che non includa accertamenti preliminari rispetto a quella psicologia economica delle varie classi, al cui studio i geniali rilievi di Vilfredo Pareto han tracciata la via e recati i primi contributi veramente scientifici (1).

La considerazione del problema teorico dal punto di vista che ho accennato è presupposto essenziale anche nella soluzione dei postulati pratici applicabili alla politica presente.

Nel campo tributario, anzitutto, sembrami debba sorgerne almeno qualche riserva alla diffusa opinione che tende ad esentare i guadagni delle classi salariate dai carichi immediati e futuri del conflitto. Predicando al popolo, negli anni della oppressione napoleonica, il dovere comune “ di trasformare le “ superfluità consuete nell'acquisto della sicurezza e dell'indi- “ pendenza „ contro la minacciosa brutalità militare, il dottor Chalmers insisteva perchè una tassazione rigorosissima spronasse ciascuno sulla via d'un eroico miglioramento attraverso una spietata astinenza (2). Men logici sono invece, s'io non m'inganno, quasi tutti gli economisti odierni, quando sostengono doversi restaurare, alla rovescia, i vecchi privilegi tributari. Il più deciso in tale senso è forse Achille Loria, che vorrebbe

---

(1) Cfr. *Rentiers et spéculateurs*, in “ L'Indépendance „, 1° maggio 1911; e più sistematicamente e largamente, in *Trattato di sociologia generale*, Firenze, 1916, vol. II, pp. 591 e sgg.; 668 e sgg.

(2) Cfr. Edgeworth, *The cost of war and ways of reducing it suggested by economic theory*, p. 22 e sg.

liquidata l'enorme passività della guerra con un'imposta straordinaria espropriatrice dei patrimonî al disopra di un certo minimo (1). Ma, in misura ridotta, propendono ad un ordine di idee non troppo dissimile, l'Edgeworth (2), il Graziani (3), lo stesso Einaudi (4).

Nella *vexata quaestio* della preferenza fra prestiti e tasse il Pigou si preoccupa quasi esclusivamente dell'incidenza finale dell'onere sostanzialmente identico, nel timore che l'interesse dei primi possa in parte venir addossato, mediante imposte sui consumi, alle classi lavoratrici (5). Nel quale punto di vista, il proposito di voler sottratte queste ultime alle conseguenze ed ai sacrifizi, anche lontani, della gran crisi appare sempre meglio evidente.

Se non che l'opportunità di una politica finanziaria orientata verso tali scopi risulta almeno molto contestabile, ove la misura favoreggiatrice si risolva in aumento di potere di consumo a prò di gruppi notoriamente sperperatori. Ciò che deve guidarci nella scelta fra debiti e tasse, scrive saggiamente l'Edgeworth, e più generalmente, non soltanto nell'acquisto, ma anche nella distribuzione del potere di acquisto per parte dello stato, l'ideale verso cui deve spingere la teoria economica, consiste nell'ostruire quanto meno è possibile i canali della produzione, e di non deviarli in modo da consentirne la riattivazione integrale, a guerra finita, col minimo di fatica e di ritardo (6).

---

(1) Cfr. *Riflessioni e previsioni a proposito della guerra*, in " Scientia ", vol. XIX, febbraio 1916.

(2) Cfr. *The cost of war and ways of reducing it suggested by economic theory*, p. 16.

(3) Cfr. *La guerra e le leggi economiche*, p. 39.

(4) Cfr. *Guerra ed economia.*

(5) Cfr. *The economy and finance of the war*, p. 66 e sgg. Del problema, così fervidamente discusso da secoli e ancora tanto controverso, uno degli aspetti più praticamente interessanti rimane quello degli effetti diversi che i due metodi esercitano sulla formazione di nuovo risparmio o sulla contrazione dei consumi; nella quale indagine mi sembra non possa farsi astrazione dai concetti dei quali ho cercato di sottolineare l'importanza.

(6) Cfr. *The cost of war and ways of reducing it suggested by economic theory*, p. 24. Giustamente ha notato testè un altro acuto economista che, avendo la guerra per effetto di trasferire temporaneamente nel governo la

A meno però di adottare la vecchia e gioconda teoria di Mandeville — sempre così cara alla comune ignoranza — per la quale chi più spende più è benemerito della produzione, non è possibile conciliare questo prudente criterio con un sistema di immunità tributarie rispettoso dei vizi forse più ancora che dei bisogni di talune classi, quindi incoraggiatore delle loro abitudini distruggitrici di ricchezza. Il privilegio dei nobili e del clero di fronte all'imposta fu, in altri tempi, giustamente combattuto anche perchè gli uni e gli altri disperdevano spesso nel fasto i loro redditi, esenti da tasse, facendo ricadere sui ceti risparmiatori e produttivi l'intiero onere delle spese pubbliche, con effetti economici funestissimi (1). La tendenza delle odierne finanze democratiche a gratificare di un uguale favore le nuove classi dominanti, privandosi dei cespiti a più larga base e sopprimendo nella maggior parte del popolo l'educativa coscienza di responsabilità dei sacrifizi collettivi, non costituisce, in sostanza, un fenomeno diverso.

In senso altrettanto contrario alle direttive che parrebbero indicate dalla logica degli enunciati principî agisce evidentemente lo stato quando, dopo aver costrette le imprese più fortunate ad accantonare una ingente porzione degli utili, al dichiarato scopo di costituir loro la riserva indispensabile ai bisogni della crisi post-bellica, subitamente accenna ad impadronirsene (2); così riuscendo per due versi ad una sicura distruzione

---

maggior parte della libertà d'iniziativa individuale dei cittadini, d'altrettanto s'accresce la responsabilità del governo stesso, non pure per l'esito dell'impresa collettiva straordinaria di cui gli è commessa la direzione, ma anche per l'avvenire delle sorti economiche private, a cui i singoli han momentaneamente rinunciato a provvedere. Cfr. W. R. Scott, *Economic problems of peace after war*. Cambridge, 1917, p. 13.

(1) Cfr. H. Taine, *Les origines de la France contemporaine. L'ancien régime*, 16ª ed., Parigi, 1887, p. 52 e sgg.

(2) Cfr. per l'Italia, le discussioni ed i timori suscitati dal decreto 9 novembre 1916, in E. Magni, *Finanza e vittoria*, Roma, 1917, p. 460 e sgg. In realtà, per chi conosce la disinvoltura con cui lo stato italiano sa emanciparsi dagli obblighi contrattuali, poco vale a scemare inquietudine la osservazione degli scrittori ottimisti che " l'esercitare un potere qualsiasi sulla parte d'utili non distribuita sarebbe una violazione della lettera e

di futuri beni-reddito: scemando i capitali di sviluppo di aziende rivelatesi produttive e inducendole al tempo stesso ad adottare, d'ora in poi, una linea di condotta anti-economica, con larga distribuzione di salari e di provvigioni, facilità di spese superflue ecc., mentre più sarebbe consigliabile l'esercizio d'un prudente, rigoroso risparmio.

Ma non in materia tributaria esclusivamente le deviazioni dalla norma economica risultano frequenti: perocchè esse investono l'intiero indirizzo del regime di eccezione a cui trovansi sottoposti i paesi belligeranti.

La politica annonaria ne offre forse l'esemplificazione più tipica.

Due correttivi si conoscono alla deficienza di approvvigionamenti: il razionamento coattivo e il rincaro naturale. Vessatorio e di difficile applicazione il primo, anche perchè, a non risultare troppo ingiusto, dovrebbe venir esteso a tutti i generi e graduato con criteri non aritmetici; men *democratico* (nel senso convenzionale della parola) indubbiamente, ma più liberale il secondo, e, per giunta, immensamente più efficace a raggiungere prontamente ciò che, nella minacciata mancanza di provviste alimentari, deve considerarsi il maggior bene collettivo: l'intensificazione della produzione interna da un lato, il minor consumo dall'altro.

Proposito del governo italiano sembra però esser stato quello di cumulare gli inconvenienti anzichè i vantaggi di entrambi i sistemi.

Ostacolando invero con una serie di sconnessi ed empirici calmieri, con divieti di esportazione e circolazione, ecc., l'azione meccanica dell'elevazione graduale dei prezzi, si è favorita nel paese la perduranza di un tenor di vita giocondamente imprevidente, caratterizzato dallo spreco universale degli alimenti più indispensabili; mentre si scoraggiava l'attività di produzione agricola, negando il naturale compenso ai costi di produzione cresciuti. Si ebbe così la soddisfazione di

---

dello spirito del d. l. 7 febbraio 1916 „. Cfr. M. Delledonne, *Saggio critico sul diritto pubblico italiano in rapporto alle attuali tendenze economiche*, Torino, 1917, p. 253.

poter registrare prezzi *ufficiali* dei principali generi inferiori in media a quelli di parecchi altri paesi (1), ma col risultato di giungere alla necessità del razionamento con provviste falcidiate e con forze produttive debilitate e ridotte (2).

---

(1) Cfr. A. Niceforo, *I consumi alimentari e i loro prezzi in Italia e nei paesi nemici*, in " Secolo XX ", aprile 1917.

(2) Uno degli alti fuzionari a cui toccò l'arduo e ingrato còmpito di dirigere e regolare l'applicazione dei calmieri, ne ha testè tentata la difesa dalla esagerazione di talune critiche. Anche per lui il metodo " è di efficacia non sicura e pieno di inconvenienti ", specie ove presenti disparità locali e non sia limitato ad un minimo numero di merci, di consumo più largo e generale; ma lo si deve accettare come un meno peggio, in confronto alla piena libertà degli alti prezzi, che limitano i consumi attraverso ineguaglianze di sacrifizi inopportune, anzi socialmente pericolose. Non è poi vero che i calmieri quando siano mantenuti in limiti ragionevoli e lascino i dovuti margini di profitto, possano esercitare una forte azione deprimente sulla produzione, perchè è assurdo supporre che il produttore rinunzi al reddito, solo perchè inferiore alle sue aspettative, mentre egli è gravato di una quantità di spese costanti. Cfr. V. Giuffrida, *I calmieri*, in " Nuova rassegna ", 5 febbraio 1917. Ora, prescindendo dalla vera impossibilità pratica di stabilire l'equo margine di profitto, nella mutabilità continua e fortissima di tutti i fattori della produzione non controllati (fra cui specialmente la mano d'opera), a me sembra evidente che il fare assegnamento sulla convenienza del produttore a non restringere la propria attività in vista delle spese già incontrate e di quelle generali che lo colpiscono deve considerarsi un'illusione pericolosa, per poco che il sistema abbia a prolungarsi in successivi cicli produttivi. Evidentemente il coltivatore che ha seminato grano non tralascierà dal raccoglierlo perchè il prezzo ne fu nel frattempo ridotto. Ma, nell'autunno seguente, lascierà inseminate le sue terre meno comode o meno fertili, dove le spese di produzione eccedono le speranze del compenso. Ciò che avvenne in Italia ed in Francia coi vigenti prezzi di imperio dei cereali, troppo bene lo conferma. L'effetto riesce anche più visibile riguardo ai minori prodotti, la cui offerta è dotata di elasticità massima e può contrarsi quasi istantaneamente con le mutate condizioni del mercato. Il fallimento ufficialmente confessato dal calmiere delle uova lo rese evidente anche ai ciechi. Quello del burro si avvia ad un uguale successo. Non è quindi affatto vero che le contrattazioni clandestine, sopprimendo in molti casi gli effetti del calmiere, consentano " i prezzi che si avrebbero avuti sul mercato in mancanza di esso ". I prezzi praticati saranno in realtà ben maggiori, per l'influenza del rischio e per la contrazione effettiva di tutta quella porzione dell'offerta che proveniva da produttori marginali. E ciò pure la recente universale esperienza ha luminosamente confermato. La riserva di forze compensatrici che è prov-

Peggio si fece per l'alimento fondamentale: il pane; al quale si volle precludere il rincaro con due metodi ugualmente artificiali: requisizione interna del grano a prezzi di imperio e importazione di stato dall'estero, con una rivendita a sotto-costo, che divenne ben presto vera e illimitata elargizione gratuita a metà-costo (1).

A dissimulare il carattere elemosiniero dell'operazione, si tennero gelosamente celati i prezzi d'acquisto all'estero, così dispensando i beneficati da ogni, per quanto improbabile, velleità di riconoscenza, e, ciò che più monta, privandoli di qualsiasi nozione del valore della merce che consumavano e sprecavano. Ci volle la minaccia dei sottomarini per far rendere omaggio, almeno a parole (2), a questa verità elementare: che il regalare a pochi la merce rubata ad altri o comprata coi danari di tutti non è il mezzo più adatto per raggiungere il duplice scopo di indurre a risparmiarla e di persuadere chi la coltiva ad inten-

---

videnziale rimedio nelle più grandi crisi ha d'uopo, per esser attivata, di uno stimolo di convenienza particolarissimo. Ad esigere dalle donne, dai vecchi, dai fanciulli, una somma di lavoro eccezionalissima, quale richiede la continuazione della vita agricola dopo la sottrazione delle energie più valide, occorre qualcosa di più efficace che non siano le declamazioni retoriche sulle loro benemerenze patriottiche o le promesse di abolizione dell'autorizzazione maritale.

Noterò per ultimo che la pretesa " inuguaglianza di sacrifizi „ provocata dal sistema della libertà dei prezzi, oltrechè è facilmente correggibile con provvidenze particolari a prò dei veramente bisognosi, giova particolarmente a ricondurre a maggior parsimonia di vita proprio quelle classi, che, per abito inveterato, sembrano, come vedemmo, più ostili allo spirito di previdenza.

(1) Denunziarono coraggiosamente l'iniquità ed i pericoli del sistema F. Flora, *I prezzi del grano e gli acquisti all'estero*, in " La libertà economica „, 15 aprile 1917; e, in parlamento, E. Giretti, *La politica economica della guerra*, 8 marzo 1917, p. 13 e sgg. dell'estr. Cfr. anche G. Bruccoleri, *Come il governo agevola la produzione del grano*, in " Unità „, 12 genn. 1917. In Francia la stessa politica sortì uguali effetti. La superficie coltivata a grano si ridusse, in quattro anni, di un buon terzo, mentre gli squilibrii dei prezzi di imperio inducevano a dare il frumento, come cibo, al bestiame Cfr. " Économiste français „, 19 maggio 1917.

(2) È notissimo che il prezzo di requisizione aumentato rimane sempre inferiore di oltre la metà a quello di importazione.

sificare il lavoro, secondo le esortazioni patriottiche della retorica politicante (1).

" Le violente leggi frumentarie — scriveva or fa un secolo
" uno dei più succinti ed efficaci fra i loro espositori — sono
" particolarmente di gusto turchesco. Egli è sopratutto in favor
" della capitale e delle principali città che quel Governo feroce,
" senza cessar d'esser debole, ricorre a tali provvedimenti, per
" timor di sommosse, usando le cautele in proporzion di sospetto.
" Quindi, in caso di scarsità, manda esso a saccheggiar in
" certo modo le provincie, per procacciare a Costantinopoli il
" pane a buon mercato; mentre i governatori pratican lo stesso
" ne' lor governi, facendovi ad un prezzo fisso, e talor vilissimo,

---

(1) Anche con le ultime disposizioni però l'ingiustizia e la disparità di trattamento permangono, anzi, per certi lati, si aggravano. Il decr. luog. 10 maggio 1917, n. 788, per esempio, sancisce fra l'altro (art. 2, 5) questa enormità economica e tecnica: un conduttore di fondi agricoli può, con semplice notifica al proprietario, dissodare, coi pascoli, anche i prati stabili artificiali asciutti e coltivarli a cereali, patate o legumi. La conseguenza è chiara: per tener basso relativamente il prezzo del frumento e degli altri generi a prò dei consumatori e dell'erario elargitore si confisca senza indennità il risparmio investito in colture foraggiere (spesso di lunga e malcerta riuscita), turbando per molti anni l'economia dei poderi più razionalmente costituiti, e rendendo possibili, al tempo stesso, i peggiori ricatti per parte dei conduttori, ai quali s'apre la tentante possibilità di sfruttare rapidamente la fertilità accumulata nelle terre non più tutelate dagli invalidati contratti, per poi abbandonare allegramente i poderi rovinati e resi inetti a un regolare rendimento. La distruzione, non pure della potenzialità di risparmio, ma del risparmio stesso già accumulato nella forma più produttiva e più meritoria (chi sappia quante cure e quale investimento di capitale rappresenti un prato stabile asciutto non esita a riconoscerlo), a vantaggio d'un problematico temporaneo aumento di produzione da confiscarsi a prezzi di imperio, vantaggiosi soltanto al conduttore disonesto, non potrebbe assumere una esemplificazione più tipica. È il caso classico del selvaggio che taglia l'albero per mangiare i frutti; ma aggravato dalla circostanza che proprietario dell'albero e raccoglitore dei frutti non sono la stessa persona. Ho illustrato più largamente il caso caratteristico in " Annali della R. Accademia di agricoltura di Torino ", 1917: *Le " Tanks " frumentarie del Ministero di agricoltura*. Ultimamente il Comizio Agrario di Torino, celebrando il suo cinquantenario, e, poco prima, quello di Cagliari, autorevolmente ricordavano ai dittatori economici che il razionale appello al principio del tornaconto individuale è il solo mezzo adatto perchè si proponga di accrescere i raccolti e frenare i consumi.

“ provveder il grano alle città dalle campagne affamate „ (1). Non altrimenti del resto agiva a Roma il *praefectus annonae*, vettovagliando la metropoli con l'imporre alle regioni granifere un forte tributo sul raccolto dell'annata, a favore della plebe, e completando le provviste con acquisti a spese dell'erario (2). Nè diversi criteri seguì Firenze, nei rapporti col soggetto contado (3), che le angherie subìte trasformaron in acerrimo nemico della signoria sfruttatrice (4).

Dei disordini annonari ed agricoli provocati nel regno di Napoli dalla pretesa di subordinare il traffico delle provincie alle esigenze della capitale ci lasciaron ampie descrizioni i più fedeli cronisti (5).

Residuo di codesti arcaismi economici era altresì il famigerato “ diritto di banderuola „, vigente ancora in Piemonte

---

(1) Cfr. Gambini, *Delle leggi frumentarie in Italia*, s. l., 1819, p. 78 e sg.

(2) Cfr. Dureau de la Malle, *L'economia politica dei Romani* (trad. it.), Milano, p. 474 e sgg.; J. Marquardt, *La vie privée des Romains* (trad. fr.), Parigi, 1893, vol. II, p. 14 e sgg.; L. M. Moreau-Cristophe, *Du droit à l'oisiveté et de l'organisation du travail servile dans les républiques grecques et romaine*, Parigi, 1849, pp. 33 e sgg., 71 e sgg. Vedi anche il raro libretto di V. Contarini, *De frumentaria romanorum largitione*, Vesaliae, 1669. Il sistema provocò la rovina completa della produzione agraria.

(3) Cfr. A. Zobi, *Manuale storico degli ordinamenti economici vigenti in Toscana*, Italia, 1858, p. 36 e sgg. Non mancò tuttavia qualche volta nei reggitori della repubblica un diverso criterio educativo; come quando, avendo la peste del 1348 straordinariamente elevate le paghe dei diradati artigiani, ne peggiorò i costumi. Allora, dice il Villani, “ il Comune, avendo bisogno, e vedendo essere il popolo ingrassato ed impoltronito, raddoppiò le gabelle del vino alle porte ed alzò quella del grano e del sale e della carne. Non vollero più fare provvisione pubblica di grano, cessando il lavoro dell'edifizio d'Orsanmichele a tal fine destinato; ma invece ordinarono che tutto il pane vendereccio si facesse dal Comune, e si vendesse a caro prezzo; e quale fornaio ne volesse fare pagasse ogni staio 8 soldi di gabella „. Cfr. G. Capponi, *Storia della repubblica di Firenze*, Firenze, 1875, t. I, p. 218, *n*.

(4) Una specie di servitù annonaria dei villici a prò delle città fu d'altronde sistema normale nell'età dei Comuni. Cfr. G. Arias, *Il sistema della costituzione economica e sociale nell'età dei Comuni*, Torino, 1905, p. 217 e sgg.

(5) Cfr. (D. Cantalupo), *Annona, o sia piano economico di pubblica sussistenza*, 2ª ed., s. a., Nizza, 1785, p. 48 e sgg.

dopo la restaurazione del 1815, e consistente nella facoltà degli abitanti cittadini ad approvvigionarsi al mercato prima che ne fosse concesso l'adito ai negozianti: privilegio dannosissimo ai villici, che il governo di Carlo Alberto durò gran fatica ad estirpare, tanto che dovette combatterne le rimanenze e rivivenze tenaci l'eloquenza di Camillo Cavour (1).

La ripresa integrale di quei metodi, a cui la guerra presente ci fa assistere, costituisce forse il meccanismo in cui più manifestamente si incarna l'artificialità illogica del processo redistributorio attuato dal regime di eccezione.

Con una enorme falcidia (2) sui prezzi di mercato dei prodotti delle classi agricole (alle quali in molti casi si tolse persino la provvista indispensabile al consumo famigliare e della semina, obbligandole a ricomprarlo a prezzi più alti) si trasferì un ingente potere di risparmio da queste ultime alle aristocrazie proletarie cittadine, di cui venivan per tal modo sopraelevate in forte misura le mercedi reali, al tempo stesso che esse si avvantaggiavano di tutti gli esoneri dal servizio militare, di salari nominali iperbolici, di sussidi svariati, come produttrici di materiale bellico. Ciò equivalse a trasformare in superfluità voluttuarie una massa di ricchezza proporzionale alla differenza che esiste fra il tradizionale spirito di accumulazione delle popolazioni agrarie (3) e la tendenza ad un sempre più costoso e ricreante tenor di vita che fra le plebi cittadine si va generalizzando (4).

---

(1) Cfr. R. Rota, *La tassa del pane a Torino ed una relazione quasi inedita di C. Cavour*, in “ Riforma sociale „, aprile-maggio 1915.

(2) Il “ Sole „ (LIII, 91) la calcola dal 40 al 150 %.

(3) L'agricoltura, ha notato giustamente l'Agnelli, è fra le industrie quella che fornisce il maggior contributo alla classe dei *rentiers* (nel senso paretiano). Cfr. *L'economia agricola e il prestito di guerra*, in “ Riforma sociale „, febbraio-marzo, 1916.

(4) Le recriminazioni e le veementi accuse di incetta a cui le popolazioni urbane tedesche si abbandonano contro i contadini, a danno dei quali invocano le più draconiane misure, sono una caratteristica manifestazione psicologica dello stesso fenomeno di sopraffazione di classe, mentre indicano forse che colà il sistema favoreggiatore fu spinto meno lontano, sebbene la condizione specialissima di mercato assediato avrebbe giustificate più che altrove misure arbitrariamente espropriatrici.

La equità di ripartizione dei carichi reali della guerra fra le regioni italiane ne risultò altresì gravemente alterato; poichè, se non a torto alcuni egregi rappresentanti del mezzogiorno han rilevato come, proporzionalmente alla ricchezza, quelle popolazioni ne sopportino un peso maggiore, per la mancanza dei compensi dipendenti dalle grandi concentrazioni di eserciti e dalle speciali industrie belliche (1), è chiaro che il trattamento di manifesto sfavore fatto alle classi agricole in confronto alle industriali (2), inasprisce la sperequazione, in parte inevitabile, risolvendosi in un nuovo e particolare danno per le provincie dove le prime predominano in modo assoluto. La parsimonia di vita del contadino meridionale italiano è universalmente proverbiale; e diviene spirito di tenace accumulazione, non appena guadagni meno miseri consentono la scelta fra il risparmio e qualche spesa voluttuaria. Tutta la storia della nostra emigrazione, non meno delle statistiche delle casse postali, stanno a documentare questa notoria verità. Nuocere alle regioni dove, *caeteris paribus*, un guadagno eccezionale si trasformerebbe con maggior probabilità in depositi capitalizzati, per favorire quelle dove più diffuso è l'abito e più facili e frequenti le occasioni di sperperarlo vuol dire accrescere il costo finale della guerra in una misura non certo calcolabile matematicamente, ma che deve riconoscersi considerevolissima, giustificando in pari tempo il pessimismo di tutti coloro che, da Lavergne in poi, dipinsero l'industrialismo cittadino a guisa di sfruttatore parassitario delle plaghe e dei ceti agricoli, ridotti a stato di economica tributarietà (3).

Le quali cose — che è pur tempo si dicano senza ipocrisie

---

(1) Cfr. particolarmente A. De Viti de Marco in " Unità ", 19 marzo 1914, 8 dicembre 1916.

(2) G. Bruccoleri ne illustra un nuovo, incredibile caso, denunziando sull'" Unità " del 14 giugno 1917 la " maschera " sotto la quale si va attuando tacitamente il monopolio del grano.

(3) Cfr. S. Solari, *Nuova fisiocrazia*, Parma, 1901, p. 4. Il S. consente anch'egli in parte in tale punto di vista; ma rende responsabile del fatto il trionfo dell'economia manchesteriana; mentre è precisamente il disconoscimento pratico dei suoi principî che fa sorgere un'antitesi assurda fra classi e forme di attività coordinate a un fine da armonie indissolubili.

eufemistiche, a spassionato contributo della storia futura — non significano in chi le osserva premature e presuntuose velleità critiche della condotta interna della guerra, al cui giudizio mancan tuttora troppi elementi. Data l'onnipotenza pratica delle minoranze faziose in cui si risolve l'intelligente meccanismo del suffragio universale, può darsi benissimo fosse necessità pei governanti ricordare, nei riguardi degli operai, il monito prudente che Federico il grande applicava, con mal celato disprezzo, alle classi medie: " La guerra la fanno i soldati; bisogna che i borghesi non se ne avvedano! ". Nè d'altro lato è meraviglia se, con l'opportunità delle circostanze, siasi dovuto assistere alla conferma della verità storica crudamente espressa da Treitschke: " L'agricoltura è la più libera delle professioni e non può fiorire durevolmente senza una certa indipendenza... Perciò è la più odiata dalla burocrazia " (1).

Ma da codesti fattori di obbiettivo apprezzamento non può evidentemente prescindere l'economista, che intraprende il calcolo scientifico della passività conseguente alla mondiale catastrofe; anche se consenta francamente con chi sostiene che la scienza delle pubbliche gravezze deve tener conto rigoroso, oltrechè dei problemi di valore, delle risultanti dei contrasti egoistici fra le classi dei contribuenti (2); e se ricordi le sapienti osservazioni di Adamo Smith sull'obbligo in cui spesso si trovano i governi di inchinarsi ai pregiudizi pubblici, per amore di pace interna e senso illuminato di opportunità.

Se, in determinate situazioni, il sacrifizio imposto agli uni a prò degli altri, e il danno economico innegabile che ne deriva alla collettività sian compensati da vantaggi d'ordine diverso, non è còmpito nostro decidere. Nello studio di taluni aspetti della vita sociale, forse s'appone al vero il Pigou, " economic considerations are enormously less important than political considerations; and the economist as such has, therefore, little

---

(1) Cfr. *La Francia dal primo impero al 1871* (trad. ital.), Bari, 1917, vol. II, p. 159.

(2) Cfr. B. Griziotti, *La diversa pressione tributaria del prestito e dell'imposta*, in " Giorn. degli econom. e riv. di statistica ", marzo 1917.

“ part to play „ (1). Còmpito e dovere dell'economista è però quello di rilevare l'esistenza, individuare il carattere e valutare l'entità del vero premio di assicurazione che così vien a gravare sul passivo dell'impresa bellica, in vista di scopi ad apprezzare i quali egli volontieri riconosce la propria incompetenza; per fornire al politico gli elementi di un parallelo fra l'importanza di tali scopi e quella del maggior sacrificio; e per tenerne stretto conto nel calcolo dei costi finali, che non potrà seriamente tentarsi prima che il cataclisma onde siamo travolti abbia fatto capo, dopo il tragico ciclo e le prime imprevedibili ripercussioni, a una qualsiasi forma di stabile assestamento.

---

(1) Cfr. *Interest after the war and the export of capital*, in “ Economic journal „, dicembre 1916.

POST·XL·ANNOS

INSCRIPTIO

HOC·DIE
QVO·ANTE·XL·ANNOS
IN·REGIO·ATHENAEO·TAVRINENSI
LITTERARVM·DOCTOR·OMNIBVS·SENTENTIIS·RENVNTIATVS·SVM
VENERANDAE·MAGISTRORVM·MEORVM·IMAGINES
QVORVM·NEMO·IAM·VIVIT
IN·MENTEM·VENIVNT·ET·PECTVS·MAESTITIA·PERFVNDVNT
DVLCISSIMI·ITEM·TOT·AEQVALIVM·VVLTVS
QVI·MECVM·IN·ATHENAEO·STVDIORVM·CONSORTES·FVERVNT
QVOSQVE·LABENTIBVS·ANNIS·IMMATVRA·MORS·CORRIPVIT
MEMORI·ANIMO·OCCVRRVNT·ATQVE·ACERBVM·DOLOREM·INVRVNT
SED·PAVCOS·ILLOS·CONDISCIPVLOS·MEOS·QVI·VITA·FRVVNTVR
GAVDEO·AC·VEHEMENTER·LAETOR·INCOLVMES·ESSE
DEVMQVE·ORO·VT·VITAE·MEAE·SVPERSTITES·SVPPETANT
NEC·MEI·MEMORIAM·VMQVAM·DEPONANT
TVM·SODALIBVS·MEIS·DOCTISSIMIS
REGIAE·ACADEMIAE·TAVRINENSIS·DOCTRINAE·STVDIIS·FOVENDIS
ET·COLLEGIS·CLARISSIMIS
REGII·ATHENAEI·TAVRINENSIS
PLVRIMAM·ET·PLENISSIMAM·SALVTEM·IMPERTIRE
PERGRATVM·MIHI·EST·ET·IVCVNDVM

AT•SIMVL•SINT•VIRI•AMPLISSIMI•EX•ANIMO•SALVTATI
QVOS•IN•SVMMO•CONSILIO•RATIONI•STVDIORVM•PROCVRANDAE
QVADRIENNIVM•COLLEGAS•HABVI
ET•VERBA•COLLEGAE•SALVTANTIS•AD•DOCTORES•QVOQVE•PERTINEANT
QVI•IN•NOSTRIS•ATHENAEIS
LITTERAS•ET•PHILOSOPHIAM•PROFITENTVR
AD•EOS•PRAECIPVE•QVI•MECVM•ARTIORE•VINCVLO•CONIVNCTI
ITALAM•GENTEM•AD•LATINITATEM•INFORMANT
DVM•TOTA•COGITATIONE•ERVDITISSIMOS•VIROS•COMPLECTOR
QVORVM•SVFFRAGIIS•IN•ACADEMIAS
LANGOBARDICAM•PELORITANAM•VERGILIANAM•BRIXIANAM•PATAVINAM
HONORIFICENTISSIME•RECEPTVS•SVM
DVM•MERITAM•AMICIS•LITTERATISSIMIS•GRATIAM•PERSOLVO
QVI•MIHI•IN•TRIMENSTRIBVS•COMMENTARIIS•CONFICIENDIS
DE•GRAECA•LATINAQVE•PHILOLOGIA
CONSILIVM•DOCTRINAM•SOLLERTIAM•SCRIPTA•SVA•ADSIDVE•COMMODANT
DVM•DIES•NVMQVAM•OBLIVISCENDOS•REPETO
QVIBVS•MEDIOLANENSI•SPECTATISSIMORVM•PROFESSORVM•CONCILIO
SCHOLIS•ORDINIS•SECVNDI•INSPICIENDIS
PER•BIENNIVM•PRAEFVI
SVBIT•SVAVISSIMA•IMAGO
REGII•ATHENAEI•MESSANENSIS
IN•QVO•PROFESSOR•PRAESES•RECTOR•FVI
VIII•PER•ANNOS•PAENE•PERPETVA•VSVS•VITAE•FELICITATE
REDEVNT•IN•MEMORIAM
DISCIPVLI•MEI•VTRIVSQVE•LITTERARVM•VNIVERSITATIS
QVI•PER•ITALIAM•ATQVE•ITALIAE•COLONIAS
OPTIMARVM•ARTIVM•VIAS•ADVLESCENTVLIS•NOSTRIS•APERIVNT
MIHIQVE•RIDENT•ORA•OPTATISSIMA
ALVMNORVM•QVOS•PRIMIS•MEI•MAGISTERII•ANNIS
IN•LYCEIS•CHERIENSI•ET•BVGELLENSI•ET•TAVRINENSI•GIOBERTIANO
DEINDE•IN•ACADEMIA•TAVRINENSI
MILITARIBVS•DOCTRINIS•INSTITVTISQVE•TRADENDIS
GRAECIS•LATINISQVE•VEL•PATRIIS•LITTERIS•ERVDIVI

SVNT·IN·ANIMO·TAMQVAM·INSIGNITI·ET·IMPRESSI
BENIGNI·ADVLESCENTIVM·VVLTVS
QVI·HOC·TEMPORE·ME·MAGISTRO·IN·ATHENAEO·TAVRINENSI
LATINAS·LITTERAS·COLVNT
EXIMIVM·VERO·MEVM·ET·SINGVLARE·STVDIVM·IIS·DISCIPVLIS·DICAVI
QVI·NVNC·PRO·PATRIA·PVGNANT
QVI·NVNC·PRO·PATRIA·MORI·NON·DVBITANT
IMMORTALE·AEQVALIVM·SVORVM·EXEMPLVM·SECVTI
QVI·IN·ACIE·FORTISSIME·DIMICANTES·PROCVBVERVNT
VT·FRATRES·ITALOS
BARBARORVM·DOMINATV·OPPRESSOS·EX·SERVITVTE·EXIMERENT
VT·ITALIAE·DIGNITATEM·ET·DECVS·SVSTINERENT
ITALIAE·DENIQVE·GLORIAM·ITALIAE·OPES·AMPLIFICARENT
SALVETE·DISCIPVLI·MIHI·EGREGIE·PRAETER·OMNES·CARI
VOSQVE·SERVET·DEVS·REBVS·ITALIAE·SECVNDIS

AVGVSTAE·TAVRINORVM·DIE·XI·MENSIS·IVLII·AN·MCMXVII

SCRIPSIT·HECTOR·STAMPINI

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI

INDICE

DEL VOLUME LII.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LII. DISP. I^{a}. **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1916-917

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1916 - 19 Novembre	1916 - 26 Novembre
» - 3 Dicembre	» - 10 Dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1917 - 7 Gennaio
1917 - 14 Gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 Febbraio
» - 11 Febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 4 Marzo
» - 11 Marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 1° Aprile
» - 15 Aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 Maggio
» - 13 Maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 Giugno
» - 17 Giugno	» - 24 »

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII, Disp. 2ª, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1916-917

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1916 - 19 Novembre	1916 - 26 Novembre
» - 3 Dicembre	» - 10 Dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1917 - 7 Gennaio
1917 - 14 Gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 Febbraio
» - 11 Febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 4 Marzo
» - 11 Marzo	» - 18 »
» - 25 »	» - 1° Aprile
» - 15 Aprile	» - 22 »
» - 29 »	» - 6 Maggio
» - 13 Maggio	» - 20 »
» - 27 »	» - 10 Giugno
» - 17 Giugno	» - 24 »

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII. Disp. 3a e 4a, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in–f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in–4°, di 70 pagg e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII. Disp. 5ª e 6ª, 1916-1917.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII. Disp. 7ª e 8ª, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII. Disp. 9ª e 10ª, 1916-1917.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII. Disp. IIa, 1916-1917.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LII, DISP. **12ª**, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in–f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in–4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LII. DISP. **13ª**, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII, Disp. **14a**, **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa èditrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. LII, Disp. 15ª. **1916-1917**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1917

PUBBLICAZIONI FATTE SOTTO GLI AUSPICI DELL'ACCADEMIA

Il Messale miniato del card. Nicolò Roselli detto il cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca nazionale di Torino riprodotto in fac-simile per cura di **C. Frati, A. Baudi di Vesme** e **C. Cipolla.**

Torino, Fratelli Bocca editori, 1906, 1 vol. in-f° di 32 pp. e 134 tavole in fotocollografia.

Il codice evangelico *k* della Biblioteca Universitaria nazionale di Torino, riprodotto in fac-simile per cura di **C. Cipolla, G. De Sanctis** e **P. Fedele.**

Torino, Casa editrice G. Molfese, 1913, 1 vol. in-4°, di 70 pagg. e 96 tav.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino